第一章　极限与连续

第一节　函　　数

§1.1　实数和数轴

数学中的一个大的分支叫做"分析学"，分析学是从"微积分"开始的．微积分在古代就已可见其思想的萌芽，直至十七世纪才告产生．其后的一百余年中它完全处于混沌朦胧的状态，无严格的叙述和论证方法，因此众论纷纭，争论不休．直至十九世纪方始玉宇澄清，这是法、德数学家的贡献．他们提出了一个明确的"极限"概念，从而使微积分有了清楚的语言．极限是一种运算，是四则运算以外的一种运算，可以叫做"分析运算"．分析学就是以此运算为其基础的．但是，要弄清楚极限的道理，归根到底就是要弄清楚数．

那么数是什么呢？它又是如何产生的呢？也许大家会认为，这是不成问题的问题．其实不然．像今天这样文明的世界上，尚可找到一些偏僻的少数民族，他们几乎没有数的概念，只有少量几个数：1, 2, 3，或多至 4, 5．自4, 5以上概曰为"多"．数的体系是人们在长期的生产和科学实践中逐渐创造出来的，但在很长的时期里，人们对数的认识很不完善，直至十九世纪，随着数学各学科的发展，人们对数才有了比较完善的数系理论．

我们说，桶内有 5 公升水，这话说明桶内水的含量，这个量是由数"5"和单位"公升"来共同表达的．所以数是反映量的，是量的抽象．量无非是多寡、长短和大小，是比较出来的．比如说，2 匹

马，5 头羊，这是量的多寡，是可以数的量．似乎可以说，由这种可数量的多寡比较，产生出了自然数1, 2, 3, …．但自然数远远不足以度量长短，这是因为，长短是连续变化的，这种“连续”的量与上述“可数”的或“离散”的量有根本区别．人们想到，规定一个标准长叫做“一尺”，一切长短拿来与这个标准长比较，就产生了有尽小数的概念，如 3 尺 2 寸 5 分，即 3.25 尺．大小就是面积或体积的比较，而面积是长度的平方，体积是长度的立方，因此要用数反映量，归根到底，就是要创造出足以反映一切长短的全部数来．也就是说，规定了标准的单位长以后，每一个线段都相应有一数表示其长短，并且数与数的关系能反映线段的长短关系．

那么有尽小数是否能度量一切线段的长短呢？还是远远不能！下面我们就先来讲解这个问题．

数既然是反映量的，为了反映量与量之间的关系，就要对数做运算．我们暂且不考虑加减法，而先讨论除法的运算．将 3 尺布平分给 5 个人，这就要做除法，每人得$\frac{3}{5}$尺．于是就产生了“分数”．若 p, q 是两个无公因子的自然数，则$\frac{p}{q}$是一个分数．

从分数(除法)又产生有尽小数或无尽循环小数．例如

$$\frac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}.$$

用 7 除 22，除不尽，产生余数 1；再除，产生余数 3；如此下去，每次所余只能是 0, 1, …, 6 这七个数之一．因此最多除七次必得重复出现的余数．如果重复出现的余数是 0，就得有尽小数．现在是得重复出现的非零余数 1，因此得循环小数．所以分数都是有尽小数或无尽循环小数．

反之，一个有尽小数显然可以化为分数．例如

$$3.25=\frac{325}{100}=\frac{13}{4}.$$

而一个无尽循环小数也一定可以化为分数. 例如, 记

$$3.\dot{1}4285\dot{7}=3+0.\dot{1}4285\dot{7}=3+\alpha,$$

则

$$10^6\alpha=142857+\alpha,$$

于是

$$\alpha=\frac{142857}{10^6-1}=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7},$$

所以

$$3.\dot{1}4285\dot{7}=3+\frac{1}{7}=\frac{22}{7}.$$

由以上讨论知道: 分数都是有尽小数或无尽循环小数, 反之亦然. 所以有尽小数只是分数的一部分. 那么分数能否度量一切线段的长短呢? 仍是远远不能!

我们知道, 勾股均为 1 的直角三角形斜边之长为$\sqrt{2}$. 这个数就不是分数. 事实上, 设$\sqrt{2}$为分数:

$$\sqrt{2}=\frac{p}{q},$$

其中 p,q 是无公因子的自然数. 于是

$$p^2=2q^2,$$

即 p^2 是偶数, 所以 p 也是偶数. 设 $p=2k$(k 是一自然数), 代入上式则得

$$q^2=2k^2.$$

所以 q 也是偶数. 于是 p,q 有公因子 2, 这与 p,q 的假设矛盾. 所以$\sqrt{2}$非分数. 由此可见分数不足以度量一切线段的长短. 它不能表示勾股均为 1 的直角三角形斜边之长, 因此我们还应补充新的数!

如果我们用尺去量$\frac{5}{4}$尺(将 5 尺 4 等分), 得 1 尺 2 寸 5 分, 即得 1.25 尺. 如果我们用尺去量$\frac{22}{7}$尺, 得 3 尺 1 寸 4 分 2 厘 8 毫

5 丝…，永远量不尽，即得 $3.\dot{1}4285\dot{7}$ 尺. 如果我们用尺去量勾股均为 1 尺的直角三角形的斜边，则得 1 尺 4 寸 1 分 4 厘 2 毫 1 丝…，也永远量不尽，并且不会循环，否则 $\sqrt{2}$ 就是分数了. 因此我们说 $\sqrt{2}$ 是一个无尽不循环小数：

$$\sqrt{2}=1.41421\cdots.$$

于是我们看到，用标准长去量一切线段只能出现上述三种情况：量得尽，得长为有尽小数；量不尽，出现循环，得长为无尽循环小数；量不尽，且不出现循环，得无尽不循环小数. 对于第三种情况，我们自然用量得的无尽不循环小数表示该线段之长. 也就是说，在分数（有尽或循环小数）的基础上再补充无尽不循环小数，就可度量一切线段之长了.

直至七世纪才开始出现 0 这个数，为了反映量的盈亏，后来才又出现负数. 由运算的角度来看，方程

$$3x+2=1$$

在正数范围内无解，而这样的方程随处可见，所以必须有 0 和负数. 这是容易理解的. 我们把

$$0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

叫做"整数". 把 0 和正负分数（整数也是分数）叫做"有理数". 所以有理数包括正、负有尽和循环小数. 把正、负无尽不循环小数叫做"无理数". 有理数和无理数统称"实数"，或简称为"数". 有尽小数当然也可以看作特殊的无尽（循环）小数，例如

$$1.25=1.2500\cdots=1.2499\cdots,$$

这样，实数就是全体无尽小数.

构造了实数以后，我们就可以建立"数轴". 在直线 l（图 1）上任取一点 O 叫做原点. 再取定一个线段叫做单位长. 以此单位长从原点开始往右量，量得线段 OP 之长为 x，则以 x 表示 P 点，叫做 P 点的"坐标". 以此单位长从原点开始往左量，量得线段 OQ 之

长为 x'，则以 $-x'$ 表示 Q 点，叫做 Q 点的坐标．这样，l 上每一点都对应一个数，即该点的坐标，l 叫做“数轴”．有了数轴就可以建立平面和空间坐标系，因而就可以建立解析几何学．但要记住，这只有在构造了实数以后才能办到．



图 1

至此，问题还没有完．数轴上每一点都对应一个实数为其坐标．那么，每一实数是否都是数轴上某点的坐标呢？也就是说，全体实数是否正好铺满整个数轴？要回答这个问题，我们须得承认直线的“连续性”．什么叫做直线的连续性呢？这就是下述的命题．

直线的连续性：设在直线上有一列带端点的线段 A_1，A_2，A_3，…，且线段 A_2 套在 A_1 之中，A_3 套在 A_2 之中，如此继续下去，并且它们一个比一个无限制地缩短(图2)，则存在唯一的一点 P 位于这列线段中的每一个线段上．

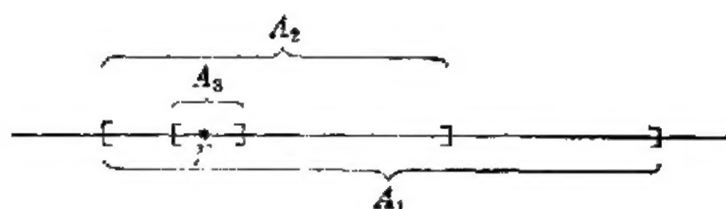


图 2

承认了直线的上述连续性以后，便可知每一个实数都在数轴上有一个位置．事实上，当 α 为一有理数时显然是正确的．但还要证明当 α 为一无理数时，数轴上也必有一点 P 以 α 为其坐标．不妨假定 $\alpha>0$．设

$$\alpha=a.a_1a_2\cdots$$

是一无理数，即是一无尽不循环小数，其中 a 是整数，a_1，a_2，…各为 0，1，…，9 中的一个数．并设

$$\alpha_1=a.a_1, \qquad \beta_1=a.a_1+\frac{1}{10},$$

$$\alpha_2=a.a_1a_2, \qquad \beta_2=a.a_1a_2+\frac{1}{10^2},$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

则 $\alpha_1,\beta_1;\alpha_2,\beta_2;\cdots$ 都是有理数，即是数轴上的点. 设 A_1 是以 α_1, β_1 为端点的线段, A_2 是以 α_2,β_2 为端点的线段, $\cdots$, 则 A_2 套在 A_1 之中, A_3 套在 A_2 之中, $\cdots$, 并且它们一个比一个无限制地缩短. 根据直线的连续性, 存在唯一的一点 P 位于一切 $A_1,A_2,\cdots$ 上. 易见, P 点的坐标就是 α.

通过上述方法我们构造了实数，并且指出实数正好铺满整个数轴. 我们的目的是要说明两点:

1. 由实数可以建立数轴，从而就可以建立平面和空间坐标系, 就可以用代数和分析方法研究几何问题(例如解析几何).

2. 既然直线有连续性, 则实数也应有相应的连续性. 我们尤其要说明的，是这第二点. 以后我们在第四章中将从无尽小数本身, 即不依赖于几何直线来发现这种连续性. 我们将逐渐看到, 实数连续性对于微积分乃至整个分析学有着无比的重要性，是分析学的基础.

最后我们还要补充说明，上面构造实数的工作是非常初步的和直观的, 目的只是为了建立数轴, 从而说明实数必然要有某种连续性, 但并未真正完成构造实数的工作. 为什么呢?因为我们根本未曾谈及无尽小数如何做四则运算的问题，也未曾谈及运算时大小次序的规律. 如要真正完成这件工作, 就要讲究数的表示方法. 无尽小数是实数的一种表示方法，这种表示方法在实用中是非常方便的. 例如在计算时都采用十进制小数; 根据所需要的精确度, 计算到有限位小数. 但对于构造实数来说，无尽小数就不是一个好的表示方法. 十九世纪数学家致力解决的就是这个表示方法

问题.

以上我们概述了实数大意. 在第四章中我们除了进一步严格讨论实数的连续性以外,还将简单地介绍实数的公理化方法,那时大家对实数就可以有一个比较完整的认识了.

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 数是用来反映什么的?

(2) 自然数,整数,有理数和无理数各是哪些数? 何谓实数?

(3) 有理数为什么不够我们应用?

(4) 实数和直线之间有什么关系?

(5) 什么叫做直线的连续性?

(6) 相应于直线的连续性,你认为实数应有什么样的连续性?

2. 化下列循环小数为分数:

(1) $0.24999\cdots$, (2) $0.\dot{3}7\dot{5}$, (3) $4.\dot{5}1\dot{8}$, (4) $2.1\dot{3}\dot{6}$.

3. 回答下列问题:

(1) $0.1010010001\cdots$是有理数还是无理数?

(2) 两个无理数之和是否还是无理数?

4. 证明下列命题:

(1) 一个有理数与一个无理数之和一定是无理数.

(2) 两个不相等的有理数之间有有理数.

(3) 两个不相等的实数之间有有理数,也有无理数.

5. 证明下列命题:

(1) $\sqrt{3}$是无理数.

(2) 若p是素数,则$\sqrt{p}$是无理数.

§1.2 函数

我们在中学已经有了“集合”和“函数”的概念. 集合是一切数学的基础,函数是微积分学的运算和研究对象,它们是至为重要的两个概念. 为了与读者统一语言起见,我们再明确一下这两个概

念以及它们的表示方法.

若干事物视为一组就成为一个"集合",这是集合的直观概念.例如,本校数学系一年级学生的全体构成一个集合;本班年龄小于18岁者构成一个集合;某机器在一日内生产出的正品和次品分别构成两个集合;所有大于0而小于1的数也构成一个集合;直角坐标平面上所有满足方程

$$x+y=1$$

的点(x,y)也构成一个集合,是一条直线,等等.

我们通常以大写拉丁字母$A, B, C, \cdots$来表示集合. 一个集合A中的成员叫做A中的"元素",有时也叫做A中的"点",通常以小写拉丁字母$a, b, c, \cdots$来表示它们. 若a是集合A中的元素,则说a"属于"A,记为$a \in A$;若a不是集合A中的元素,则说a不属于A,记为$a \overline{\in} A$. 例如,若A是全体正数所成之集合,则$1 \in A$, $-1 \overline{\in} A$. 于是大体上可以说,所谓集合,就是用$\in$和$\overline{\in}$来表达的概念,明确了什么$\in A$和什么$\overline{\in} A$以后,便明确了一个集合A.

若命题甲成立,则命题乙成立,这件事我们记为"甲$\Rightarrow$乙",并说命题乙成立是命题甲成立的"必要条件",命题甲成立是命题乙成立的"充分条件". 若"甲$\Rightarrow$乙",又有"乙$\Rightarrow$甲",则记为"甲$\Longleftrightarrow$乙",并说命题乙成立是命题甲成立的"充分必要条件".

如果"$a \in A \Rightarrow a \in B$",就是说,若$a \in A$,则$a \in B$,便记为$A \subset B$,读作$A$"包含于$B$";或记为$B \supset A$,读作"$B$包含$A$".

例如,若A为本班全体女生,B为本班全体同学,则$A \subset B$.

显然,对于一切集合A均有$A \subset A$.

如果$A \subset B$, $B \subset A$都成立,也就是说,$a \in A \Longleftrightarrow a \in B$,则记为$A=B$.

例如,若A为使$x^2<1$成立的数x的全体所成之集,B为介于-1和1之间的全体数,则$A=B$.

如果 $A\subset B$，则称 A 是 B 的**子集**. 如果 $A\subsetneq B$，则称 A 为 B 的**真子集**.

例如，若 N 为全体自然数 1, 2, 3, …, B 为全体整数，则 N 是 B 的真子集.

如果一个集合中没有任何元素，则说这个集合是**空集**. 空集记为 $\varnothing$. 例如，大于一切自然数的数构成空集.

为了说明或表示一个集合，我们通常采用下面的记号：

$$\{a:\ a\text{ 具有…性质}\}.$$

例如

$$\{x:\ x>0\}$$

就是全体正数所成之集. 再如

$$\{x:\ 0<x<1\},\qquad \{x:\ x^2>1\},$$

等都是具体的数集. 又如

$$\{(x,y):\ x^2+y^2<1\}$$

就是直角坐标平面上以原点为中心，以 1 为半径的圆内之点的全体. 集合 $\{1,2,3\}$ 表示三个数 1, 2 和 3 所成之集. $\{a\}$ 就是一个元素 a 所成之集.

对于集合也可以定义运算，但在第一册中尚不迫感这个需要，因此我们到第二册(第五章 § 1. 1)中再讲这个问题.

在微积分学中，数就是指实数. 数的集合叫做数集，也就是数轴上的点集. 其中最常用的数集是“区间”. 设 a,b 是两个实数，记

$$[a,b]=\{x:\ a\leqslant x\leqslant b\},$$

叫做一个闭区间；记

$$(a,b)=\{x:\ a<x<b\},$$

叫做一个开区间；记

$$(a, b]=\{x:\ a<x\leqslant b\},\quad [a, b)=\{x:\ a\leqslant x<b\},$$

分别叫做“左开右闭”和“左闭右开”的区间.

又记

$$[a, +\infty)=\{x:\ x\geqslant a\},\quad (-\infty, a]=\{x:\ x\leqslant a\},$$

也叫做闭区间；记

$$(a, +\infty)=\{x:\ x>a\},\quad (-\infty, a)=\{x:\ x<a\},$$

也叫做开区间. 又称后四个区间是“无界区间”或“无穷区间”，而称前四个区间是“有界区间”. 这里要特别指出，$+\infty$和$-\infty$是两个符号，分别读做“正无穷”和“负无穷”. 在微积分学中不把它们看做“数”，一般不与数作四则运算. 但它们与数有次序关系：$+\infty$比一切数都“大”，$-\infty$比一切数都“小”，即$-\infty<x<+\infty$ 对一切实数 x 成立. $(-\infty, +\infty)$也就是全体实数所成之集.

今后我们把全体实数所成之集$(-\infty, +\infty)$一律记为R，把自然数 1，2, 3, …的全体记为N. 例如，方程

$$x^2+1=0$$

无实解，所以

$$\{x\in R:\ x^2+1=0\}=\varnothing.$$

下面我们再来讲“函数”的概念. 先看两个例子.

设 x 为任意一个具体的人，我们以 $h(x)$表示其身高，以$C(x)$表示其肤色. 则 h 和C 都是一种对应关系：h 使得每一个人 x 对应着一个数 $h(x)$；C 使得每一个人 x 对应着一种颜色$C(x)$. 这种对应关系 h 和C 都叫做函数. 一般来讲，函数的直观概念如下：

定义 设 A 和 B 是两个集合，如果 f 是一种对应关系，使得 A 中每一个元素 x，在 B 中有一个(只有一个)元素 $f(x)$ 与之对应，则 f 叫做一个由 A 到 B 中的函数(或**映射**，**变换**)，记为

$$f:\ A\to B, \tag{1}$$

A 叫做 f 的**定义域**. 对于每一个元素 $x\in A$，其对应的元素 $f(x)\in B$

叫做 x 关于 f 的像或 f 在 x 上的值.

这是函数的直观定义，在第二册(第五章§1.2)中我们还要给出它的严格定义.

从函数的概念我们可以看到，一个函数 f 由两个因素完全确定:

1° f 的定义域 A;

2° f 在每一个 $x\in A$ 上的值 $f(x)$.

例 1 设 $A=\{a, b, c\}$, 则表

a	b	c
c	a	b

就定义了一个函数 f，它的定义域是 A, 值分别是 $f(a)=c$, $f(b)=a$, $f(c)=b$. 这是一个由 A 到 A 中的函数，并且函数值填满整个 A. 它代表字母 abc 的一个重新排列 cab.

例 2 对于每一个 $x\in[-1, 1]$定义

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}.$$

这就定义了一个函数 f, 它的定义域是 $[-1, 1]$. 给了 $x\in[-1, 1]$, 由上式就得函数值 $f(x)$. 值都在 R 中，是一个由$[-1, 1]$到 R 中的函数. 我们注意到，它的值填满$[0, 1]$, 并不填满 R.

例 3 从甲地到乙地，行李收费如下: 行李重不超过 50 公斤时，每公斤收费 0.15 元; 超过50公斤时，超重部份每公斤收费 0.25 元. 设行李重为 x，以$f(x)$记其运费，则 f 是一函数，其具体定义如下:

$$f(x)=\begin{cases}0.15x, & 0\leqslant x\leqslant 50,\\ 0.15\times 50+0.25\times(x-50), & x>50.\end{cases}$$

上式告诉我们 f 的定义域是$\{x\in R:\ x\geqslant 0\}$, 并告诉我们对于定义域中每一个 x，f 在 x 上的值 $f(x)$ 是什么，因此上式就确定了一个

函数 f.

设有函数(1). 如果 $E\subset A$ 是 A 的子集, 则 E 中元素的像的全体叫做 E 的像, 记为 $f(E)$, 即

$$f(E)=\{f(x):\ x\in E\}.$$

显然 $f(E)\subset B$. 特别, 定义域 A 的像 $f(A)$ 叫做 f 的值域, 即函数值的全体.

例如, 在上面例 1 中,

$$f(\{a, b\})=\{c, a\},\qquad f(A)=A.$$

在例 2 中,

$$f([0, 1])=f([-1, 0])=f([-1, 1])=[0, 1].$$

在例 3 中,

$$f([0, 50])=[0, 7.5],\quad f([50, +\infty))=[7.5, +\infty).$$

对于一个函数(1), 一般地 $f(A)\subset B$. 如果 $f(A)=B$, 则若要特别指出这一点时, 就称 f 为一个由 A 到 B 上的函数, 否则仍称 f 为由 A 到 B 中的函数. 上面例 1 是一个由 A 到 A 上的函数; 例 2 是一个由 $[-1, 1]$ 到 $[0, 1]$ 上的函数.

函数和映射, 变换等这些名词是相互通用的, 是代表同一个概念. 为方便起见, 在本书中将它们区分开来: 设有一个函数或映射(1), 如果 $B\subset R$, 即函数值都是实数, 则称(1)为函数. 如果 B 不是数集, 则称(1)为映射或变换. 以下一般按此区分来称呼函数和映射. 上面例 2 和例 3 都是函数, 例 1 是映射.

定义在实数集上的函数又称为"一元函数", 上面例 2 和例 3 都是一元函数. 定义在平面点集上的函数称为"二元函数". 例如, 对于平面点集(圆盘) $\{(x, y):\ x^2+y^2\leqslant 1\}$ 中的每一点 (x, y) 定义

$$f(x, y)=\sqrt{1-x^2-y^2},$$

则 f 是一个二元函数. 同样, 定义在空间点集上的函数叫做"三元函数". 本册以一元函数为对象, 所以我们暂不谈多元函数.

在微积分的演算和应用中，我们要借用一个无确切定义，但用起来非常便利的概念，叫做“变量”．例如，一个物体在时刻$t=0$时从高为h处自由落下，则下落距离s与时间t之间的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \tag{2}$$

其中g是重力加速度．在这个问题中时间t和距离s都是变化着的量，叫做“变量”．$\frac{1}{2}$和g是两个不变的量，叫做“常量”．再如，半径为r的圆面积为

$$A=\pi r^2. \tag{3}$$

在这个关系中，半径r和圆面积A是随着圆的不同而变化的，是变量；而圆周率$\pi=3.14159\cdots$是一个不变的常量．在(2)式中，我们令$f(t)=\frac{1}{2}gt^2(t\in R)$，则变量$s$和$t$的关系就是$s=f(t)(t\in R)$．当$0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$时这个关系式有一定的物理意义．同样，在(3)式中变量A和r也是一个函数关系$A=g(r)(r\in R)$，当$r>0$时这个关系有一定的几何意义．

一般地，如果$f: A\to R$是一个一元函数，我们可以用一个符号x代表A中的任一数，由于x是任意的，就可以视为在A中变化的量，因而函数值$y=f(x)$也是变化的量，于是x和y都是变量．但y的变化不是任意的，是依赖于x的，我们把x叫做“自变量”，y叫做“因变量”．称自变量x是“独立”的，因变量y不是独立的．变量x和y不是相互独立的，y和x之间有函数关系f．当x固定时，y是一个固定的函数值；当x变化时，y是一个变化的函数值．

一个变量也可以依赖于很多个变量．例如

$$z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}, \qquad x^2+y^2\leqslant 1,$$

则变量z和x，y之间有函数关系f，z依赖于x和y．变量x和

y 是自变量，是独立的；变量 z 是因变量，不是独立的．同样，设

$$u=\sqrt{1-x_1^2-\cdots-x_n^2},\qquad x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1,$$

则因变量 u 依赖于 n 个独立的自变量 $x_1,\cdots,\ x_n$．当然，$x_1,\cdots,x_n$ 也不是完全独立的，它们还受到关系式 $x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1$ 的约束．

变量在演算和应用中是一个经常碰到的概念，它的缺点是无严格定义．但是这不要紧，因为我们对函数是可以严格定义的(第五章)，这就够了．

设有一元函数 f，定义域为区间 I，则当 x 在 I 上变化时，方程

$$y=f(x)$$

在直角坐标平面 Oxy 上所表示的几何图形叫做函数 f 的"图象"．这也就是当 x 在 I 上变化时"动点"$(x,y)=(x,f(x))$在平面上所画出的图形(图 3)，也就是平面点集

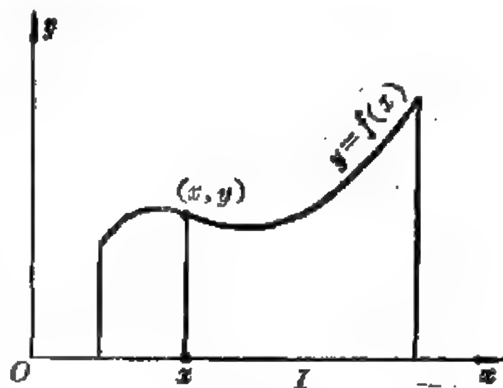


图 3

$$\{(x,y):\ y=f(x)\}.$$

例如，我们在中学里已经熟知，若$f(x)=ax+b$, $x\in R$, 则函数 f 的图象是一条直线．若 $f(x)=ax^2$, $x\in R$, 则 f 的图象是一条抛物线．

例 4 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. 试作出函数 f 的图象．

解 我们先作几点分析：

1\. f 的定义域是整个 x 轴 R．

2\. 因为 $f(x)=f(-x)$ 对一切 $x\in R$ 成立，所以 f 的图象关于 y 轴对称．

3\. $f(0)=1$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(2)=\dfrac{1}{5}$.

4. $f \geqslant 0$.

5. 当 x 无限增大时 $f(x)$ 无限接近于 0 .

根据以上五条，我们大致可得 f 的图象如图 4. ▯

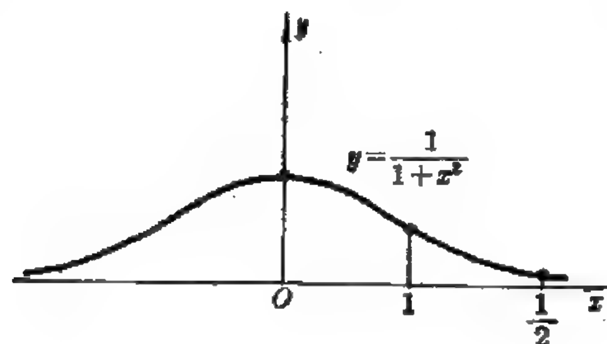


图 4

注 由函数定义，对于函数 f 的定义域中每一个 x 只相应有一个函数值 $y=f(x)$，即函数有“单值性”，所以平行于 y 轴的任一直线与函数图象最多只能相交于一点.

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 设 A、B 是集合，$A \subset B$ 和 $A=B$ 各是什么意思?

(2) $A \supset A$, $A \supset \varnothing$ 是否对一切集合都成立?

(3) 若 $a \in A$，则表达式 $a \subset A$, $\{a\} \in A$ 和 $\{a\} \subset A$ 是否都正确?

(4) 闭区间，开区间，有界区间和无界区间各是什么意思?

2. 设 $A=\{1, 2, 3\}$，试列出 A 的一切子集.

3. 下列各题集合间有何关系? 设

(1) $A=\{x \in R:\ x^2-4x+3<0\}$, $B=\{x \in R:\ |x-2|<1\}$.

(2) $A=\{x:\ x^3=2,\ x \text{为有理数}\}$, $B=\varnothing$.

(3) $A=\{x \in R:\ x^2-1=0\}$, $B=\{x \in R:\ (x-1)^2=0\}$.

(4) $A=\{a, a\}$, $B=\{a\}$.

(5) $A=\{a, b\}$, $B=\{b, a\}$.

(6) $A=\{1, 2\}$, $B=\{\{1\}, \{2\}\}$, $C=\{\{1\}, \{1, 2\}\}$,
$D=\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

4. 回答下列问题:

(1) 函数(映射)的定义是什么？什么是函数值？设E是集合，$f(E)$是什么意思？什么是值域？

(2) 函数是由哪些因素确定的？

(3) 函数的图象有什么特征？

5. 设 $f(x)=1+x$, $g(x)=1-x$, $x\in R$. 求

$f(2)+g(2)$, $f(2)-g(2)$, $f(2)g(2)$, $f(2)/g(2)$, $f(g(2))$, $g(f(2))$, $f(a)+f(-a)$, $f(t)g(-t)$.

6. 设 $f(x)=|x-3|+|x-1|$, $x\in R$. 求

(1) $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(-1)$, $f(-2)$.

(2) $\{x\in R: f(x+2)=f(x)\}$.

(3) $f(\{0,1,2\})$, $f([1,3])$.

7. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $x\neq -1$. 求

(1) $f(cx)$, $f(x+y)$, $f(x)+f(y)$.

(2) $\{x\in R: f(cx)=f(x)\}$.

(3) $f((-1,+\infty))$, $f([-2,-1))$.

8. 确定函数 f 的定义域, 设

(1) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-3x+2}$.　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

(3) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$.　(4) $f(x)=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}$.

(5) $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.　　(6) $f(x)=\log\dfrac{1+x}{1-x}$.

(7) $f(x)=\dfrac{1}{|x|-x}$.

9. 求出上题中函数 f 的值域.

10. 设 $\varphi(x)=\log x$, 证明

$$\varphi(x)+\varphi(x+1)=\varphi(x(x+1)).$$

11. 设$f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$, 其中 $a>0$. 证明

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

12. 求函数 f, 已知

(1) $f(x+1)=x^2+2x-1$.　　(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$, $x>0$.

(3) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $x\neq 0$.

13. 设映射 f 满足 $f(f(a))=a$. 求 $\underbrace{f(\cdots f(f}_{n\text{次}}(a))\cdots)$.

14. 求出一个映射 f 满足下列条件:

1° $f(f(x))=x$ 对定义域中的一切 x 成立;

2° $f(a)=b$, $f(c)=d$.

15. 设函数 f 的定义域为 R, 不恒为 0, 且对一切 $x, y\in R$ 满足:

1° $f(x+y)=f(x)+f(y)$;

2° $f(xy)=f(x)f(y)$.

证明

(1) $f(1)=1$.

(2) $f(x)=x$ 对一切有理数 x 成立.

(3) $f(x)>0$ 对一切 $x>0$ 成立.

(4) 若 $x>y$, 则 $f(x)>f(y)$.

(5) $f(x)=x$ 对一切 $x\in R$ 成立.

16. 设 $f(x)g(y)=h(x)k(y)$ 对一切 $x, y\in R$ 成立, 问这些函数应满足什么条件?

17. 设 $f(x)=[x]$, ($[x]$ 表示不大于 x 的最大整数) 作出函数 f 的图象.

18. 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

(1) 作出 f 的图象.

(2) 设 $g(x)=f(2x)$, 作出 g 的图象.

(3) 设 $h(x)=f(x-2)$, 作出 h 的图象.

(4) 设 $k(x)=f(2x)+f(x-2)$, 作出 k 的图象.

19. 设 $f(x)=1-|x|$, $g(x)=|x|-1$, 试作出它们的图象相围成的图形.

20. 设 A 是 n 个元素所成之有限集, 映射 f: $A\to A$ 满足条件: 当 $x\neq y$ 时 $f(x)\neq f(y)$. 这种映射叫做 A 的一个"排列".

(1) 证明 $f(A)=A$.

(2) A 有多少个排列?

(3) 证明存在一个排列 f，使 $f(x)\neq x$ 对一切 $x\in A$ 成立.

21. 一半径为 8 的圆，弦长为 l，圆心至弦的距离为 x. 试以 x 为自变量表示 l.

22. 已知圆锥的体积为 V. 试以底半径 r 表示锥高 h.

23. 在边长为 12 的正方形纸板的四角各剪去一个边长为 x 的正方形，再把它折成一个无盖纸盒，试以 x 表示盒的容积 V.

24. 从半径为 r 的圆纸板上，自中心剪去一个顶角为 θ 的扇形，把剩下的部分做成一个圆锥. 试以 θ 表示圆锥的体积 V.

25. 设函数 f 的定义区间 I 关于原点 $x=0$ 对称，即 $I=(-a,a)$ 或 $I=[-a,a]$. 若 $f(x)=f(-x)$ 对一切 $x\in I$ 成立，则称 f 为一**偶函数**；若 $f(x)=-f(-x)$ 对一切 $x\in I$ 成立，则称 f 为一**奇函数**.

(1) 偶函数和奇函数的图象有何特征？

(2) 若 f 是奇函数，则 $f(0)=0$.

26. 设函数 f 的定义区间关于点 x_0 对称.

(1) f 满足什么条件时它的图象关于直线 $x=x_0$ 对称？

(2) f 满足什么条件时它的图象关于点 (x_0,y_0) 对称？

§1.3 函数的代数运算

微积分学是以函数为对象的，主要是研究函数的"微分"和"积分"运算，在这一过程中自然也离不开函数的加、减、乘、除这些初等运算. 这些初等运算叫做"代数运算". 而微分和积分运算则属于"分析运算". 现在我们就来定义函数的代数运算.

定义 1 设有两个映射 f 和 g，定义域分别为 A 和 B. 如果 $A=B$，且 $f(x)=g(x)$ 对一切 $x\in A$ 成立，则说 $f=g$.

例如，若 $f(x)=x, 0\leqslant x\leqslant 1$，而 $g(x)=x, -1\leqslant x\leqslant 1$，函数 f 和 g 虽然当 $x\in[0,1]$ 时 $f(x)=g(x)$，但这两个函数不相等：$f\neq g$，因为它们的定义域不同.

定义 2 设 f 是一个函数，定义域为 A，c 是一个常数，则定义 cf 也是一个函数，定义域也是 A，当 $x\in A$ 时

$$(cf)(x)=cf(x).$$

设 g 是另一个函数，定义域是 B. 记 A 和 B 的公共部分为 C（图 5），则定义 $f+g$ 也是一个函数，它的定义域是 C，当 $x\in C$ 时

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

同样可定义 fg.

设

$$B_1=\{x\in B:\ g(x)\neq 0\},$$

记 A 和 B_1 的公共部分为 C_1，当 $x\in C_1$ 时定义

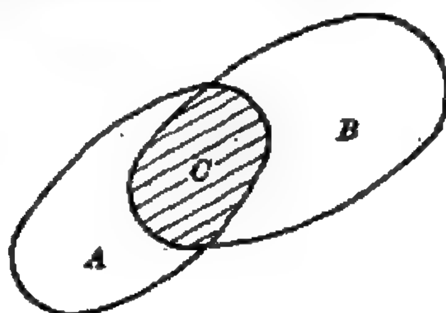


图 5

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

例 1 设

$$f(x)=\sqrt{1-x^2},\quad |x|\leqslant 1;\quad g(x)=\log x,\quad x>0.$$

这样定义的两个函数 f 和 g 有不同的定义域，公共部分是 $(0, 1]$. 任取常数 a 和 b，则 $af+bg$ 的定义域是 $(0, 1]$. 例如

$$(2f-3g)(x)=2\sqrt{1-x^2}-3\log x,\qquad 0<x\leqslant 1.$$

因为 $g(1)=0$，所以 f/g 的定义域是 $(0, 1)$，当 $x\in(0, 1)$ 时，

$$\frac{f}{g}(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{\log x},\qquad 0<x<1.$$

函数除了通常的乘法运算以外，尚有另一种极为重要的“乘法”运算，叫做“复合”. 它不仅适用于函数，而且同样适用于映射.

设 f 是一映射，定义域为 A，F 是任一集合，记

$$f^{-1}(F)=\{x\in A:\ f(x)\in F\},$$

它叫做 F 关于 f 的逆像. 例如，若

$$f(x)=x^2,\quad x\in R,$$

则

$$f^{-1}(R)=f^{-1}([0, +\infty))=R,$$

$$f^{-1}([-2,2])=f^{-1}([0, 2])=[-\sqrt{2},\sqrt{2}],$$

$$f^{-1}((-\infty, 0)) = \varnothing.$$

定义 3 设有映射 $f: B \to C$，又映射 g 的定义域为 A. 当 $x \in A_1 = g^{-1}(B)$ 时定义

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)),$$

则 $f \circ g$ 是一个由 A_1 到 C 中的映射(图 6)，叫做 f 和 g 的**复合**，它的定义域是 $A_1 \subset A$.

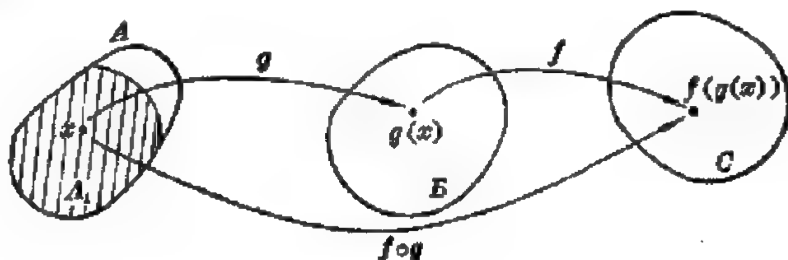


图 6

例 2 设

$$g(x) = x^2, \quad x \in R; \quad f(u) = \log u, \quad u > 0.$$

求复合函数 $f \circ g$.

解 当 $x \neq 0$ 时 $g(x) > 0$，这时 $g(x)$ 才在 f 的定义域 $B = (0, +\infty)$ 内，所以 $A_1 = g^{-1}(B) = \{x \in R: x \neq 0\}$，这是复合函数 $f \circ g$ 的定义域. 当 $x \in A_1$ 时

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \log x^2 = 2 \log |x|. \quad \square$$

例 3 设

$$F(x) = \sqrt{1 - x^2}, \qquad |x| \leqslant 1.$$

试视 F 为两个函数的复合.

解 令

$$f(u) = \sqrt{u}, \qquad u \geqslant 0;$$
$$u = g(x) = 1 - x^2, \qquad |x| \leqslant 1.$$

则 $F = f \circ g$. $\square$

例 4 设

$$F(x) = \log(1 + \sqrt{1 - x^2}) + 1, \quad |x| \leqslant 1.$$

试视F为三个函数的复合.

解 令

$$f(u)=1+\log u, \qquad u>0;$$
$$u=g(v)=1+\sqrt{v}, \qquad v\geqslant 0;$$
$$v=h(x)=1-x^2, \qquad |x|\leqslant 1.$$

则 $F=f\circ g\circ h$. □

定义 4 设有映射 f: $A\to B$. 如果当$x_1\neq x_2$时$f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称f为**一对一的**, f为一**单射**.

一对一的意义在于, f使得集合A的元素和集合$f(A)$的元素成一一对应.

例如, 在§1.2例1和例3中的函数均是一对一的. 函数f: $f(x)=x^2(x\in R)$不是一对一的, 因为$f(1)=f(-1)=1$.

定义 5 设有映射 f: $A\to B$. 记$B_1=f(A)$为f的值域. 如果有一个映射 g: $B_1\to A$ 使得

$$g\circ f(x)=x \tag{1}$$

对一切 $x\in A$成立, 又使得

$$f\circ g(y)=y \tag{2}$$

对一切 $y\in B_1$ 成立, 则说g是f的**逆射**(**反函数**).

定理 1 若f有逆射, 则f有唯一的逆射.

证明 设映射 f: $A\to B$ 有两个逆射g和h. 由(2)式,

$$f\circ h(y)=y$$

对一切 $y\in B_1=f(A)$成立. 所以

$$g\circ f\circ h(y)=g(y)$$

对一切 $y\in B_1$ 成立. 再由(1)式即得

$$h(y)=g(y)$$

对一切 $y\in B_1$ 成立, 即 $h=g$. □

由于逆射有唯一性, 因此, 若f有逆射, 我们就把逆射记

为f^{-1}.

定理 2 映射 f 有逆射的充分必要条件为 f 是一单射.

证明 (充分性) 设 f: $A\to B$ 是一单射. 任给 $y\in B_1=f(A)$, 则有唯一的 $x\in A$ 使 $f(x)=y$. 对此 y 定义(图 7) $g(y)=x$. 于是得一映射 g: $B_1\to A$. 显然 g 满足(1)式和(2)式, 所以是 f 的逆射.



图 7

(必要性) 设 f: $A\to B$ 有逆射 g. 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则

$$g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2).$$

由(1)式即得 $x_1=x_2$, 所以 f 是一对一的. □

例如, 在 § 1.2 例 1 中, f 是一对一的, 它有逆射 f^{-1}. 依图 7 有

$$f^{-1}(a)=b,\quad f^{-1}(b)=c,\quad f^{-1}(c)=a.$$

由定义 5, 如果 f: $A\to B$ 有逆射 f^{-1}, 则 f^{-1} 的定义域为 $B_1=f(A)$. 由(1)式容易看出 f^{-1} 的值域是 A, 即 $f^{-1}(B_1)=A$. 由(1)式和(2)式又容易看出 f^{-1} 有逆射 f, 即 $(f^{-1})^{-1}=f$.

从定理 2 及其证明我们可以看到, 欲知映射 f: $A\to B$ 是否有逆射, 只须看对于每一个 $y\in B_1=f(A)$ 方程

$$y=f(x)$$

在 A 中的解是不是唯一的. 如果是的话, 记解为

$$x=g(y),$$

则 g 便是逆射 f^{-1}. 否则没有逆射.

例 5 设

$$f(x)=\sqrt{x-1}+2,\qquad x\geqslant 1.$$

证明 f 有反函数，并求出其反函数 f^{-1}.

解 f 的值域是 $B_1=[2,+\infty)$. 对于每一个 $y\in B_1$，方程

$$y=\sqrt{x-1}+2$$

有唯一解

$$x=g(y)=y^2-4y+5.$$

g 便是反函数 f^{-1}，定义域是 $B_1=[2,+\infty)$.

映射的复合运算可以与数的乘法运算作一比较. 设 A 是任一集合. 显然，由 A 到 A 中的一切映射均可相互复合，复合后仍得由 A 到 A 中的映射. 对一切 $x\in A$ 定义

$$I_A(x)=x.$$

则 I_A 是由 A 到 A 上的映射，叫做 A 上的**恒等映射**. 设 f 是任一由 A 到 A 中的映射，则有

$$f\circ I_A=I_A\circ f=f.$$

这就好比数的运算:

$$a\cdot 1=1\cdot a=a.$$

I_A 就相当于数 1. 若 f 是一个由 A 到 A 上的单射，则由定理 1，f 有逆射 f^{-1} 满足(1)式和(2)式，即

$$f^{-1}\circ f(x)=x,\qquad f\circ f^{-1}(x)=x$$

对一切 $x\in A$ 成立，因此

$$f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=I_A.$$

这就好比数的运算:

$$a^{-1}\cdot a=a\cdot a^{-1}=1.$$

如果 f,g,h 都是由 A 到 A 中的映射，则显然有

$$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h,$$

即映射复合与数的乘法一样有结合律. 所不同的是，映射复合不像数的乘法有交换律. 同时，每一个非零的数均有倒数，而非每一个由 A 到 A 上的映射均有逆射. 但是，倘若记 $\mathscr{S}$ 为由 A 到 A 上的

全体单射，则 $\mathscr{S}$ 中的映射均有逆射，且 $I_A \in \mathscr{S}$. 在 $\mathscr{S}$ 中复合运算除交换律外就和数的乘法运算完全相似. 由以上的比较，我们自然就把映射(函数)的复合运算看作一种"乘法"运算.

我们再来看一元函数. 由定理 1 知道，一对一的函数有反函数. 有一类重要的一元函数具有一对一的性质.

定义 6 设 f 是一个一元函数，定义域为数集 $A \subset R$. 如果当 $x_1, x_2 \in A$ 且 $x_1 < x_2$ 时 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ ($f(x_1) \geqslant f(x_2)$)，则说 f 为**非减函数**(**非增函数**). 如果当 $x_1, x_2 \in A$ 且 $x_1 < x_2$ 时 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$)，则说 f 为**增函数**(**减函数**)或**严格增函数**(**严格减函数**). 两者统称为**单调函数**，后者又称**严格单调函数**.

显然，增函数和减函数都是一对一的.

定理 3 增(减)函数有反函数，而且反函数也是增(减)函数.

证明 设 $A \subset R$，f 为定义在 A 上的增函数. 设 $B = f(A)$. 因为 f 为一对一的，由定理 1，f 有反函数 f^{-1}: $B \to A$. 只须证 f^{-1} 也是增函数. (反证)设 f^{-1} 不是增函数，则存在 $y_1, y_2 \in B$，$y_1 < y_2$，而

$$f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2).$$

但 f 是增函数，所以

$$f(f^{-1}(y_1)) \geqslant f(f^{-1}(y_2)).$$

由(2)式便得 $y_1 \geqslant y_2$. 这是矛盾. 所以 f^{-1} 是增函数. □

例 6 设 $a > 0$. 令 $f(x) = a^x$，$x \in R$，则 f 是指数函数. 若 $0 < a < 1$，则 f 是减函数(参见图 9)，值域是 $(0, +\infty)$；若 $a > 1$，则 f 是增函数，值域仍是 $(0, +\infty)$. 因此，只要 $a > 0$，$a \neq 1$，指数函数 f 就有反函数 f^{-1}，它的定义域为 $(0, +\infty)$，值域为 R. 这个反函数正是我们在中学里即已熟知的对数函数 $\log_a$: $\log_a y = f^{-1}(y)$ ($y > 0$). 当 $0 < a < 1$ 时它是减函数，当 $a > 1$ 时它是增函数. 若 $y = a^x$，则 $x = \log_a y$；反之亦然.

最后，我们再研究一元函数的反函数图象问题.

设一元函数 f 有反函数，则方程

$$y=f(x) \tag{3}$$

和

$$x=f^{-1}(y) \tag{4}$$

自然是同一方程，在坐标平面上表示同一个点集. 但是，按习惯，f^{-1} 的图象是由方程

$$y=f^{-1}(x) \tag{5}$$

表示的点集，即自变量是第一个坐标，因变量是第二个坐标. 这个方程是由方程(4)经 x 和 y 互换而来的. 若点(a,b)满足方程(4)，则点(b,a)满足方程(5)；反之亦然. 但点(a,b)和点(b,a)关于直线 $y=x$ 对称(图 8)，所以方程(4)和(5)表示的点集也关于直线 $y=x$ 对称. 而方程(4)和(3)表示同一点集，因此函数 f 和 f^{-1} 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 也就是说，将函数 f 的图象绕直线 $y=x$ 旋转 180°即得反函数 f^{-1} 的图象.

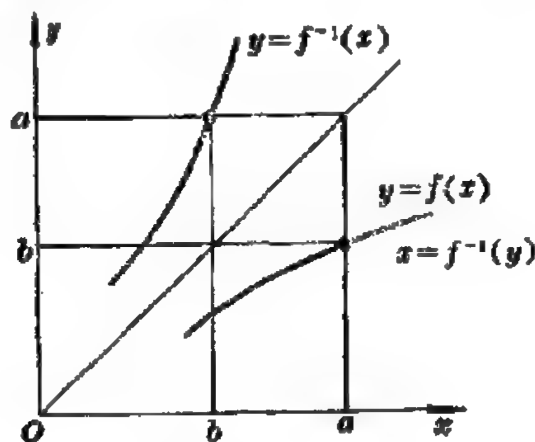


图 8

例如，我们可以先画出指数函数的图象，再应用上述方法画出对数函数的图象. 设 $a>1$. 因为当 x 无限增大时 a^x 也无限增大；当 $x<0$ 而无限减小时 a^x 无限接近于 0；又 $a^0=1$. 所以我们可以大致画出指数函数的图象 $y=a^x$(图 9). 对于 $0<a<1$ 的情形，同

样也可以画出它的图象. 将此图象绕直线 $y=x$ 旋转 180° 即得对数函数的图象 $y=\log_a x$(图 10).

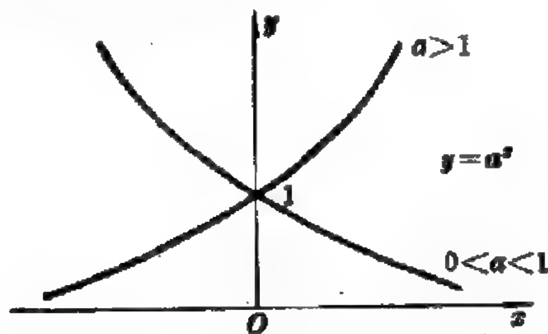


图 9

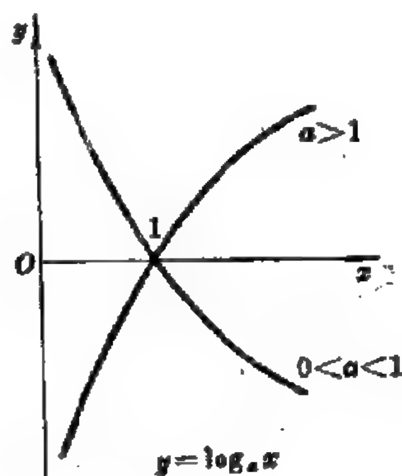


图 10

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 两个映射相等是什么意思?

(2) 函数的四则运算是如何定义的?

2. 求 $f+g$, fg 和 f/g, 并指出定义域. 设

(1) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x+1$.

(2) $f(x)=x^2$, $g(x)=2$.

(3) $f(x)=x+\log(1+x)$, $g(x)=x^2-1$.

(4) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$　　$g(x)=\begin{cases}0, & x>0,\\ 2, & x\leqslant 0.\end{cases}$

3. 设函数 f 的定义域为区间 I. 已知 f 的图象, 试作出函数 g 的图象. 设

(1) $g=-f$.　　(2) $g(x)=f(-x)$, $x\in I$.

(3) $g=f+c$, c 是常数.

(4) $g(x)=f(x+x_0)$, $x\in I$. x_0 是一定点.

(5) $g=af$, a 是常数.

(6) $g(x)=f(ax)$, $x\in I$, a 是常数.

(7) $g=|f|$, 其中 $|f|$: $|f|(x)=|f(x)|$, $x\in I$.

4. 证明: (1) 两个偶函数之积为偶函数.

(2) 两个奇函数之积为偶函数.

(3) 一个偶函数和一个奇函数之积为奇函数.

5. 设一函数的定义区间关于原点对称，证明它可以表示为一个偶函数与一个奇函数之和.

6. 回答下列问题:

(1) 映射的复合是如何定义的?

(2) 为什么说复合是映射的一种代数运算?

(3) 复合有无交换律?

7. 求逆像:

(1) 设 f 为 § 1.2 例 1 的函数. 求 $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}(\{a,b\})$.

(2) 设 $f(x)=\sqrt{x}, x\geqslant 0$. 求 $f^{-1}((0,2))$, $f^{-1}((-1,0])$.

(3) 设 $f(x)=x^2-3x+2$. 求 $f^{-1}((0,+\infty))$, $f^{-1}((-\infty,0))$, $f^{-1}(\{0\})$.

(4) 设 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, $x\neq 1$. 求 $f^{-1}((-\infty,0])$, $f^{-1}((-1,1))$, $f^{-1}(\{-1\})$.

(5) 设 $f(x)=10^x$. 求 $f^{-1}((-\infty,0])$, $f^{-1}([1,+\infty))$, $f^{-1}((0,1))$.

8. 求复合函数 $f\circ g$, 并指出定义域. 设 f 和 g 由下列式子定义:

(1) $f(u)=u^2-2u$, $g(x)=x+1$.

(2) $f(u)=\sqrt{u}$, $g(x)=x^2$.

(3) $f(u)=\sqrt{u}$, $g(x)=-x^2$.

(4) $f(x)=-x^2$, $g(x)=\sqrt{x^2-1}$.

(5) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x+\sqrt{x}$.

(6) $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$, $g(x)=x+\sqrt{x}$.

(7) $f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$.

(8) $f(x)=\log_a x$, $g(x)=a^x$.

9. 求 $f\circ g$ 和 $g\circ f$. 设

(1) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$.

(2) $f(x)=\min(0,x)$ (即取 0 和 x 中的最小者),

$$g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

10. 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f\circ f$, $f\circ f\circ f$, $f\circ f\circ\cdots\circ f$.

11. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2.\end{cases}$$

作出下列函数的图形:

(1) $\varphi\circ\varphi$. (2) $\varphi\circ\psi$. (3) $\psi\circ\varphi$. (4) $\psi\circ\psi$.

12. 问函数 F 可视为哪些函数的复合?设

(1) $F(x)=1+a^{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) $F(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$, $x\geqslant 0$.

(3) $F(x)=x^x$, $x>0$.

(4) $F(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1.\end{cases}$

13. 设 f: $A\to B$. 回答下列问题:

(1) g 为 f 的逆射是什么意思?

(2) 若 g 为 f 的逆射, 则 $g^{-1}=$?

(3) f 有逆射 g 的充分必要条件为何?再把这个条件用"解方程"的语言表达出来.

(4) 何种单调函数有反函数? 其反函数有何性质?

(5) 一元函数的图象与其反函数图象有何关系?

14. 讨论 f^{-1}. 设

(1) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

(2) $f(x)=10^{x+1}$.

(3) $f(x)=\log(ax+b)$, $a\neq 0$.

(4) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$.

(5) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0.\end{cases}$

(6) $f(x)=x^2$.

(7) $f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$.

(8) $f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$.

15. 试由上题(5)中的 f 画出其反函数的图象.

16. 设 f 是定义在 R 上的常值函数, R 上的什么函数 g 能使 $f\circ g=g\circ f$ 成立?

17. 设 f: $A\to A$, 证明 $f\circ g=g\circ f$ 对一切 g: $A\to A$ 成立的充分必要条件为 $f=I_A$.

18. 设 f: $A\to B$. 证明:

(1) 存在 g: $B\to A$ 使 $g\circ f=I_A$ 的充分必要条件为 f 是单射.

(2) 存在 h: $B\to A$ 使 $f\circ h=I_B$ 的充分必要条件为 f 是到 B 上的映射, 即 $f(A)=B$.

(3) 若(1)和(2)中的 g 和 h 都存在, 则 $g=h$.

19. 设 $a\in R$. 令 $f_a(x)=ax$, $x\in R$. 证明对一切 $a, b\in R$ 有

$$f_a\circ f_b=f_{ab},$$

$$f_a\circ f_1=f_1\circ f_a=f_a,$$

$$f_a^{-1}=f_{a^{-1}}.$$

因此, $f_a, f_b, \cdots$ 的复合运算就相当于数 $a, b, \cdots$ 的乘法运算.

20. 设 A 是 n 个元素所成的有限集.

(1) 当 n 为偶数时, 证明 A 有非恒等排列(§1.2 习题 20) f 使 $f\circ f(x)=x$ 对一切 $x\in A$ 成立.

(2) 当 n 为奇数时如何?

(3) A 一定有非恒等排列 f 使 $f\circ f\circ f\circ f\circ f\circ f\ (x)=x$ 对一切 $x\in A$ 成立.

§1.4 初等函数

所谓"初等函数"就是实用中常见的一些函数, 是我们在中学里已经熟悉的, 也是今后用来练习微积分演算的主要函数. 初等函数是由下列一些函数产生的:

1) 常值函数. 设 c 是一常数, 如果

$$f(x)=c \qquad (x\in R),$$

则 f 是一"常值函数"．这样的函数我们就简记为 c。

2）幂函数．设

$$f(x)=x^{\mu} \qquad (x>0),$$

其中 μ 是任一实数，则 f 是一幂函数．它的图象如图 11 和图 12 所示．

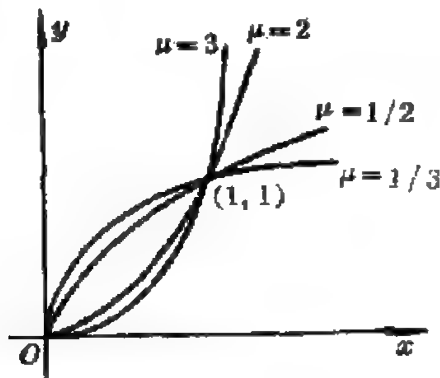


图 11

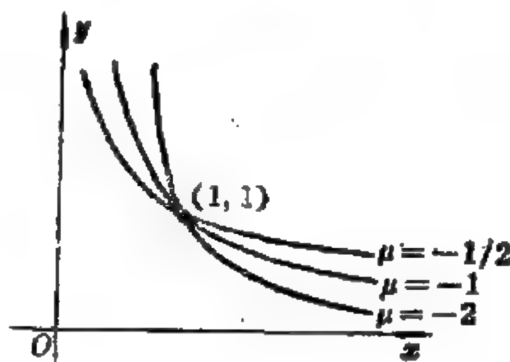


图 12

3）指数函数．设

$$f(x)=a^{x} \qquad (x\in R),$$

其中 a 是一个非负的数，则 f 是一指数函数．它的值域是 $(0, +\infty)$．图象如图 9 所示．

4）对数函数 $\log_a$，其中 $a>0$，$a\neq 1$．它是3）中的指数函数的反函数，定义域是$(0, +\infty)$，值域是 R．它的图象如图 10．

5）三角函数：

正弦函数 sin，定义域为 R，值域为$[-1, 1]$；

余弦函数 cos，定义域为 R，值域为$[-1, 1]$；

正切函数 tg，定义域为$\{x\in R:\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0, \pm 1, \cdots\}$，值域为 R；

余切函数 ctg，定义域为$\{x\in R:\ x\neq k\pi,\ k=0,\ \pm 1, \cdots\}$，值域为 R。

在分析学中，三角函数的角度单位除特别声明外，一律采用弧度制．例如，$\sin x$ 实际上是 sin（x 弧度）．为什么要采用弧度制，

这个道理将在第二章 §1.2(例 4) 中看到. 三角函数的图象已在中学里学习过, 现再列出如下(图 13—16).

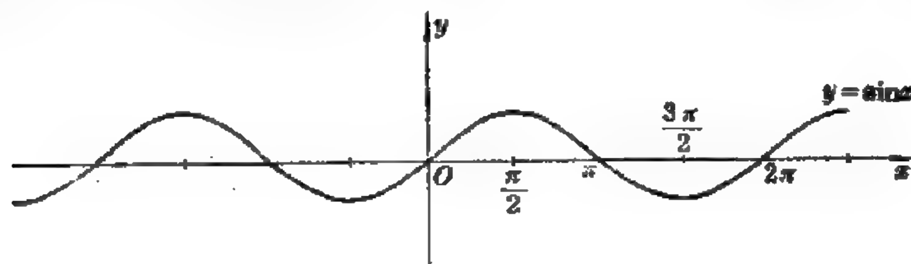


图 13

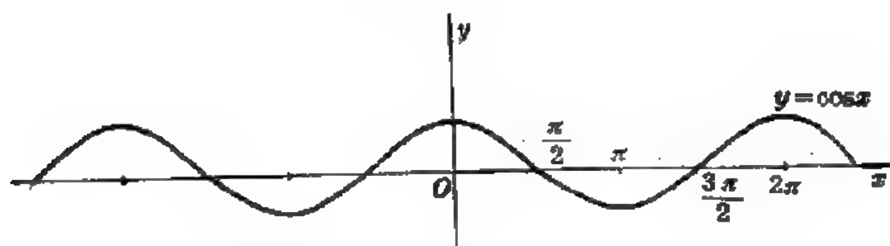


图 14

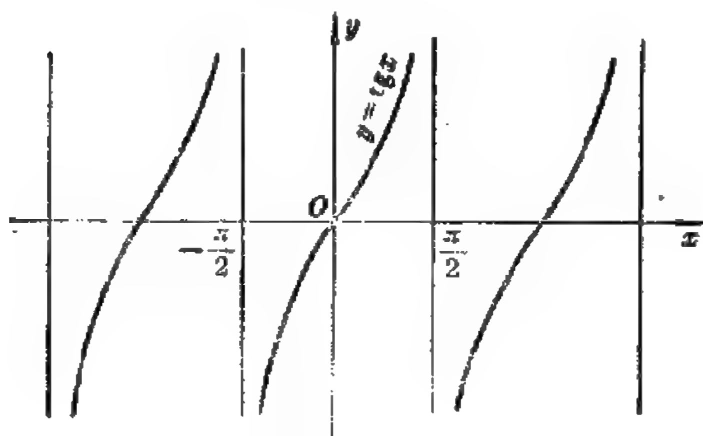


图 15

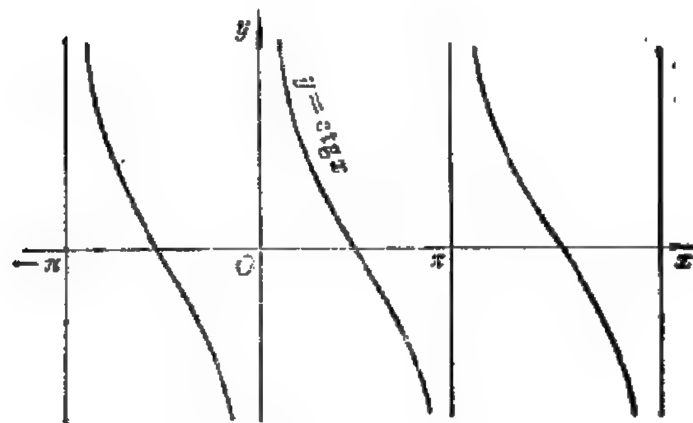


图 16

6）反三角函数：

反正弦函数 arc sin，定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$；

反余弦函数 arc cos，定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$；

反正切函数 arc tg，定义域为 R，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$；

反余切函数 arc ctg，定义域为 R，值域为$(0,\pi)$。

反正弦函数 arc sin 是正弦函数 sin 的反函数，但后者的定义域限制为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，这时值域仍是$[-1,1]$。所以 arc sin 的定义域是$[-1,1]$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。同法得其余三个反三角函数。它们的图象可由三角函数的图象绕直线 $y=x$ 旋转 180°而得（图 17—20）。

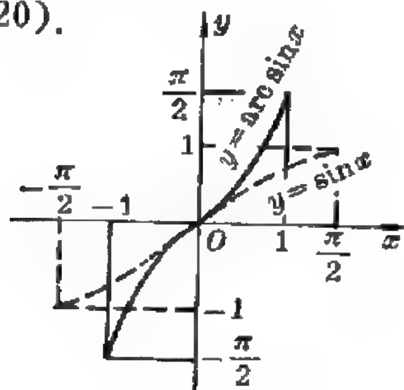


图 17

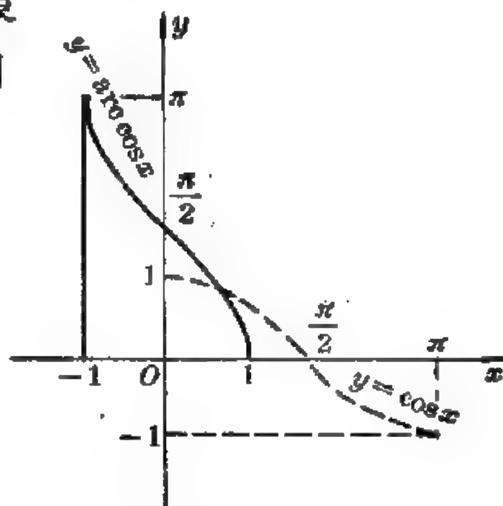


图 18

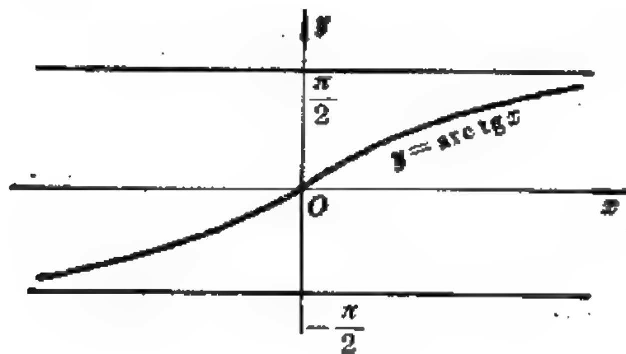


图 19

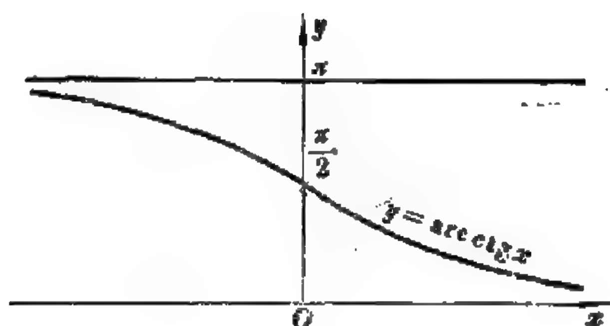


图 20

以上六种函数通称基本初等函数. 凡是由若干基本初等函数经有限次四则运算和有限次复合而成的函数都叫做初等函数.

例 1 设

$$f(x)=\frac{x^3+x+1}{x^2-3x+2}, \qquad x\neq 1, 2.$$

则 f 是一初等函数，这是因为它是由幂函数和常值函数经有限次四则运算而来的. 一般地，有理函数 R:

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

是初等函数，其中系数 $a_0, b_0, \cdots, a_n, b_m$ 是实数，n, m 是自然数.

例 2 设

$$f(x)=\sin\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \qquad |x|>1.$$

则 f 是初等函数，这是因为它是由下列式子定义的初等函数:

$$g(w)=\sin w,\ h(u)=\sqrt{u} \quad (u\geqslant 0),\ \ p(x)=\frac{x+1}{x-1} \quad (x\neq 1)$$

复合而成的.

例 3 设 $f(x)=x^x$ $(x>0)$，证明 f 是一初等函数.

证明 任取 $a>0, a\neq 1$，则

$$f(x)=x^x=a^{x\log_a x}, \qquad x>0.$$

所以 f 是由指数函数和初等函数 g:

$$g(x)=x\log_a x \qquad (x>0)$$

复合而成的，故仍是初等函数. □

但是，**如符号函数** sgn:

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}\tag{1}$$

就不是初等函数. 它是由常值函数 1, 0, -1 分段拼成的，非由这些函数经有限次初等运算而成的.

最后，我们注意到，正弦和余弦函数对一切 $x\in R$ 有

$$\sin(x+2\pi)=\sin x,\qquad \cos(x+2\pi)=\cos x.$$

这种性质通称为"周期性".

一般地，如果一元函数 f 具有性质：有常数 l 使得

$$f(x)=f(x+l)\tag{2}$$

对一切 $x\in R$ 成立，则称 f 为一**周期函数**，l 是它的一个**周期**.

由(2)式可以进一步得到

$$f(x)=f(x\pm l)=f(x\pm 2l)=\cdots=f(x\pm nl)$$

对一切 $x\in R$ 成立. 也就是说，若 l 是函数 f 的一个周期，则 nl (n 为正、负整数)也是它的周期. 因此，对于一个周期函数我们就要问，它有没有一个最小的正周期？例如，函数 sin 和 cos 的最小正周期就是 2π. 再如，Dirichlet 函数 D:

$$D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为有理数},\\ 1, & x\text{ 为无理数}\end{cases}\tag{3}$$

也是周期函数，一切有理数都是它的周期，它当然没有最小的正周期.

对于一个周期函数，如果 l 是它的一个最小正周期，那么我们只要在任意一个长度为 l 的区间上讨论它的性质就可以了. 例如，如果我们画出了它在区间$[0, l)$上的图象，则就知道了它在整个数轴 R 上的图象(图 21).

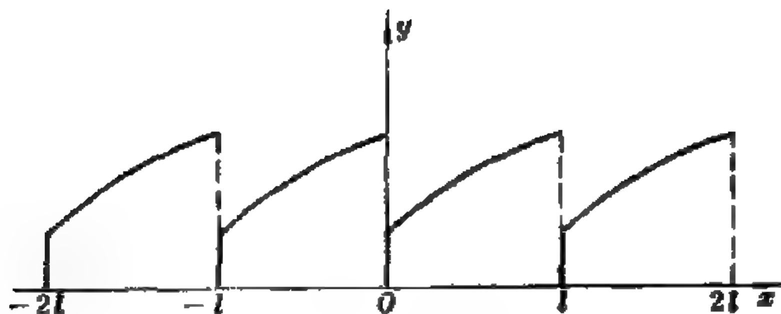


图 21

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 哪些函数是基本初等函数？并指出它们的定义域、值域和图象.

(2) 在分析学中，三角函数通常采用什么角度单位？$\sin 30=\frac{1}{2}$，$\operatorname{tg} 45=1$，对否？

(3) 指数函数的底有何限制？对数函数的底有何限制？

(4) 何谓初等函数？

(5) 初等函数经有限次四则运算和复合是否还得初等函数？

2. 由下列式子定义的函数 f 是否为初等函数？

(1) $f(x)=\cos^2(3x+2)$.

(2) $f(x)=\sqrt{\frac{1+\sin x^2}{1-\cos x^2}}$.

(3) $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

(4) $f(x)=(\arccos x)^x$.

(5) $f(x)=|x|$.

(6) $f(x)=[x]$.

(7) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x>0,\\ x, & x\leqslant 0.\end{cases}$

(8) $f(x)=\operatorname{sgn}|x|+g(x)$，其中 $g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

3. 作出函数 f 的图形. 设

(1) $f(x)=|\sin x|$.　　　(2) $f(x)=\sin^2 x$.

4. 何谓周期函数？周期函数是否都有最小正周期？

5. 设周期函数 f 有最小正周期 l. 证明 f 的一切周期 $T=\pm nl$, 其中 n 为自然数.

6. 求函数 f 的最小正周期. 设

(1) $f=\sin$.　　　　(2) $f(x)=a\cos lx+b\sin lx$.

(3) $f(x)=|\sin x|$.　　　　(4) $f(x)=\sin^2 x$.

(5) $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$.

7. 设 $f(x)=\sin x^2$, 证明 f 非周期函数.

8. 设函数 f 和 g 分别有周期 T_1 和 T_2, 且 T_1/T_2 是有理数. 证明 $f+g$ 和 fg 都是周期函数.

9. 设 $f(x+T)=kf(x)$ 对一切 $x\in R$ 成立, 其中 T 和 k 是两个正数. 证明 $f(x)=a^x\varphi(x)$ 对一切 $x\in R$ 成立, 其中 a 为常数, φ 是周期为 T 的函数.

10. 设 $a<b$. 证明:

(1) 若 f 的图象关于直线 $x=a$ 对称, 也关于直线 $x=b$ 对称, 则 f 是周期函数.

(2) 若 f 的图象关于直线 $x=a$ 对称, 也关于点 (b, y_0) 对称, 则 f 是周期函数.

(3) 若 f 的图象关于点 (a, y_0) 对称, 也关于点 (b, y_1) 对称, 则

$$f(x)=\varphi(x)+Cx, \qquad x\in R,$$

其中 φ 是一周期函数, C 是常数. 特别当 $y_0=y_1$ 时 $C=0$.

第二节　数列极限

§2.1　数列极限的概念

微积分学大体上可以说是由两类问题产生的: 求"瞬时速度"和求"曲边三角形"的"面积". 这两类问题产生了微积分的两种运算: "微分"运算和"积分"运算. 而这两种运算又都是用"极限"运算来定义的. 所以极限运算是微积分学(以至整个分析学)的基本运算. 为了便于学习, 我们先从"数列"极限开始.

先看一个具体例子: 计算由抛物线 $y=x^2$, Ox 轴和直线 $x=1$ 围成的曲边三角形 OAB(图 22)的"面积". 在中学里, 我们可以由

矩形的面积算出如三角形，平行四边形，梯形等直线形的面积．但现在这个图形有一曲边，我们不能用初等数学中的方法，把它划分为有限个直线形来计算．但我们却可运用“极限”方法把它转化为计算直线形的面积．远在纪元前三世纪，希腊人 Archimedes 就已用这样的方法算出了它的“面积”．

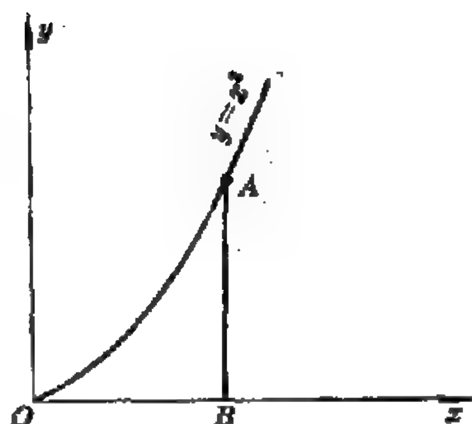


图 22

下面我们的算法与古希腊人相似．将 OB 边（区间 $[0,1]$）等分成 n 个小区间：

$$\left[0,\frac{1}{n}\right],\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right],\cdots,\left[\frac{n-1}{n},1\right],$$

它们的长度都是$\frac{1}{n}$．以这些小区间为底边，分别以

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

为高，如图 23 作成 n 个矩形．这 n 个矩形的面积之和是

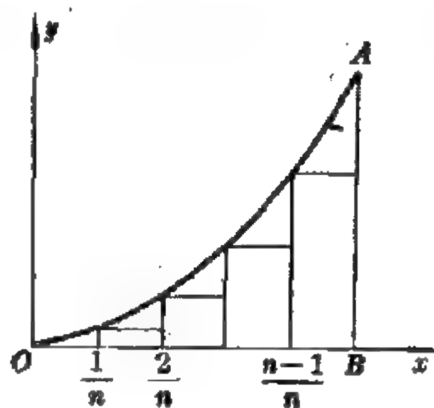


图 23

$$\begin{aligned}A_n&=0\cdot\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1}{n^3}[1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]\\&=\frac{1}{n^3}\ \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6n^2}-\frac{1}{2n}\right).\end{aligned}\tag{1}$$

由图 24可以看到，A_n 与曲边三角形 OAB 的“面积”相差不超过边长为$\frac{1}{n}$和 1 的矩形面积，即不超过$\frac{1}{n}$．于是，分之越细，即 n

越大，A_n 与OAB的面积相差也就越小，A_n越接近于OAB的面积. 而由(1)式可见，n 越大，A_n 越接近于$\frac{1}{3}$. 因此所求 OAB 的"面积"应是$\frac{1}{3}$.

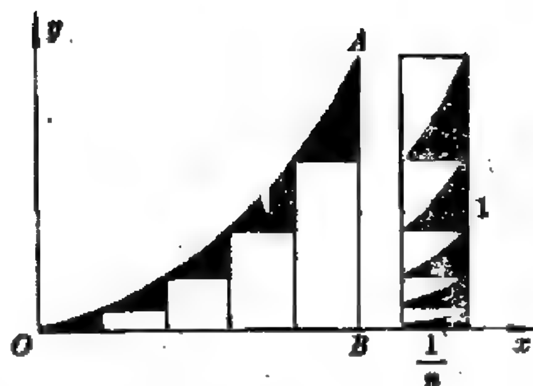


图 24

古代希腊人把这样的方法叫做"穷竭法"，这可以说是微积分思想的最早萌芽了.

上例中的 A_n $(n=1, 2, \cdots)$ 也就是一个"数列". 所谓一个数列，就是一串按序排列的数

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, \tag{2}$$

其中 a_1 叫做数列的**第一项**，a_2 叫做**第二项**，…. 令

$$f(n)=a_n, \qquad n=1, 2, \cdots,$$

则 f 是一个定义在自然数集N上的函数. 由此可见，一个数列就相当于一个定义在自然数集N上的函数. 我们也把数列 (2)记为 a_n. $(n=1, 2, \cdots)$或$(a_n)_{n=1}^{\infty}$，或简记为(a_n).

例如：

$a_n=\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \cdots)$是一个数列，它的顺次各项是

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots.$$

$a_n=\frac{(-1)^n n}{1+n}$ $(n\in N)$也是一个数列，它的顺次各项是

$$-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \cdots.$$

$a_n=(-1)^n$ $(n\in N)$也是一个数列，它的各项是

$$-1, 1, -1, \cdots.$$

我们看到，当 n 无限增大时(1)中的 A_n 无限接近于$\frac{1}{3}$. 我们说，$\frac{1}{3}$是数列(A_n)的"极限". 一般，数列极限的概念可以描述如下：

设有数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$. 如果当 n 无限增大时，a_n 无限接近某个定数 a，我们就把数 a 叫做数列(a_n)的"极限". 所以，数列的极限表明了数列的变化趋向，变化的归宿.

例如，数列$\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$的极限可以看出是 0；数列$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$的极限也是 0；而数列

$$\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}, \qquad n=1, 2, \cdots$$

的极限可以看出是 1.

但是，上面所讲数列极限的概念，只是描述性质的. 它经不起推敲，不能满足数学严格论证的需要. 因为，什么叫"无限增大"？什么叫"无限接近"？这些话是非常含糊的. 一旦要用它们来进行深刻的推理，这些话就成了问题. 如果我们停留在这样的概念上，那是不能建立理论的. 所以我们必须将上面描述性的极限概念进一步确切化，用明白无疑的数学语言，给数列极限下一个正式的定义.

所谓数列 $a_n(n=1, 2, \cdots)$当 n 无限增大时无限接近一数 a，要进一步明确其意，那就是，以 a 为中心，以任意长 ε 为半径，画出一个小区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$(图 25)，当 n 大到一定程度以后，也就是说，当 n 大于某一自然数以后，a_n 皆落入小区间内. 若小区间再小，只要 n 大到更大的程度以后，a_n 又都落入小区间内. 不管小区间多么小，都是如此. 因此我们给出数列极限的确切定义如下：

定义 1 设有数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$. 如果有一个数 a，对于每一个不

管怎样小的正数 ε，都相应地存在一个自然数 n_ε（它随 ε 而变动），只要 $n>n_\varepsilon$ 便有（图 25）

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$



图 25

也就是说，只要 $n>n_\varepsilon$ 便有

$$|a_n-a|<\varepsilon,$$

则说数 a 为数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ 的极限．记为

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=a,$$

或简记为

$$\lim a_n=a.$$

也可以记为

$$a_n\to a \qquad (n\to+\infty),$$

或简记为

$$a_n\to a.$$

最后两种记法可以分别读成为"当 n 趋向 $+\infty$ 时 a_n 趋向于 a"和"a_n 趋向于 a"．

简言之，$\lim a_n=a$ 的意思是：任给 $\varepsilon>0$，存在 $n_\varepsilon\in N$，当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

理解这个定义，重要在"任给"和"存在"二词．正数 ε 是任意的，相应于 ε 一定要存在自然数 n_ε．也就是说，对于每一个正数 ε 都要存在一个自然数 n_ε．随着不同的 ε 可以有不同的 n_ε，但一定要存在．先看一些例子．

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$

证明 任给 $\varepsilon>0$. 随意取一个比 $\frac{1}{\varepsilon}$ 大的自然数 n_ε，则当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\frac{1}{n_\varepsilon}<\varepsilon.$$

按定义，这就是说数列 $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ 的极限是 0. □

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5n^3}{1+2n^3}=\frac{5}{2}$.

证明 任给 $\varepsilon>0$. 因为

$$\left|\frac{5n^3}{1+2n^3}-\frac{5}{2}\right|=\frac{5}{2(1+2n^3)}<\frac{5}{4n^3}<\frac{5}{n},$$

所以只要取一自然数 $n_\varepsilon>\frac{5}{\varepsilon}$，则当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$\left|\frac{5n^3}{1+2n^3}-\frac{5}{2}\right|<\frac{5}{n}<\frac{5}{n_\varepsilon}<\varepsilon. \quad □$$

例 3 证明 $\lim\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}=\frac{3}{2}$.

证明 因为

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{5}{4\sqrt{n}-2}\leqslant\frac{5}{4\sqrt{n}-2\sqrt{n}}<\frac{5}{\sqrt{n}}.$$

所以，任给 $\varepsilon>0$，只要取一自然数 $n_\varepsilon>\frac{25}{\varepsilon^2}$，则当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$\left|\frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-1}-\frac{3}{2}\right|<\frac{5}{\sqrt{n_\varepsilon}}<\varepsilon. \quad □$$

例 4 证明 $\lim\frac{1}{n^\alpha}=0 \quad (\alpha>0)$.

证明 任给 $\varepsilon>0$. 要使

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|=\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon,$$

只要 $n^\alpha>\frac{1}{\varepsilon}$，即只要 $n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$. 因此，只要取一自然数 $n_\varepsilon>$

$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$，则当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$\left|\frac{1}{n^\alpha}-0\right|<\varepsilon. \quad \square$$

例 5　证明 $\lim q^n=0$ （$|q|<1$）.

证明　因为 $|q|<1$，所以 $\frac{1}{|q|}>1$. 令

$$\alpha=\frac{1}{|q|}-1,$$

则 $\alpha>0$. 于是

$$(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2+\cdots+\alpha^n>n\alpha,$$

所以

$$|q^n-0|=|q|^n=\frac{1}{(1+\alpha)^n}<\frac{1}{n\alpha}.$$

因此，任给 $\varepsilon>0$，只要取一自然数 $n_\varepsilon>\frac{1}{\alpha\varepsilon}$，则当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$|q^n-0|<\frac{1}{\alpha n_\varepsilon}<\varepsilon. \quad \square$$

例 6　证明 $\lim a^{\frac{1}{n}}=1$ （$a>1$）.

证明　因为 $a>1$，所以 $a^{\frac{1}{n}}>1$. 令

$$\alpha_n=a^{\frac{1}{n}}-1,$$

则 $\alpha_n>0$. 于是

$$a=(1+\alpha_n)^n>n\alpha_n,$$

所以

$$\alpha_n<\frac{a}{n}.$$

因此，任给 $\varepsilon>0$，只要取自然数 $n_\varepsilon>\frac{a}{\varepsilon}$，则当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$|a^{\frac{1}{n}}-1|=\alpha_n<\frac{a}{n_\varepsilon}<\varepsilon.\quad \square$$

对于数轴上任意一点 a，以 a 为中心，以任意长 ε 为半径的开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 都叫做点 a 的一个"邻域"或"附近"。

定理 1 数列 (a_n) 以数 a 为极限的充分必要条件是，对于 a 的任意一个邻域 Δ，(a_n) 中最多只有有限多项位于 Δ 的外边。

证明 （必要性） 由定义 1，显然。

（充分性） 任给 $\varepsilon>0$，则得 a 的一个邻域 $\Delta=(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$。根据假设，$(a_n)$ 中最多只有有限多项位于 Δ 的外边。设此有限项依次为 a_{n_1}，…，a_{n_k}。取 $n_\varepsilon=n_k$，则显然当 $n>n_\varepsilon$ 时 a_n 皆落入 Δ 之中，即

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

所以 (a_n) 以 a 为极限。 $\square$

以上我们建立了数列极限的概念，并通过若干例子证明了一些具体的数列的极限是某数。但是，并非任一数列都有极限，下面是一个典型例子。

例 7 证明数列 $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$ 无极限。

证明 我们先证任何数 $a\neq\pm1$ 都不是所给数列的极限。事实上，既然 $a\neq\pm1$，可作 a 的邻域 Δ 使得它不含 ±1，于是 $(-1)^n$ $(n\in N)$ 全部在 Δ 的外边，即 Δ 的外边有数列的无限多项，由定理 1，a 不是它的极限。再证 1 也不是它的极限。这是因为可作 1 的邻域 Δ_1 使得它不含 -1，于是 Δ_1 不含数列的无限多项 $(-1)^{2k-1}$ $(k=1, 2, \cdots)$，所以 1 也不是它的极限。同理 -1 也不是它的极限。由此可见它不以任何数为极限。 $\square$

定义 2 若数列 (a_n) 以一数 a 为其极限，则说 (a_n) 是收敛的，或 (a_n) 收敛于 a；反之则说 (a_n) 是发散的。

以上例 1 至例 6 都是收敛数列的例子，例 7 则是发散数列的

例子.

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 穷竭法与中学计算直线形面积的方法有何异同?

(2) 何谓数列? 数列相当于什么样的函数?

(3) 数列极限的直观描述为何? 它的严格定义为何?

(4) 如何用邻域的语言表达极限的概念?

(5) 数列是否都有极限?

(6) 何谓数列的收敛和发散?

2. 由定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{n}}=0$.　　(2) $\lim\dfrac{\sin n}{n}=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}0.\underbrace{9\cdots9}_{n\text{个}}=1$.　　(4) $\lim\dfrac{2n}{5n+3}=\dfrac{2}{5}$.

(5) $\lim\dfrac{3n^2+n}{2n^2+1}=\dfrac{3}{2}$.　　(6) $\lim\dfrac{n+(-1)^n}{n^2-1}=0$.

(7) $\lim\dfrac{\sqrt{n^3}\operatorname{arctg}n}{1+n^2}=0$.　　(8) $\lim\dfrac{5}{3+2^n}=0$.

(9) $\lim\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n}=0$.　　(10) $\lim\operatorname{arctg}n=\dfrac{\pi}{2}$.

(11) $\lim\dfrac{n!}{n^n}=0$.　　(12) $\lim\dfrac{a^n}{n!}=0$.

(13) $\lim\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$. 提示: 利用题(12).

3. 讨论下列数列的敛散性:

(1) $a_n=a$, $n=1,2,\cdots$,　　(2) $a_n=\cos n\pi$, $n\in N$.

(3) $a_n=a^n$, $n\in N$, $a>1$.

(4) $a_n=\begin{cases}n, & n=1,2,\cdots,1000,\\ \dfrac{1}{n-1000}, & n=1001,1002,\cdots.\end{cases}$

(5) $a_n=(-1)^n+\dfrac{1}{n}$, $n\in N$.

4. 设 $\lim a_n=a$. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+m}=a$. 并与 (a_n) 比较, $(a_{n+m})_{n=1}^{\infty}$ 是一个怎样的数列?

(2) 若 $b_n=a_n(n>m)$, 则 $\lim b_n=a$.

5. 若 $\lim a_n=a$, 则 $\lim|a_n|=a$. 反之对否?

6. 若 $a_n\in[0,1]$, $n\in N$, 且 $\lim a_n=a$, 则 $a\in[0,1]$. 能否把闭区间 $[0,1]$ 换成开区间 $(0,1)$?

7. 设 $\lim a_n=a$, $a>b$. 证明当 n 充分大时 $a_n>b$.

8. 设 $|b_n|\leqslant M$, $n\in N$; $\lim a_n=0$. 证明 $\lim a_nb_n=0$.

9. 设 (a_n) 是收敛的整数数列, 问 (a_n) 有何特点?

10. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{k\to+\infty}(\cos n!\pi x)^{2k}$, $x\in R$. 问 f 是一个怎样的函数? (分别考虑 x 为有理数和无理数的情形.)

11. 证明: $\lim a_n=a$ 的充分必要条件为 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k}=\lim\limits_{k\to+\infty}a_{2k-1}=a$.

12. 设数列 (a_n) 收敛, 证明 (a_n) 或者有最大的一项, 或者有最小的一项. 是否必定二者都有?

13. 回答下列问题:

(1) $\lim a_n=0\Longleftrightarrow\lim|a_n|=0$, 对否?

(2) $\lim a_n=a\Longleftrightarrow\lim|a_n-a|=0$, 对否?

(3) 对于每一个自然数 k, 存在自然数 n_k, 当 $n>n_k$ 时 $|a_n-a|<\frac{1}{k}$, 是否有 $\lim a_n=a$?

(4) 对于无穷多个 ε 存在自然数 n_ε, 当 $n>n_\varepsilon$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$, 是否有 $\lim a_n=a$?

(5) 对于每一个 $\varepsilon>0$, (a_n) 中都有无穷多项在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之中, 是否有 $\lim a_n=a$?

(6) 对于每一个自然数 k, (a_n) 中只有有限多项在 $\left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$ 之外, 是否有 $\lim a_n=a$?

14. 试表达"(a_n) 不以 a 为极限".

15. 试用穷竭法计算由曲线 $y=x^3$, 直线 $x=1$ 和 x 轴围成的曲边三角形面积.

§2.2 数列极限的基本性质

明确了极限概念以后，我们需要进一步弄清楚极限的基本性质。下面所讲的性质，虽然在直观上都是比较清楚的，但若要断言这些性质确实成立，符合极限定义，还需要从极限的定义出发进行严格论证.

定理1 若一数列有极限，则只有一个极限，即极限是唯一的.

证明 （反证）设数列(a_n)有两个极限a和b，$a\neq b$. 取$\varepsilon>0$足够小，例如取$\varepsilon=|a-b|/2$，使得a和b的两个邻域$\Delta_1=(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$和$\Delta_2=(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$不相交，即无公共点(图26). 因$a$是$(a_n)$的极限，由§2.1定理1，$\Delta_1$的外边最多只有$(a_n)$的有限多项. 特别，$\Delta_2$的内边最多只有$(a_n)$的有限多项，这与假设$b$是$(a_n)$的极限矛盾. □



图 26

定义1 若有一数M，使得$|a_n|\leqslant M$对一切$n=1, 2, \cdots$成立，则说数列(a_n)**有界**. 若有一数A，使得$a_n\leqslant A$ $(n=1, 2, \cdots)$，则说A是(a_n)的一个**上界**. 同样可定义(a_n)的**下界**.

显然，数列有界的充分必要条件是既有上界又有下界.

例如，数列$((-1)^n)$和$\left(\frac{1}{n}\right)$都是有界的，数列(n)有下界而无上界.

定理2 收敛数列有界.

证明 设数列(a_n)收敛，极限为a. 取$\varepsilon=1$，则有自然数n_1，当$n>n_1$时

$$|a_n|-|a|\leqslant|a_n-a|<1.$$

因此当 $n>n_1$ 时

$$|a_n|<|a|+1.$$

取 M 为 $|a_1|, \cdots, |a_{n_1}|, |a|+1$ 中之最大者:

$$M=\max(|a_1|, \cdots, |a_{n_1}|, |a|+1).$$

则易知 $|a_n|\leqslant M$ 对一切 $n\in N$ 成立, 即 (a_n) 有界. □

定理 3 (极限的四则运算) 设数列 (a_n) 和 (b_n) 都收敛, 则数列 $(a_n\pm b_n)$, (a_nb_n) 也都收敛; 如果又有 $\lim b_n\neq 0$, 则数列 (a_n/b_n) 也收敛. 且

1° $\lim(a_n\pm b_n)=\lim a_n\pm\lim b_n$;

2° $\lim a_nb_n=\lim a_n\cdot\lim b_n$,

特别

$$\lim ca_n=c\lim a_n,$$

其中 c 为常数(即与 n 无关的数);

3° $\lim\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$ $\quad(\lim b_n\neq 0)$.

证明 设 $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$.

1° 我们有

$$|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)|$$
$$=|(a_n-a)\pm(b_n-b)|\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|.$$

任给 $\varepsilon>0$, 由所设有自然数 n'_ε, 当 $n>n'_\varepsilon$ 时

$$|a_n-a|<\varepsilon/2;$$

又有自然数 n''_ε, 当 $n>n''_\varepsilon$ 时

$$|b_n-b|<\varepsilon/2.$$

于是, 当 $n>n_\varepsilon=\max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$ 时

$$|(a_n\pm b_n)-(a\pm b)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以

$$\lim(a_n\pm b_n)=a\pm b.$$

即证明了 1°.

2° 因为

$$
\begin{aligned}
&|a_nb_n-ab| \\
&\quad=|a_nb_n-ab_n+ab_n-ab|\leqslant|b_n||a_n-a|+|a||b_n-b|.
\end{aligned}
$$

而由定理2, (b_n)有界, 设$|b_n|\leqslant M(n\in N)$. 再取$A=\max(M, |a|)$, 则

$$|a_nb_n-ab|\leqslant A(|a_n-a|+|b_n-b|).$$

由假设, 任给 $\varepsilon>0$, 有自然数 n'_ε, 当 $n>n'_\varepsilon$ 时

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2A}.$$

又有自然数 n''_ε, 当 $n>n''_\varepsilon$ 时

$$|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2A}.$$

于是当 $n>n_\varepsilon=\max(n'_\varepsilon, n''_\varepsilon)$时

$$|a_nb_n-ab|<A\left(\frac{\varepsilon}{2A}+\frac{\varepsilon}{2A}\right)=\varepsilon.$$

所以

$$\lim a_nb_n=ab.$$

即证明了 2°.

3° 由 2°, 只须证明当 $b\neq0$ 时有

$$\lim\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}.$$

由假设, 有自然数 n', 当 $n>n'$ 时

$$|b|-|b_n|\leqslant|b-b_n|<\frac{|b|}{2}.$$

因此当 $n>n'$ 时$|b_n|>\frac{|b|}{2}$. 任给 $\varepsilon>0$, 又应有自然数 n'', 当$n>n''$ 时

$$|b_n-b|<\frac{b^2}{2}\varepsilon.$$

于是当 $n>n_\varepsilon=\max(n',n'')$ 时

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{b_n-b}{bb_n}\right|<\frac{2}{b^2}|b_n-b|<\varepsilon.\quad\square$$

例 1 求极限 $\lim\frac{5n^3}{1+2n^3}$.

解 由定理 3,

$$\lim\frac{5n^3}{1+2n^3}=\lim\frac{5}{\frac{1}{n^3}+2}=\frac{5}{2}.\quad\square$$

例 2 求极限 $\lim\frac{4n^2-n+1}{3n^3+2n^2-1}$.

解 $$\lim\frac{4n^2-n+1}{3n^3+2n^2-1}=\lim\frac{\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}}=\frac{0}{3}=0.\quad\square$$

一般地,当 k,l 为非负整数时有

$$\lim\frac{a_0n^k+a_1n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}n+a_k}{b_0n^l+b_1n^{l-1}+\cdots+b_{l-1}n+b_l}$$

$$=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0}, & 若\ k=l;\\ 0, & 若\ k<l.\end{cases}\tag{1}$$

证明留作习题.

例 3 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$.

解 $\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}.\quad\square$

例 4 证明当 $|q|<1$ 时有

$$\lim_{n\to+\infty}(1+q+\cdots+q^n)=\frac{1}{1-q}.$$

证明 由§2.1 例 5,

$$\lim(1+q+\cdots+q^n)=\lim\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}. \quad \square$$

定理 4 设 $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$, 且

$$a_n\leqslant b_n, \quad n=1,2,\cdots,$$

则 $a\leqslant b$.

证明 (反证)设 $a>b$. 由极限的定义, 有自然数 n', 当 $n>n'$ 时(图 27)

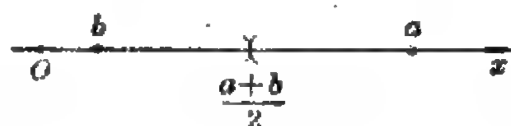


图 27

$$b_n<\frac{a+b}{2}<a_n.$$

这与定理的假设矛盾. □

注 若在定理 4 的假设中为严格不等式

$$a_n<b_n, \qquad n=1,2,\cdots,$$

则结论仍是 $a\leqslant b$, 而不能断言 $a<b$. 这只要看例子:

$$0<\frac{1}{n}, \qquad n=1,2,\cdots,$$

但

$$\lim 0=0=\lim\frac{1}{n}.$$

定理 5 设 $\lim a_n=\lim c_n=a$, 且

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n, \qquad n=1,2,\cdots,$$

则 $\lim b_n=a$.

证明 任给 $\varepsilon>0$, 由假设, 有自然数 n_ε, 当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon,$$

$$a-\varepsilon<c_n<a+\varepsilon.$$

因此, 根据假设, 当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$a-\varepsilon<a_n\leqslant b_n\leqslant c_n<a+\varepsilon.$$

所以

$$\lim b_n=a.\quad \square$$

例 5 求极限 $\lim(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})$.

解 因为对一切 $n\in N$ 有

$$0\leqslant\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}=\frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}\leqslant\frac{4}{\sqrt{n+3}}<\frac{4}{\sqrt{n}},$$

而

$$\lim 0=0=\lim\frac{4}{\sqrt{n}},$$

所以由定理 5 即得

$$\lim(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})=0.\quad \square$$

例 6 证明 $\lim\sqrt[n]{n}=1$.

证明 令

$$\alpha_n=\sqrt[n]{n}-1,$$

则 $\alpha_n\geqslant 0$, $n=1,2,\cdots$. 于是

$$n=(1+\alpha_n)^n=1+n\alpha_n+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2+\cdots$$
$$+\alpha_n^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2!}\alpha_n^2.$$

所以，当 $n>2$ 时有

$$0\leqslant\alpha_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}\leqslant\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

因此

$$\lim\alpha_n=0,$$

故

$$\lim\sqrt[n]{n}=1.\quad \square$$

例 7 求极限 $\lim\sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}$.

解 因为

$$\sqrt[n]{2}<\sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{3},\qquad n=1,2,\cdots,$$

由定理 5 和 § 2.1 例 6 便知所求极限为 1. □

定理 5 是求极限的基本方法,应注意逐步掌握.

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 数列极限的唯一性是什么意思?

(2) 数列有界和有上、下界的关系如何?

(3) 无界数列能否收敛? 有界数列是否一定收敛?

(4) 数列极限四则运算成立的条件是什么?

(5) 设 $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$.

1° 若 $a_n<b_n(n\in N)$, 则 $a<b$. 这是否正确?

2° 若 $a_n\leqslant b_n(n\in N)$, 则 $a\leqslant b$. 这是否正确?

3° 若 $a<b$, 则 (a_n) 和 (b_n) 有何关系?

(6) 用不等式求极限的方法是怎样的?

(7) 设 $a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$ 对一切 $n\in N$ 成立, 又 $\lim(c_n-a_n)=0$, (b_n) 是否收敛?

(8) 设 $a_n\leqslant x\leqslant c_n(n\in N)$, 且 $\lim(c_n-a_n)=0$, 则结论如何?

2. 回答下列问题:

(1) 若 (a_n) 和 (b_n) 都发散, 则 (a_n+b_n) 和 (a_nb_n) 的敛散性如何?

(2) 若 (a_n) 收敛, (b_n) 发散, 则 (a_n+b_n) 的敛散性如何?

(3) 若 $\lim a_n=a\neq0$, (b_n) 发散, 则 (a_nb_n) 的敛散性如何?

(4) 若 $\lim a_n=0$, (b_n) 发散, 则 (a_nb_n) 的敛散性如何?

3. 证明:

(1) 若 $\lim a_nb_n=0$ 且 (a_n) 收敛, 则 $\lim a_n=0$ 或 $\lim b_n=0$.

问: 若 $\lim a_nb_n=0$, 能否断定上述结论成立?

(2) 若 $\lim\frac{b_n}{a_n}=1$, 且 (a_n) 收敛, 则 (b_n) 收敛, 且 $\lim b_n=\lim a_n$.

问: 若 $\lim\frac{b_n}{a_n}=1$, 能否断定上述结论成立?

(3) 若 $\lim a_n = a \neq 0$, 则 $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

问: 若 $\lim a_n = 0$, 能否断定上述结论成立?

4. 求下列极限:

(1) $\lim \frac{2n+3}{n^2-n-2}$.

(2) $\lim \frac{n^2+n+2}{2n^3-3n^2+1}$.

(3) $\lim \frac{4n^2-5n+9}{6n^2-n+1}$.

(4) $\lim \frac{3n^3+1}{9n^3-n}$.

(5) $\lim \frac{\sqrt{n^2-n+1}}{2n+1}$.

(6) $\lim \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n-5n-1}{n-3}$.

(7) $\lim \frac{\sqrt{n}\,\mathrm{arctg}\,n-1}{\sqrt{n^2-n}}$.

(8) $\lim \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^n+3^{n+1}}$.

(9) $\lim \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$,

1° $|a|<1$, $|b|<1$; 2° $|b|>1$, $|b|>|a|$, $a\neq 1$.

(10) $\lim\left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$.

(11) $\lim \sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}$.

(12) $\lim \sqrt[n]{n^2-n+2}$.

(13) $\lim \sqrt[n]{2\sin^2 n+\cos^2 n}$.

(14) $\lim \sqrt[n]{\mathrm{arctg}\,n}$.

(15) $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

(16) $\lim \sqrt[n]{a^n+b^n}$ $(b\geqslant a\geqslant 0)$.

(17) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_m^n}$, $a_i\geqslant 0$, $i=1,\cdots,m$.

(18) $\lim(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

(19) $\lim(\sqrt{n^2+n}-n)$.

(20) $\lim \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$.

(21) $\lim(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[4]{n+1})$.

(22) $\lim \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

(23) $\lim[(n+1)^k-n^k]$, $0<k<1$.

(24) $\lim\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

(25) $\lim\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

(26) $\lim\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{1+2+\cdots+n}\right)$.

(27) $\lim(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})$, $|x|<1$.

(28) $\lim\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

(29) $\lim\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n}\right|$.

(30) $\lim\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$.

提示：$\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}<1$, $n=1,2,\cdots$.

5. 证明(1)式.

6. 设 $\lim a_n=a$, 证明 $\lim\frac{[na_n]}{n}=a$.

7. 设 $a>1$, $k>0$, 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$.

提示：先考虑 $k=1$, 再考虑 k 为正整数的情形.

8. 设 $p(n)$ 是能整除自然数 n 的素数个数, 证明 $\lim\frac{p(n)}{n}=0$.

提示：n 的每一个素数因子均 $\geqslant 2$.

9. 设 $\lim a_n=a$, 证明

$$\lim\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a.$$

10. 设 $\lim a_n=a$, $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明

$$\lim\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=a.$$

并由此证明:

(1) 若 $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$ $(a_n>0, n=1,2,\cdots)$, 则 $\lim\sqrt[n]{a_n}=a$.

(2) $\lim a^{\frac{1}{n}}=1$, $a>0$.

(3) $\lim\sqrt[n]{n}=1$.

(4) $\lim\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

11. 证明:

(1) 若 $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=r<1$, 则 $\lim a_n=0$.

(2) 若 $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r<1$, 则 $\lim a_n=0$.

12. 设 $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$, 证明

$$\lim\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}=ab.$$

13. 设 $\lim a_n=a$, 证明

$$\lim\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

14. 设 $\lim a_n=a$. 又当 $m,n\in N$ 时 $t_{mn}\geqslant 0$, $\sum\limits_{n=1}^{m}t_{mn}=1$, $\lim\limits_{m\to+\infty}t_{mn}=0$.

证明

$$\lim(t_{n1}a_1+t_{n2}a_2+\cdots+t_{nn}a_n)=a.$$

§2.3 极限∞·子列

在分析学中，除了通常的实数以外，我们不能不考虑“∞”. 所谓∞(读做“无穷”)，有+∞和−∞，而∞是+∞和−∞的通称. 我们在§1.2中已经指出，所谓+∞，意思是它比一切数都“大”；所谓−∞，意思是它比一切数都“小”. 也就是说，对于一切数 a 有

$$-\infty<a<+\infty.$$

我们重申：在微积分学里，“数”就是指通常的实数，不把∞看作数. ∞在数轴上也没有位置. 除个别情况(第四章)外，不对∞进行代数运算. 但为了避免混淆，我们有时也把通常的数叫做“有限数”，以别于∞. ∞在微积分学里的出现往往都是和极限相联系的.

定义1 设有数列 (a_n). 如果对于每一个任意给定的(正)数 A，都相应地存在一个自然数 n_A，当 $n>n_A$ 时

$$a_n>A,$$

则说数列 (a_n) 的极限为+∞. 记为

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty$$

或

$$a_n\to+\infty\qquad(n\to+\infty).$$

同样,如果任给(负)数 A,有自然数 n_A,当 $n>n_A$ 时

$$a_n<A,$$

则说(a_n)的极限为$-\infty$. 如果任给(正)数 A,有自然数 n_A,当 $n>n_A$时

$$|a_n|>A,$$

则说(a_n)的极限为∞.

我们看到,$\lim a_n=\infty$即$\lim|a_n|=+\infty$.

例 1 证明当 $a>1$ 时 $\lim a^n=+\infty$.

证明 记 $a=1+\alpha$, $\alpha>0$. 则

$$a^n=(1+\alpha)^n>1+n\alpha.$$

显然,任给(正)数 A,只须取一自然数

$$n_A>\frac{A-1}{\alpha},$$

则当 $n>n_A$ 时 $a^n>A$. 故得证. □

显然, $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n=-\infty$.

下一定理中给出的一些事实都是显然的, 列举出来只是引起大家注意,但不要死记.

定理 1

1° 若 $a_n\geqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$, 而 $\lim b_n=+\infty$, 则 $\lim a_n=+\infty$.

2° 若 $\lim a_n=+\infty$, $\lim b_n=+\infty$, 则 $\lim(a_n+b_n)=+\infty$.

3° 若 $\lim a_n=a$, $\lim b_n=\pm\infty$, 则 $\lim(a_n+b_n)=\pm\infty$.

4° 若 $\lim a_n=a>0$, $\lim b_n=\pm\infty$, 则 $\lim a_nb_n=\pm\infty$.

5° 若 $\lim a_n=+\infty$, 则 $\lim(-a_n)=-\infty$; 反之亦然.

6° 若 $\lim a_n=\infty$, 则 $\lim\frac{1}{a_n}=0$; 反之亦然.

证明 我们只证明 4° 中的其中一个,余下的都作为练习. 设

$\lim a_n = a > 0$, $\lim b_n = +\infty$. 任给正数 A. 取一数 r 满足 $0 < r < a$. 则由假设有自然数 n_A, 当 $n > n_A$ 时

$$a_n > r, \quad b_n > \frac{A}{r},$$

因此

$$a_n b_n > A.$$

所以

$$\lim a_n b_n = +\infty. \quad \square$$

例 2 证明 $\lim \frac{2n^2+n+1}{2n-2} = +\infty$.

证明 由定理 1 的4°,

$$\lim \frac{2n^2+n+1}{2n-2} = \lim n \cdot \frac{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{2}{n}} = +\infty. \quad \square$$

一般地, 若 $k > l$, 则

$$\lim \frac{a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \cdots + a_{k-1} n + a_k}{b_0 n^l + b_1 n^{l-1} + \cdots + b_{l-1} n + b_l} = \infty \tag{1}$$

(参见 § 2.2(1)).

注 有了极限∞以后, 我们应特别注意区分“收敛”和“有极限”. 数列(a_n)收敛是说有一数为其极限, 也就是说它有有限的极限. 而数列(a_n)有极限则可以是以∞为极限. 若(a_n)以∞为极限, 则(a_n)显然无界, 因此由 § 2.2 定理 2 知, (a_n)发散. 所以有极限不就是收敛, 有有限的极限才是收敛.

从一个数列(a_n)中我们可以顺次选出一部分项来, 得一新的数列, 叫做(a_n)的一个“子列”. 例如, 选出全部奇数项可得一数列

$$a_1, a_3, a_5, \cdots,$$

就是(a_n)的一个子列. 这个子列显然可以表示为 a_{2k-1} $(k=1, 2, \cdots)$. 同样, a_{2k} $(k=1, 2, \cdots)$也是(a_n)的一个子列, 它是由(a_n)的

偶数项组成的. 再如

$$a_1, a_5, a_9, a_{13}, \cdots$$

也是(a_n)的一个子列, 它可表为 a_{4k+1} $(k=0, 1, \cdots)$.

下面我们给出子列的定义.

定义 2 设有数列(a_n), 又 n_k $(k=1, 2, \cdots)$是一自然数数列, 且

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots, \tag{2}$$

则数列 a_{n_k} $(k=1, 2, \cdots)$叫做(a_n)的一个**子列**.

例如, 若 $n_k=2k-1$ $(k=1, 2, \cdots)$, 则得子列$(a_{2k-1})_{k=1}^{\infty}$. 若 $n_k=4k$ $(k\in N)$, 则得子列(a_{4k}). 但若 $n_k=2+(-1)^k$ $(k\in N)$, 则(a_{n_k})虽是一数列, 不是(a_n)的子列.

我们注意到, 对于自然数数列(2)必然有

$$n_k \geqslant k, \qquad k=1, 2, \cdots. \tag{3}$$

定理 2 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a(\infty, \pm\infty)$, 则对一切子列$(a_{n_k})$均有 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = a(\infty, \pm\infty)$.

证明 设 $\lim a_n = a$. 任给 $\varepsilon>0$, 则有自然数 k_ε, 当 $n>k_\varepsilon$ 时

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

设(a_{n_k})是其任一子列, 则由(3), 当 $k>k_\varepsilon$ 时 $n_k \geqslant k > k_\varepsilon$, 因此当 $k>k_\varepsilon$ 时

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

即$\lim a_{n_k} = a$. 同样可以证明极限为∞, $\pm\infty$的情形(习题). □

例 3 证明数列$((-1)^n)$无极限.

证明 因为

$$(-1)^{2k} = 1 \to 1, \quad (-1)^{2k-1} = -1 \to -1.$$

由定理 2, 若$((-1)^n)$有极限, 则子列$((-1)^{2k})$和$((-1)^{2k-1})$应有同一极限, 故$((-1)^n)$无极限. □

例 4 证明数列$(\sin n)$无极限.

证明 设 k 为任一自然数. 因为区间$\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}, 2k\pi+\frac{3}{4}\pi\right)$的长度为$\frac{\pi}{2}>1$, 所以其中必有一自然数 n_k. 同样, 在区间$((2k-1)\pi, 2k\pi)$ 中必有一自然数 n'_k. 显然(n_k) 和 (n'_k)是两个满足(2)的数列. 又

$$\sin n_k>\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin n'_k<0, \quad k=1, 2, \cdots.$$

这两个子列不可能有同一极限, 故$(\sin n)$无极限. □

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 极限$+\infty$, $-\infty$ 和 ∞ 各是什么意思?

(2) 极限(包括有限的极限和无穷极限)是否有唯一性?

(3) 设 $\lim a_n=+\infty, \lim b_n=-\infty$, 则是否一定有 $\lim(a_n+b_n)=0$?

(4) 设 $\lim a_n=0, \lim b_n=+\infty$, 则是否一定有 $\lim a_n b_n=0$? 是否一定有 $\lim a_n b_n=\infty$?

(5) 设 $\lim a_n=\lim b_n=+\infty$, 则是否一定有 $\lim\frac{a_n}{b_n}=1$?

(6) 怎样表达 $a_n \nrightarrow +\infty$(即(a_n)不以$+\infty$ 为极限)?

(7) 有极限的数列是否都收敛? 发散数列是否都以∞为极限?

2. 用定义证明:

(1) $\lim\sqrt{n-\sqrt{n}}=+\infty$.　　(2) $\lim\frac{n^2-n+1}{5n-2}=+\infty$.

(3) $\lim\frac{n^2+1}{1-2n}=-\infty$.　　(4) $\lim\frac{1-(-1)^n n}{2\sqrt{n}-3}=\infty$.

3. 证明定理 1 的未证部分.

4. 证明(1)式.

5. 证明:

(1) 若 $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=r>1$, 则 $\lim a_n=\infty$.

(2) 若 $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=r>1$, 则 $\lim a_n=\infty$.

6. 设 $\lim a_n=+\infty$, 证明 $\lim\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=+\infty$.

7. 设 $\lim a_n=+\infty$, $a_n>0(n=1,2,\cdots)$, 证明 $\lim\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=+\infty$.

8. 回答下列问题:

(1) 何谓子列?

(2) 设 $n_k=(-1)^k+2$, $k\in N$, 则(a_{n_k})是不是(a_n)的子数列?

(3) 设(n_k)是任一自然数数列, 若 $\lim a_n=a$, 则是否一定有 $\lim a_{n_k}=a$?

(4) 设(n_k)是定义 2 中的自然数数列, 则 $\lim n_k=$?

9. 设 $\lim a_n=a$, (n_k)是一自然数数列, 且 $\lim n_k=+\infty$, 则 $\lim a_{n_k}=a$.

10. 设 $\lim a_n=+\infty$, 则一切子列 $a_{n_k}\to+\infty$.

11. 设数列(a_n)无上界, 则有子列 $a_{n_k}\to+\infty$.

12. 证明 $\lim a_n=\infty$ 的充分必要条件为一切子列都无界.

13. 设 (a_n) 有两个子列 $(a_{n'_k})$ 和$(a_{n''_k})$, 并起来就是整个数列(a_n), 又 $\lim a_{n'_k}=\lim a_{n''_k}=a$. 证明 $\lim a_n=a$.

14. 证明, 对于一切 $a\in[0,1]$, 数列

$$1,\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \cdots$$

均有收敛于 a 的子列.

15. 证明以下数列无极限:

(1) $(-1)^n+\frac{1}{n}$, $n\in N$.

(2) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$, $n\in N$.

(3) 题 14 中的数列.

(4) $\frac{(-2)^n+1}{2^{n+1}-3}$, $n\in N$.

§ 2.4 单调数列

在 § 1.1 中我们已经着重指出, 直线有连续性, 因而实数也应有相应的"连续性". 这对于分析学是至关重要的问题. 在第四章

中我们要从实数自身(不依赖于几何直线)来发现这种"连续性".我们将会发现,它包含了一连串相互等价的命题.人们把这些命题都称之为实数的"连续性".这些命题是整个分析学赖以建立的基础.现在我们先叙述实数连续性命题中的一个命题,到第四章§1.2中再作证明.这一个命题是用"单调数列"来表达的,它在形式上乍看起来与直线的连续性(§1.1)似不一样,读者可以暂勿深究,到第四章中自会明白.

设有数列(a_n).如果它相应于一个非减(非增)的函数,也就是说,当$m,n\in N$且$m<n$时$a_m\leqslant a_n(a_m\geqslant a_n)$,则说$(a_n)$是非减(非增)数列.同样理解数列的严格增(严格减).非减(非增)和严格增(严格减)数列统称单调数列.下面就是一个用单调数列表达的实数连续性命题.

定理1 非减(非增)有上(下)界的数列收敛.

在下面§2.6中我们将会看到单调有界的有理数数列收敛于无理数的一个重要例子.事实上,任一无理数a都是一个单调有理数数列(a_n)的极限:不妨设

$$a=\alpha.\alpha_1\alpha_2\cdots>0.$$

令

$$a_n=\alpha.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n,\quad n\in N.$$

则(a_n)是非减的有理数数列,且

$$a-a_n=0.0\cdots0\alpha_{n+1}\cdots\leqslant\frac{1}{10^n}.$$

所以

$$a_n\to a.$$

因此,若不扩充有理数,也就是说,如果我们只局限于有理数,不去创造无理数,则单调有界数列就可能没有极限,不收敛.即有理数无连续性.实数连续性是实数最深刻的性质,是实数的代数性质

(四则运算)以外的性质，是实数的“分析性质”.

我们来看一些例子.

例1 求极限$\lim q^n$ $(|q|<1)$.

解 考虑数列$(|q|^n)$. 因$|q|<1$，故$(|q|^n)$是非增数列，并以0为下界. 由定理1，它是收敛的. 设极限为a. 又因

$$|q|^n=|q||q|^{n-1},$$

令$n\to+\infty$即得

$$a=|q|a.$$

由q的假设即得$a=0$，因此

$$\lim q^n=0. \square$$

例2 设$\alpha\geqslant 2$，

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha},\quad n=1,2,\cdots.$$

证明(a_n)收敛.

证明 显然(a_n)非减：

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n^\alpha}>0,\quad n=2,3,\cdots.$$

所以由定理1只须证明它有上界. 事实上，

$$a_n\leqslant 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=2-\frac{1}{n}<2,\quad n=1,2,\cdots. \square$$

例3 设$a_1=\sqrt{2}$，$a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$a_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，$\cdots$. 证明$\lim a_n=2$.

证明 这个数列是由“递推关系”

$$a_n=\sqrt{2+a_{n-1}},\ n=2,3,\cdots,$$

$$a_1=\sqrt{2}$$

定义的．显然 $a_1<a_2$．由归纳法易知

$$a_1<a_2<a_3<\cdots,$$

即(a_n)严格增．又 $a_1<2$．同样由归纳法易知

$$a_n<2,\quad n=1,2,\cdots.$$

即(a_n)有上界．所以(a_n)收敛．设(a_n)收敛于 a．因为

$$a_n^2=2+a_{n-1},\quad n=2,3,\cdots,$$

令 $n\to+\infty$ 即得

$$a^2=2+a.$$

所以得 $a=2$(另一个解 $a=-1$ 不合题意，舍去)．□

定理 2 若数列(a_n)非减无上界，则 $\lim a_n=+\infty$；若数列(a_n)非增无下界，则$\lim a_n=-\infty$.

证明 设(a_n)非减无上界．任给正数 A，则 A 不是它的上界，因此(a_n)中必有一项 $a_{n_A}>A$．而(a_n)非减，所以当 $n>n_A$ 时

$$a_n\geqslant a_{n_A}>A.$$

所以

$$\lim a_n=+\infty.$$

同理可证定理的另一部分．□

例 4 设

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},\quad n=1,2,\cdots.$$

证明$\lim a_n=+\infty$.

证明 显然(a_n)非减，所以只须证明它无上界．事实上，

$$a_{2n}-a_n=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},\quad n\in N.$$

所以

$$a_{2^k}-a_{2^{k-1}}\geqslant\frac{1}{2},$$

$$a_{2^{k-1}}-a_{2^{k-2}}\geqslant\frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2^2}-a_2\geqslant\frac{1}{2},$$

$$a_2-a_1\geqslant\frac{1}{2}.$$

相加得

$$a_{2^k}-a_1\geqslant\frac{k}{2},$$

即

$$a_{2^k}\geqslant 1+\frac{k}{2},\quad k=1,2,\cdots.$$

由此可见,(a_n)无上界,所以 $a_n\to+\infty$. □

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 单调有界数列收敛是实数的什么性质?

(2) 单调数列是否都有极限?试指出它的各种情况.

2. 设(a_n)是一单调数列,若有一子列 $a_{n_k}\to a$,则 $a_n\to a$.

3. 证明下列数列收敛:

(1) $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right),\quad n\in N.$

(2) $(1-x_1)(1-x_2)\cdots(1-x_n),\quad 0<x_n<1,\quad n\in N.$

(3) $\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1},\quad n\in N.$

4. 应用定理1证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ (a>1,k\in N)$.

5. 设 $0<\alpha\leqslant1$,证明 $\lim\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}=+\infty$.

6. 设 $c>0$, $x_1=\sqrt{c}$, $x_2=\sqrt{c+\sqrt{c}}$, $x_3=\sqrt{c+\sqrt{c+\sqrt{c}}}$, …. 求极

限 $\lim x_n$.

7. 设 $a>0, x_0>0, x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right), n=0,1,2,\cdots$. 求极限 $\lim x_n$.

提示：先证明 $x_n\geqslant\sqrt{a}, n=1,2,\cdots$.

8. 设 $x_0=1, x_1=1+\frac{x_0}{1+x_0}, x_2=1+\frac{x_1}{1+x_1},\cdots$. 求 $\lim x_n$.

9. 设 $0<a_n<1$，且 $a_{n+1}(1-a_n)\geqslant\frac{1}{4}, n\in N$. 求 $\lim a_n$.

10. 设 $c>0, a_1=\frac{c}{2}, a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}, n=1,2,\cdots$. 证明

$$\lim a_n=\begin{cases}1-\sqrt{1-c}, & 0<c\leqslant 1;\\ +\infty, & c>1.\end{cases}$$

11. 设 $x_1=a, x_2=b, x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1}), n=2,3,\cdots$. 求 $\lim x_n$.

12. 设 $x_1=a>0, y_1=b>0, x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}, y_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+y_n), n=1,2,\cdots$. 证明$(x_n)$和$(y_n)$收敛于 a 与 b 之间的同一数.

13. 设 $x_1=c>0, x_{n+1}=c+\frac{1}{x_n}, n\in N$.

(1) 求 $\lim x_n$.

(2) 证明

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

§2.5 圆周率 π

在我国古代，很早就有了极限的思想. 魏末晋初数学家刘徽曾用"割圆术"计算过圆的面积. 设圆的内接正 n 边形的面积是A_n，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}A_n$ 应就是圆的面积. 因此数列

$$A_6, A_{12}, A_{24}, \cdots$$

的极限也就是圆的面积(图 28). 用刘徽的话来说，就是"割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣". 刘徽按照这个想法，从半径为 1 的圆内接正六边形的面积算

到圆内接正一百九十二边形的面积，得出圆周率 π 的近似值为3.14. 大约两个世纪以后，到了南北朝时代，科学家祖冲之(公元429—500)又算出 π 介于 3.1415926 和 3.1415927 之间. 这是我国古代的光辉成就之一.

圆周率 π 在数学里是一个很有影响的重要常数. 什么是圆周率呢?

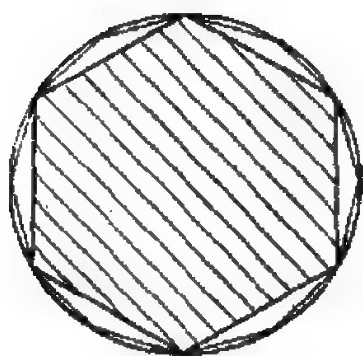


图 28

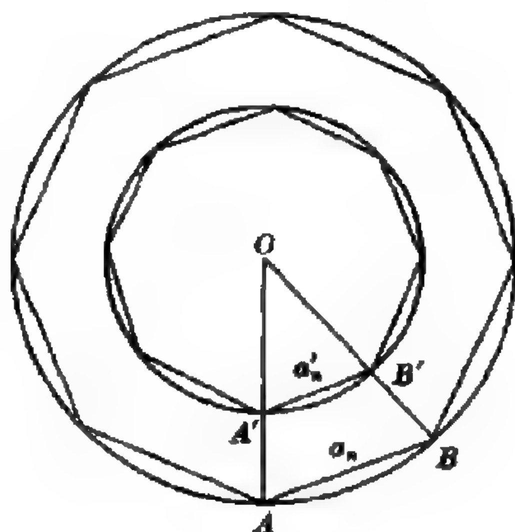


图 29

设有一半径为 R，周长为 L 的圆 O. 我们来证明，比 $\frac{L}{R}$ 是一个与圆的大小无关，即与半径 R 和周长 L 都无关的常数. 为此，再作一个半径为 R'，周长为 L' 的同心圆(图 29). 我们采用刘徽的割圆术，对二圆分别作边长为 a_n 和 a'_n 的内接正 2^n 边形. 于是它们的周长分别为 $2^n a_n$ 和 $2^n a'_n$. 当 n 无限增加时，内接正多边形周长的极限应就是圆周长，即

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n a_n = L, \qquad \lim_{n\to+\infty} 2^n a'_n = L'.$$

显然，数列 $(2^n a_n)$ 和 $(2^n a'_n)$ 是严格增的，可以证明它们都是有界的(习题 3)，再由 § 2.4 定理 1 便知它们的确是收敛的. 从图 29 看到，三角形 $\triangle AOB$ 和 $\triangle A'OB'$ 相似，所以

$$\frac{a_n}{R} = \frac{a'_n}{R'},$$

故

$$\frac{L}{R}=\lim\frac{2^n a_n}{R}=\lim\frac{2^n a_n'}{R'}=\frac{L'}{R'}.$$

即圆的周长与半径之比$\frac{L}{R}$是个常数，这个常数我们记为 2π：

$$\frac{L}{R}=2\pi. \tag{1}$$

π 就叫做"圆周率"．在微积分学中有很多方法可以计算 π：

$$\pi=3.14159265358975\cdots.$$

它是一个不循环的无尽小数，即是一个无理数．并且不是有理数的根式这一类无理数．人们专用一个字母 π 来记它．

同样道理，如图 30 所示，一个定角 A 所对的圆弧长 l 与半径 R 之比

$$\frac{l}{R}=x \tag{2}$$

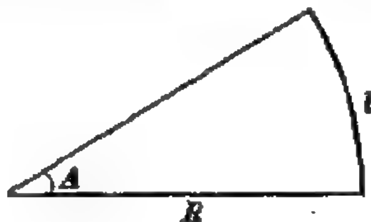


图 30

也是一个与半径 R 无关、只与角 A 的大小有关的常数，因此我们可以用这个比值 x 来度量角 A 的大小：称角 A 的大小为 x 个"弧度"．特别，若 $x=1$，则角 A 的大小为 1 个弧度．就是说，与半径相等的圆弧所对之角为 1 个弧度．弧度是度量角的另一种单位．以后我们会看到，在微积分学中它比"度、分、秒"制更为方便．

最后，我们再来计算圆面积和扇形面积．设圆的内接正 2^n 边形的面积为 A_n，则由 (1)和图 31 可知，半径为 R 的圆面积应为

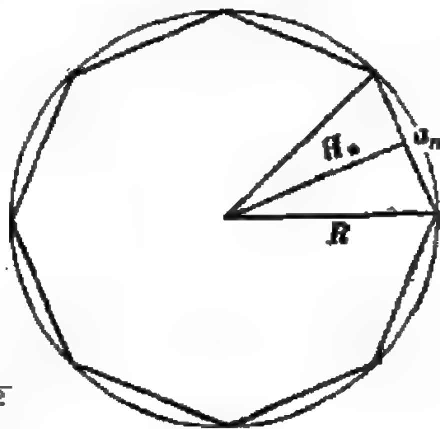


图 31

$$A=\lim_{n\to+\infty}A_n=\lim 2^n\left(\frac{1}{2}a_nH_n\right)$$

$$=\lim\frac{1}{2}2^n a_n\sqrt{R^2-\left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}LR=\pi R^2.$$

同样地,由(2)可得半径为 R 的扇形面积为

$$\sigma=\frac{1}{2}lR=\frac{1}{2}xR^2, \tag{3}$$

其中 x 为扇形顶角的弧度数.

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 什么叫做圆周率?

(2) 弧度是什么意思?什么样的角为一个弧度?整个圆周角为多少弧度?

(3) 弧度和度的关系为何?

(4) 圆弧长与圆心角和半径有何关系?

(5) 扇形面积与顶角和半径有何关系?

2. 证明当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时 $|\sin x|<|x|$.

3. 证明圆内接正 2^n 边形的周长是有界的.

提示: 用解析几何方法,只须就 $\frac{1}{8}$ 圆周来证明.

§2.6　数 e 和指数函数

(一) 数 e

现在我们再来介绍分析学中另一个重要的常数. 考虑有理数数列

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\quad n=1,2,\cdots.$$

先证 (e_n) 非减:

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\frac{1}{n^k}$$

$$
\begin{aligned}
&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}\\
&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\
&\leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\\
&<1+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\\
&=e_{n+1}.
\end{aligned}
$$

再证(e_n)有上界:

$$
\begin{aligned}
e_n&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\\
&\leqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\leqslant 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\\
&=2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=2+\left(1-\frac{1}{n}\right)<3.
\end{aligned}
$$

因此,由§2.4定理1,有理数数列(e_n)收敛. 以后我们可以证明,它的极限是一个无理数. 事实上,它是和π同一类型的无理数,我们也专用一个字母e来记它:

$$e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

这就是数e的定义. 以后我们还将得到:

$$e=2.7182818\cdots.$$

为什么我们要提出这个数e呢? 在高等数学中,对数大都以e为底,叫做"自然对数". 数x的自然对数记为$\ln x=\log_e x(x>0)$. 指数都采用e^x $(x\in R)$. 其原委在第二章中便可清楚.

(二) 指数函数

在初等数学里，我们只知道有理指数 $a^{\frac{p}{q}}$ 的含义，对于无理指数，诸如 $2^{\sqrt{3}}$，3^{π} 等，实际上不明其意义。现在我们要对每一个无理数 x 来定义 a^x $(a>0)$。为此先证明一个引理。

引理 1 设(x_n)和(x'_n)是两个非减、有上界的非负有理数数列，且

$$\lim x_n = \lim x'_n,$$

则对一切 $a>0$ 有

$$0<\lim a^{x_n} = \lim a^{x'_n} < +\infty.$$

证明 先设 $a>1$。显然(a^{x_n})和$(a^{x'_n})$都是非减有上界的数列，因此都收敛。显然收敛于非零的数。任取两个自然数 n 和 m。因为

$$x_n \leqslant \lim x_k = \lim x'_k,$$

所以当 k 充分大时应有

$$x_n - \frac{1}{m} < x'_k,$$

故

$$a^{x_n - \frac{1}{m}} < a^{x'_k}.$$

令 $k \to +\infty$ 便得

$$a^{x_n - \frac{1}{m}} < \lim a^{x'_k}.$$

由于 n 和 m 是任意两个自然数，所以上式对一切 $n, m \in N$ 成立。令 $n \to +\infty$ 又得

$$a^{-\frac{1}{m}} \cdot \lim a^{x_n} \leqslant \lim a^{x'_k}.$$

再令 $m \to +\infty$，由§2.1 例 6 即得

$$\lim a^{x_n} \leqslant \lim a^{x'_n}.$$

但(x_n)和(x'_n)在引理中是同等地位的数列，故同样应有

$$\lim a^{x'_n} \leqslant \lim a^{x_n}.$$

因此引理当 $a>1$ 时得证.

若 $a=1$, 则引理显然成立. 若 $0<a<1$, 令 $b=\frac{1}{a}$, 则 $b>1$. 因此由已证的又得

$$\lim a^{x_n}=\lim \frac{1}{b^{x_n}}=\lim \frac{1}{b^{x'_n}}=\lim a^{x'_n}.$$

所以引理对一切 $a>0$ 成立. □

由此引理和 § 2.4 定理 1, 我们便可以对无理数 x 来定义 a^x.

定义 1 设 $x>0$ 是一无理数, $a>0$. 任选一非减有理数数列 $x_n \to x$, 定义

$$a^x=\lim a^{x_n}.$$

又定义

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}.$$

在定义中, 如果又有非减有理数数列 $x'_n \to x$, 则由引理 1, $(a^{x'_n})$和(a^{x_n})有相同的极限. 因此, 我们的定义是合理的, "不含混"的.

定义了无理指数以后, 我们还应证明指数定律仍然成立.

定理 1 若 $0<a<b, x>0$, 则

$$a^x<b^x. \tag{1}$$

若 $a>1, 0<x<y$, 则

$$a^x<a^y. \tag{2}$$

若 $a>0$, $b>0$, 则

$$a^{x+y}=a^x a^y, \tag{3}$$

$$(ab)^x=a^x b^x, \tag{4}$$

$$(a^x)^y=a^{xy}. \tag{5}$$

证明 在中学里已经知道，这些指数定律对于有理指数是成立的。在这个基础上我们来证明它们对于任意指数都成立。

设 $0<a<b, x>0$. 取非减的正有理数数列 $x_n\to x$, 则

$$\frac{b^{x_n}}{a^{x_n}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{x_n}>1, \qquad n=1,2,\cdots.$$

但 $\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{x_n}\right)$非减，令 $n\to+\infty$即得

$$\frac{b^x}{a^x}>1.$$

这就证明了(1).

再证(2). 设 $a>1, 0<x<y$. 取非减的正有理数数列 $x_n\to x$, $y_n\to y$. 再取满足 $x<r<y$ 的有理数 r. 于是当 n 充分大时有 $x_n\leqslant x<r<y_n$, 所以

$$a^{x_n}<a^r<a^{y_n}.$$

令 $n\to+\infty$即得

$$a^x\leqslant a^r<a^y.$$

因指数定律对有理指数成立，(3)和(4)是显然的. 为证(5), 不妨设 $a>1, x, y>0$. 取非减的正有理数数列 $x_n\to x$, $y_n\to y$. 再取非增有理数数列 $x_n'\to x$, $y_n'\to y$. 由(1)和(2)有

$$a^{x_ny_n}=(a^{x_n})^{y_n}\leqslant(a^x)^{y_n}\leqslant(a^x)^y\leqslant(a^x)^{y_n'}\leqslant(a^{x_n'})^{y_n'}=a^{x_n'y_n'}. \tag{6}$$

因为$(x_n'y_n'-x_ny_n)$是趋向于 0 的非负有理数数列，由 § 2.1 例 6 易知

$$\lim a^{x_n'y_n'-x_ny_n}=1.$$

但(x_ny_n)是非减有理数数列，$x_ny_n\to xy$, 故由定义，

$$\lim a^{x_ny_n}=a^{xy}.$$

所以

$$\lim a^{x'_n y'_n} = a^{xy}.$$

在(6)式中令 $n \to +\infty$ 即得(5). □

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 数 e 是如何定义的?

(2) 数 e 的前八位数是什么?

2. 求下列极限:

(1) $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.　　　　(2) $\lim\left(1+\frac{1}{n-3}\right)^n$.

(3) $\lim\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^n$.　　　　(4) $\lim\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$.

(5) $\lim\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)^{4n^2}$.

3. 回答下列问题:

(1) $3^{\sqrt{2}}$ 是什么意思?

(2) 引理 1 有什么作用?

4. 证明对数函数 ln 严格增, 由此用极限的定义证明:

(1) $\lim a^{\frac{1}{n}}=1$　　$(a>1)$.

(2) $\lim q^n=0$　　$(|q|<1)$.

(3) $\lim\frac{\ln n}{n}=0$.

5. 证明:

(1) 设 $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\in N$. 则 (b_n) 严格减, 且

$$\lim b_n=e.$$

提示: 考虑 $\frac{b_{n+1}}{b_n}$, 应用不等式 $(1+x)^n>1+nx$　$(x>-1)$.

(2) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $n\in N$.
△

(3) $\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, n\in N$.

(4) 设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n, n\in N$. 则$\{x_n\}$收敛。

(5) $\lim\frac{1}{\ln n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$.

6. 设 $y_n=1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}, n\in N$. 证明:

(1) $y_n<e, \quad n\in N$.

(2) $\lim y_n=e$.

7. 设 $a_n=\frac{n^n}{n!}, \quad b_n=\frac{n^{n+1}}{n!}, \quad n\in N$.

(1) 考虑$\frac{a_{n+1}}{a_n}$和$\frac{b_{n+1}}{b_n}$, 由此得到关于 $n!$ 的估计:

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

(2) 证明 $\lim\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$.

(3) 试用 § 2.2 习题 10 证明上述极限.

第三节 函数极限

§ 3.1 函数极限的概念

现在我们要在数列极限的基础上进一步建立函数极限的概念. 设函数 f 在点 x_0 的一个邻域内有定义, 所谓函数 f 在点 x_0 的"极限", 乃是说当 x 无限接近 x_0 时, 函数值 $f(x)$ 的变化趋势. 因此 f 在点 x_0 有没有定义是无关紧要的, 关键是 f 在 x_0 的近旁有定义; 同时, 当 x 向 x_0 靠近时, 应排除它与 x_0 重合.

定义 1 设函数 f 在点 x_0 附近有定义(在 x_0 可以无定义). 如果有一数 A, 使得对任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_\varepsilon>0$(δ_ε 与 ε 有关), 当 $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

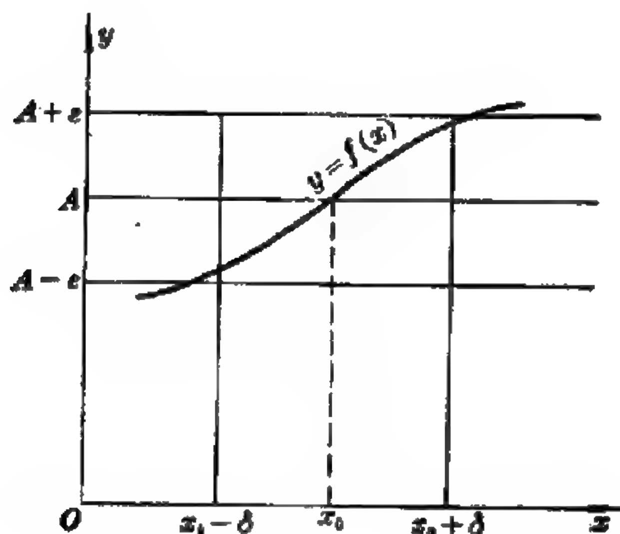


图 32

(图 32)，则说函数 f 在点 x_0 有极限 A. 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A;$$

或

$$f(x)\to A \qquad (x\to x_0).$$

后者读作"当 x 趋向 x_0 时，$f(x)$趋向于 A".

注 在此定义中，函数 f 在点 x_0 有无定义均可. 如果 f 在 x_0 有定义，$f(x_0)$可与 A 不相等，这是因为定义中的不等式"$0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon$"已将 x_0 排除在外. 同时注意，要知道函数 f 在一点 x_0 的极限，只须知道 f 在邻近 x_0 的地方的变化趋势，不必知道 f 在离 x_0 较远处的情况.

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

证明 我们注意到，所给函数在 $x=0$ 无定义. 因为当 $x\neq 0$ 时

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|.$$

任给 $\varepsilon>0$，只须取 $\delta_\varepsilon=\varepsilon$. 则当 $0<|x-0|=|x|<\delta_\varepsilon$ 时

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|\leqslant|x|<\delta_\varepsilon=\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0. \quad \Box$$

例 2　求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}$.

解　因为

$$\frac{x^2-1}{x^2-x}=1+\frac{1}{x},$$

看来所求极限应为 2．按定义我们估计

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\left|\frac{1-x}{x}\right|.$$

由于要求的是函数在 $x=1$ 的极限，故无妨假定 $|x-1|<\frac{1}{2}$，于是 $x>\frac{1}{2}$. 这时

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|<2|x-1|.$$

任给 $\varepsilon>0$，如果又有 $0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$，则就有

$$\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|<\varepsilon.$$

因此取 $\delta_\varepsilon=\min\left(\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{2}\right)$（即$\frac{1}{2}$和$\frac{\varepsilon}{2}$中之小者），则当 $0<|x-1|<\delta_\varepsilon$ 时（图 33）上式成立．故所求极限为 2．$\Box$

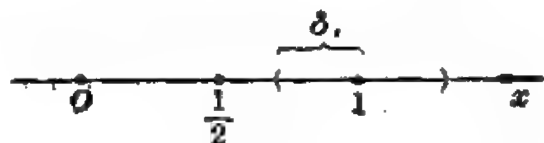


图　33

我们知道，数列是定义在自然数集上的函数，变量 a_n 中的自变量 n 只有一个方向可以无止境地跑去，即跑向 $+\infty$．但对于一

般定义在数轴 R 上的函数 f，变量 $f(x)$ 中的自变量是可连续变化的量，它既可以向一个有限的点 x_0 无限靠近，也可以向∞或±∞无限远离．函数值 $f(x)$则和 a_n 一样，既可以向有限数接近，也可以趋向于∞或±∞．这就使得函数极限的情况繁多．但只要我们掌握了极限的思想和语言，是毋须就其各种情况去全部定义的．

定义 2　设函数 f 在区间$(a, +\infty)$上有定义．如果有一数 A 使得：任给 $\varepsilon>0$，存在数 Δ_ε，当 $x>\Delta_\varepsilon$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

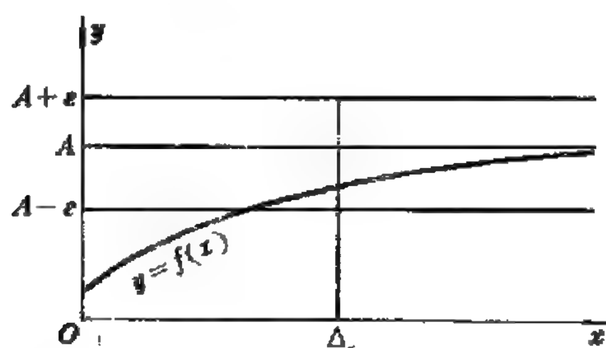


图 34

(图 34)，则说 f 在 $+\infty$的极限为 A．记为

$$f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A \qquad (x\to+\infty).$$

同样可定义极限：

$$f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad f(\infty)=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$$

(图 35, 36)．

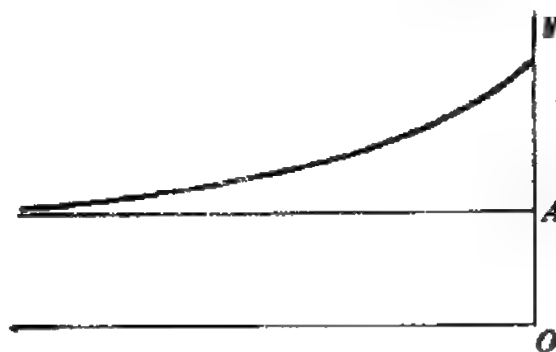


图 35

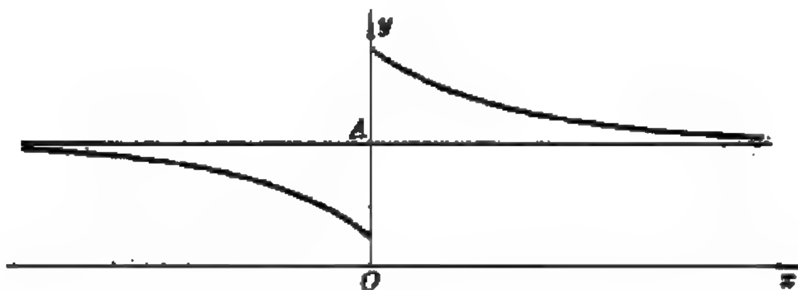


图 36

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0\quad(0<a<1)$.

证明 由§2.1 例5知,数列极限 $\lim a^n=0$ 是成立的. 因此,任给 $\varepsilon>0$, 存在 $n_\varepsilon\in N$, 当自然数 $n>n_\varepsilon$ 时 $a^n<\varepsilon$. 取 $\Delta_\varepsilon=n_\varepsilon+1$, 则 $a^{\Delta_\varepsilon}<\varepsilon$. 于是当 $x>\Delta_\varepsilon$ 时(§2.6 定理 1)

$$|a^x-0|=a^x<a^{\Delta_\varepsilon}<\varepsilon.$$

这便是要证的. □

例 4 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,tg}x=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arc\,tg}x=-\frac{\pi}{2}.$$

证明 任给 $\varepsilon>0$. 要使

$$\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\operatorname{arc\,tg}x\left(<\frac{\pi}{2}\right),\tag{1}$$

只须(因 $\operatorname{tg}x$ 严格增)

$$x>\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right).$$

因此取 $\Delta_\varepsilon=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$, 则当 $x>\Delta_\varepsilon$ 时(1)式成立. 这就证明了第一个极限. 同样可证第二个极限. □

例 5 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2-x}$.

解 无妨假定 $x>2$, 则

$$0<\frac{x+1}{x^2-x}<\frac{2x}{x^2-\frac{x^2}{2}}=\frac{4}{x}.$$

因此，任给 $\varepsilon>0$，取 $\Delta_\varepsilon=\max\left(2,\dfrac{4}{\varepsilon}\right)$，则当 $x>\Delta_\varepsilon$ 时

$$0<\frac{x+1}{x^2-x}<\frac{4}{\Delta_\varepsilon}\leqslant\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2-x}=0.\ \square$$

例 6 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}=1$.

证明 因为

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}-1=\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}.$$

无妨假定 $|x|>\sqrt{2}$，则易见

$$\left|\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-x}}-1\right|<\frac{2}{|x|}.$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $\Delta_\varepsilon=\max(\sqrt{2},2/\varepsilon)$，则当 $|x|>\Delta_\varepsilon$ 时

$$\left|\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-1}}-1\right|<\frac{2}{\Delta_\varepsilon}\leqslant\varepsilon.\quad\square$$

定义 3 设函数 f 在一点 x_0 的“右旁”(x_0,x_0+r) 有定义. 如果有一数 A 使得对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_\varepsilon>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta_\varepsilon$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则说 f 在点 x_0 的**右极限**为 A. 记为

$$f(x_0\,|\,0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A\qquad(x\to x_0+0).$$

同样可定义 f 在点 x_0 的**左极限**:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x),$$

特别，f 在 $x_0=0$ 的左、右极限分别记为

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x),\qquad f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x).$$

例 7 求 $f(0^-)$和 $f(0^+)$，设

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 1, & x<0.\end{cases}$$

解

$$f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}1=1;$$

$$f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0.\ \Box$$

例 8 求

$$\lim_{x\to 1-0}\left(\sqrt{\frac{1}{1-x}+1}-\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}\right).$$

解 当 $0<x<1$ 时有

$$\sqrt{\frac{1}{1-x}+1}-\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}=\sqrt{\frac{2-x}{1-x}}-\sqrt{\frac{x}{1-x}}$$

$$=\frac{2(1-x)}{\sqrt{1-x}(\sqrt{2-x}+\sqrt{x})}<2\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}<2\sqrt{1-x}.$$

任给 $\varepsilon>0$，解不等式 $2\sqrt{1-x}<\varepsilon$ 得

$$1-\frac{\varepsilon^2}{4}<x<1.$$

取 $\delta_\varepsilon=\dfrac{\varepsilon^2}{4}$，则当 $1-\delta_\varepsilon<x<1$ 时

$$0<\sqrt{\frac{1}{1-x}+1}-\sqrt{\frac{1}{1-x}-1}<\varepsilon.$$

故所求极限为 0. $\Box$

例 9 证明 $\lim\limits_{x\to 0^+}a^x=1\quad(a>1)$.

证明 由 § 2. 1 例 6，任给 $\varepsilon>0$，存在 $n_\varepsilon\in N$ 使 $a^{\frac{1}{n_\varepsilon+1}}<1+\varepsilon$.

取 $\delta_\varepsilon=\dfrac{1}{n_\varepsilon+1}$，则当 $0<x<\delta_\varepsilon$ 时

$$1<a^x<a^{\delta_\varepsilon}<1+\varepsilon$$

(§ 2.6 定理 1). 这便是所要证的. □

定理 1

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.$$

证明 (充分性) 设

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.$$

任给 $\varepsilon>0$, 则有 $\delta'_\varepsilon>0$, 当 $x_0-\delta'_\varepsilon<x<x_0$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

同时又有 $\delta''_\varepsilon>0$, 当 $x_0<x<x_0+\delta''_\varepsilon$ 时上式成立. 因此当 $0<|x-x_0|<\delta_\varepsilon=\min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon)$ 时上式成立. 即

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A.$$

(必要性) 显然.

例 10 证明符号函数 sgn(§ 1.4(1)式)在 $x=0$ 没有极限.

证明 因为 $\operatorname{sgn}0^+=1$, $\operatorname{sgn}0^-=-1$, $\operatorname{sgn}0^+\neq\operatorname{sgn}0^-$, 由定理 1, sgn 在 $x=0$ 没有极限.

定义 4 设函数 f 在点 x_0 附近有定义(在 x_0 可以无定义). 如果任给数 A, 存在 $\delta_A>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta_A$ 时

$$f(x)>A,$$

则说函数 f 在点 x_0 的极限为 $+\infty$. 记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=+\infty,$$

或

$$f(x)\to+\infty \qquad (x\to x_0).$$

同样可定义 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=-\infty$. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)|=+\infty$, 则记 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$.

同样还可定义

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)=\pm\infty, \ \infty;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty,\ \infty;$$

$$f(x_0 \pm 0) = \pm\infty, \infty.$$

例 11 证明 $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty$.

证明 因为

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)}>\frac{1}{(x-1)(x+1)}.$$

无妨假定 $1<x<2$. 于是

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}>\frac{1}{3(x-1)}.$$

任给 $A>0$, 解不等式

$$\frac{1}{3(x-1)}>A$$

得 $x<1+\dfrac{1}{3A}$. 因此取 $\delta_A=\min\left(\dfrac{1}{3A},\ 1\right)$, 则当 $1<x<1+\delta_A$ 时

$$\frac{x^2+1}{x^2-1}>A.$$

按定义, 这就是所要证的. ▯

注 定理 1 对于无穷极限也是成立的(习题).

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 下列极限的定义为何?

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.　　(b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.　　(d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty$.

(e) $f(x_0+0)=+\infty$.　　(f) $f(x_0-0)=-\infty$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} x=?$　　$\lim\limits_{x\to x_0} 2=?$　　$\lim\limits_{x\to x_0} a=?$ (a 与 x 无关).

(3) 函数在一点的极限和在该点的左、右极限有何关系?

(4) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 有何关系?

2. 由定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{arctg} x=0$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=4$.

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x$.　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2x+1}=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$.　　(6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$.

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$.　　(8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2-9}=\infty$.

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x+1}=\dfrac{3}{2}$.　　(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{3x^2-x+1}=\dfrac{1}{3}$.

(11) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{5x^2+1}{\sqrt{1-x}}=+\infty$.　　(12) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}=0$.

(13) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2-a})=0$.　　(14) $\lim\limits_{x\to -\infty}(x+\sqrt{x^2-a})=-\infty$.

(15) $\lim\limits_{x\to +\infty}[(x+1)^a-x^a]=0$, $0<a<1$.

(16) $\lim\limits_{x\to +\infty}a^x=+\infty$ $(a>1)$.　　(17) $\lim\limits_{x\to -\infty}a^x=0$ $(a>1)$.

(18) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}x=+\infty$.

(19) $\lim\limits_{h\to 0}(x+h)^a=x^a$, $x>0$, $0<a<1$.

3. 设

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 2,\\ -ax, & x<2.\end{cases}$$

(1) 求 $f(2+0)$, $f(2-0)$.

(2) 当 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 存在?

4. 证明:

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>b$, 则当 x 充分靠近 x_0 且 $x\neq x_0$ 时 $f(x)>b$.

(2) 若 $f(x_0-0)<f(x_0+0)$, 则存在 $\delta>0$, 当 $x_0-\delta<x<x_0<y<x_0+\delta$ 时 $f(x)<f(y)$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ $(0\leqslant x_0\leqslant 1)$. 设

(1) $A_n\subset[0,1]$ 是有限集 $(n=1,2,\cdots)$, 且当 $n\neq m$ 时 A_n 和 A_m 无公共点; 又

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{当 } x\in A_n,\\ 0, & \text{当 } x\in[0,1] \text{ 但不在任何 } A_n \text{ 之中。}\end{cases}$$

(2) (Riemann 函数)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & \text{当 } x=\dfrac{q}{p},\ p,\ q \text{ 为无公因子的正整数},\ q<p;\\ 1, & \text{当 } x=0,\ 1;\\ 0, & \text{当 } x\in(0,1) \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

6. 回答下列问题:

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, 又 $x_n\neq x_0(n\in N)$, 且 $\lim x_n=x_0$, 则是否有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$?

(2) 设有一数列 (x_n), $x_n\neq x_0(n\in N)$, $\lim x_n=x_0$, 使 $\lim f(x_n)=A$, 则是否有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$?

7. 设有一数列 (x_n), $x_n<x_0(n\in N)$, $\lim x_n=x_0$, 使 $\lim f(x_n)=A$, 且 f 是单调的, 证明 $f(x_0-0)=A$.

8. 如何表达"当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\not\to A$"?

§ 3.2 函数极限的性质

函数极限具有与数列极限相似的性质.

定义 1 设函数 f 在集合 I 上有定义. 如果有一数 M 使得 $|f(x)|\leqslant M$ 对一切 $x\in I$ 成立, 则说 f 在 I 上**有界**. 如果有一数 A 使得 $f(x)\leqslant A$ 对一切 $x\in I$ 成立, 则说 f 在 I 上有**上界** A. 同样定义 f 在 I 上有**下界**.

显然, 函数有界的充分必要条件是既有上界又有下界.

例如, 函数 sin 在 R 上有界, 1 是其一个上界, -1 是其一个下界. tg 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上既无上界亦无下界. 若 $f(x)=a^x$ $(a>1)$, 则 f 在 $(0,+\infty)$ 上有下界 1 而无上界.

下面每一定理都包含多种情况, 但各种情况的证明都类似, 因此我们均只证其一.

定理 1 若函数 f 在 x_0 ($x_0\pm0$, $\pm\infty$, ∞) 有有限的极限, 则 f 在 x_0 的近旁有界.

证明 设 $f(+\infty)=A$ (§ 3.1 定义 2). 则由定义(取 $\varepsilon=1$)存在数 Δ_1, 当 $x>\Delta_1$ 时

$$A-1<f(x)<A+1.$$

所以 f 在区间$(\Delta_1,+\infty)$上有界，即在$+\infty$的“近旁”有界. □

定理 2（极限的唯一性） 若函数 f 在 $x_0(x_0\pm0,\pm\infty,\infty)$有极限，则只有一个极限.

证明 （反证）设 f 在 x_0 有不同的极限 A 和 B. 设 $A<B$. 任取 $r\in(A,B)$. 因为 f 在 x_0 有极限 A，由 §3.1定义 1，存在 $\delta'>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta'$ 时

$$f(x)<r.$$

又因 f 在 x_0 有极限 B，同样又应存在 $\delta''>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta''$ 时

$$f(x)>r.$$

因此当 $0<|x-x_0|<\min(\delta',\delta'')$时

$$r<f(x)<r.$$

这是矛盾的. □

定理 3 如果函数 f 和 g 在 $x_0(x_0\pm0,\pm\infty,\infty)$ 都有有限的极限，则函数 $f\pm g$ 和 fg 在 x_0 也有有限的极限；如果又有 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq0$，则函数 f/g 在 x_0 也有有限的极限. 且

$$\lim_{x\to x_0}(f\pm g)(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}g(x);$$
$$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}g(x);$$

当 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f}{g}(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$

证明 我们仅对 fg 证明，其余类似. 设

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\qquad \lim_{x\to x_0}g(x)=B.$$

因为

$$\begin{aligned}|(fg)(x)-AB|&=|f(x)g(x)-AB|\\&=|f(x)g(x)-Ag(x)+Ag(x)-AB|\end{aligned}$$

$$\leqslant |g(x)||f(x)-A|+|A||g(x)-B|.$$

由假设和定理 1，存在 $M,\delta_0>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时 $|g(x)|\leqslant M$。记 $L=\max(M,|A|)$，于是当 $0<|x-x_0|<\delta_0$ 时

$$|(fg)(x)-AB|\leqslant L(|f(x)-A|+|g(x)-B|).$$

任给 $\varepsilon>0$．由假设，存在 $\delta'>0$ 和 $\delta''>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta'$ 时

$$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2L};$$

当 $0<|x-x_0|<\delta''$ 时

$$|g(x)-B|<\frac{\varepsilon}{2L}.$$

因此当 $0<|x-x_0|<\delta=\min(\delta_0,\delta',\delta'')$ 时

$$|(fg)(x)-AB|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}(fg)(x)=AB=\lim_{x\to x_0}f(x)\lim_{x\to x_0}g(x).\ \square$$

例 1 求下列极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x^2+2};\qquad\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+x+1}.$$

解 由定理 3，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{2}{x^2}}=\frac{0}{3}=0;$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2}{3}.\ \square$$

和数列一样（§ 2.2 和 § 2.3 的(1)），一般地有（习题）

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

定理 4 如果函数 f 和 g 在 x_0($x_0\pm0$, $\pm\infty,\infty$) 都有极限(有限或 $\pm\infty$), 且在 x_0 的近旁(除 x_0 外)有

$$f(x)\leqslant g(x),$$

则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\leqslant \lim_{x\to x_0} g(x).$$

证明 设 f 和 g 在 x_0 的极限分别为 A 和 B. (反证)设 $A>B$. 任取一数 $r\in(B,A)$, 则由极限的定义可知存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$f(x)>r>g(x).$$

这与定理的假设矛盾. 所以 $A\leqslant B$. □

定理 5 如果函数 f 和 g 在 x_0($x_0\pm0$, $\pm\infty$, ∞)有相同的极限 A(有限或 $\pm\infty$), 且在 x_0 的近旁(除 x_0 外)有

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x),$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$.

证明 该定理的证明与 § 2.2 定理 5 的证明方法完全相同. 留作习题.

下面我们证明一个重要的极限.

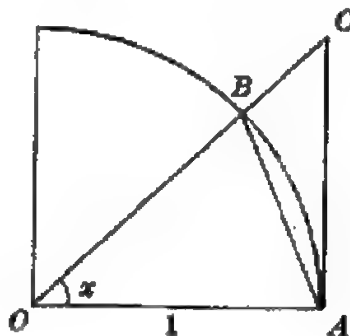


图 37

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

证明 如图 37, 作半径为 1 的圆. 由图可见

$$\triangle AOB \text{ 面积} < \text{扇形 } AOB \text{ 面积} < \triangle AOC \text{ 面积}.$$

角以弧度为单位, 设 $\angle AOB=x$ 弧度, 则 $0<x<\frac{\pi}{2}$. 由 § 2.5(3), 上面的不等式就是

$$\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}.$$

即

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

所以

$$|\sin(-x)| < |-x| < |\operatorname{tg}(-x)|, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \tag{2}$$

(1)和(2)相结合得

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

所以

$$|\cos x| < \left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1. \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}.$$

但当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$时 $\cos x > 0$, $\frac{\sin x}{x} > 0$, 因此最后得

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \qquad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

由(3)式又得

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0. \tag{5}$$

所以

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1. \tag{6}$$

在(4)式中令 $x\to 0$, 由定理 5 即得所证. □

函数极限和数列极限有一个重要关系:

定理 6 当 $x\to x_0$ ($x_0\pm 0, \pm\infty, \infty$) 时 $f(x)\to A$ ($\pm\infty, \infty$) 的充分必要条件是对一切数列 $x_n\to x_0$ ($x_n\neq x_0$, $n=1, 2, \cdots$) 有 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

证明 (必要性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. 任给 $\varepsilon > 0$, 则有 $\delta_\varepsilon > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ 时

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

若 $x_n\to x_0\,(x_n\neq x_0,\ n\in N)$，则有自然数 n_ε，当 $n>n_\varepsilon$ 时 $0<|x_n-x_0|<\delta_\varepsilon$。因此当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$|f(x_n)-A|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$。

（充分性）（反证）假设对于一切 $x_n\to x_0\,(x_n\neq x_0,\ n\in N)$ 均有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=A$，而当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\nrightarrow A$。按 §3.1定义 1，这就是说，必定存在一个 $\varepsilon>0$，对于不管怎样的 $\delta>0$，都相应地存在 y_δ，$0<|y_\delta-x_0|<\delta$，而

$$|f(y_\delta)-A|\geqslant\varepsilon.$$

特别令 $x_n=y_{\frac{1}{n}}$，则 $0<|x_n-x_0|<\dfrac{1}{n}$，而

$$|f(x_n)-A|\geqslant\varepsilon,\qquad n=1,2,\cdots.$$

因此 $f(x_n)\nrightarrow A$。然而 $x_n\to x_0$，且 $x_n\neq x_0\,(n\in N)$。这与假设矛盾。□

例 3 证明极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在(图 38)。

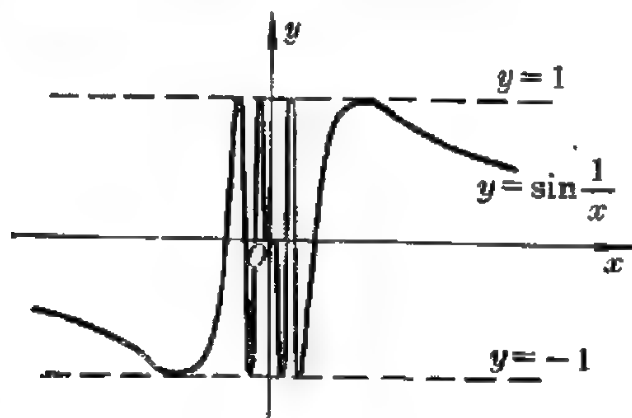


图 38

证明 先取数列 $x_n=\dfrac{1}{\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)\pi}$，$n=1,2,\cdots$。则 $0<x_n\to 0$，

而

$$\sin\frac{1}{x_n}=\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=1\to 1.$$

再取数列 $x_n'=\dfrac{1}{\left(2n-\dfrac{1}{2}\right)\pi}$, $n=1,2,\cdots$. 则 $0<x_n'\to 0$, 而

$$\sin\frac{1}{x_n'}=\sin\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi=-1\to -1.$$

如果 $\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时有极限, 则就与定理 6 矛盾. □

定理 7(复合函数求极限) 假设当 $x\to x_0$ ($x_0\pm 0$, $\pm\infty$, ∞) 时 $f(x)$ 有极限. 令 $x=\varphi(t)$ 得

$$f(x)=g(t).$$

又设当 $t\to t_0$ ($t_0\pm 0, \pm\infty, \infty$)时 $x=\varphi(t)\to x_0$, 且当 $t\neq t_0$ 时 $x=\varphi(t)\neq x_0$. 则当 $t\to t_0$ 时 $g(t)$ 也有极限, 且

$$\lim_{t\to t_0} g(t)=\lim_{x\to x_0} f(x).$$

证明 设

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

于是, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

再由关于 φ 的假设, 又存在 $d>0$, 当 $0<|t-t_0|<d$ 时

$$0<|\varphi(t)-x_0|<\delta.$$

因此当 $0<|t-t_0|<d$ 时

$$|g(t)-A|=|f\circ\varphi(t)-A|<\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{t\to t_0} g(t)=A,$$

即为所证. □

例 4 证明 $\lim\limits_{x\to 0} a^x=1$ $(a>0)$.

证明 先证 $\lim\limits_{x\to 0^+} a^x=1$. 若 $a>1$, 这便是 § 3.1 例 9. 若 $0<a<1$, 则 $\dfrac{1}{a}>1$, 所以

$$\lim_{x\to 0^+} a^x = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = 1.$$

再证 $\lim\limits_{x\to 0^-} a^x = 1$. 事实上, 令 $x=\varphi(t)=-t$, 则当 $t\to 0^+$时 $x\to 0^-$, 由定理 7 便得

$$\lim_{x\to 0^-} a^x = \lim_{t\to 0^+} a^{-t} = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{a^t} = 1. \quad \square$$

例 5　证明$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

证明　先证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

设$[x]$是不大于 x 的最大整数, 则

$$[x]\leqslant x<[x]+1.$$

显然当 $x\to+\infty$时$[x]\to+\infty$. 因此由定理 7, 在数 e 的定义中令 $n=[x]$得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

同样,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{1+[x]}\right)^{1+[x]} = e.$$

又

$$\frac{\left(1+\frac{1}{1+[x]}\right)^{1+[x]}}{1+\frac{1}{1+[x]}} = \left(1+\frac{1}{1+[x]}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

$$= \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}\left(1+\frac{1}{[x]}\right).$$

由定理 5 即得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

再证 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. 事实上, 令 $y=\varphi(x)=-(x+1)$, 由

定理 7 即得

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right)=e.$$

根据 § 3.1 定理 1(§ 3.1 习题 1(4)),即得所证. □

定理 8 如果函数 f 在点 x_0 的左旁 $(x_0-r,\ x_0)$ 非减(非增),则极限 $f(x_0-0)$ 存在. 如果 f 在此左旁又有上界(下界),则 $f(x_0-0)$ 为有限;否则 $f(x_0-0)=+\infty(-\infty)$.

证明 设 f 在 (x_0-r,x_0) 上非减有上界. 在 $(x_0-r,\ x_0)$ 中取一非减数列 $x_n\to x_0$,则数列 $(f(x_n))$ 非减有上界,因此 $(f(x_n))$ 收敛(§ 2.4 定理 1). 设

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=A.$$

任给 $\varepsilon>0$,可取一项 x_{n_ε} 使得

$$A-\varepsilon<f(x_{n_\varepsilon})\leqslant A.$$

因此,再由 f 非减易见,当 $x_{n_\varepsilon}<x<x_0$ 时

$$A-\varepsilon<f(x_{n_\varepsilon})\leqslant f(x)\leqslant A.$$

所以

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=A.$$

设 f 在 (x_0-r,x_0) 上非减无上界. 任给 $A>0$,则 A 不是 f 的上界,因此存在 $x_A\in(x_0-r,\ x_0)$,$f(x_A)>A$. 于是由 f 非减知道,当 $x_A<x<x_0$ 时

$$f(x)\geqslant f(x_A)>A.$$

所以

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=+\infty.\quad □$$

注 定理中的"左旁"当然可以改成"右旁",x_0 也可以改为 $\pm\infty$.

推论 如果函数 f 在区间 (a,b) 上单调,则对于每一点 $x\in(a,$

b), $f(x-0)$和$f(x+0)$均存在、有限.

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 函数极限四则运算成立的条件是什么?

(2) 在定理4中若$f(x)<g(x)$, 是否有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$?

(3) 在定理6中, 为何要有条件“$x_n\neq x_0(n\in N)$”? 特别, 这个条件对定理的充分性方面有何影响?

(4) 在定理7中, 为何要有条件“当$t\neq t_0$时$\varphi(t)\neq x_0$”? 你能否用例子来说明?

(5) 若函数f在区间(a,b)上单调, 则$f(a+0)$, $f(b-0)$如何?

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x-4x^3}{1+x^2+2x^3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1+x-x^3}{1+x^2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x-8}{x^2-5x-4}$.

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

(6) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x_0^3}{x-x_0}$.

(7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+x^2+\cdots+x^n-n}{x-1}$.

(8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, $m,n\in N$.

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$.

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

(11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in N$.

(12) $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

(13) $\lim\limits_{x\to1-0}\sqrt{1+\sqrt{1-x}}$.

(14) $\lim\limits_{x\to a+0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x-a}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x-a}-1}\right)$.

3. 证明定理5.

4. 定出a和b使下列等式成立:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$.

5. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin\sqrt{x+k}=0$, 其中 $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=0$.

6. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\sin x}{x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$.

(5) $\lim\limits_{h\to0}\sin(x+h)$.

(6) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$.

(7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{ka}{n^2}$.

(9) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

(10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1+x}{3+x}\right)^x$.

7. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在.

(2) Dirichlet 函数(§1.4(3))处处无极限.

8. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\overbrace{\sin\sin\cdots\sin}^{n个}x$.

9. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x-5)$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x-5)$.

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-6x^4+7}{x^4-2x^3+7}$.

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x^2}$.

10. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0, a>1, k>0.$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{x^x}=0, a>1.$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}=0, k>0.$

11. 设 f 和 g 为两个周期函数, 且

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0.$$

证明 $f=g$.

§3.3 数量级

先看几个例:

$$1)\ \lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=0;\quad 2)\ \lim_{x\to0}\frac{x}{x^2}=\infty;\quad 3)\ \lim_{x\to0}\frac{100x}{x}=100.$$

以上三例, 有一个共同点: 当 $x\to0$ 时分子和分母同趋向于 0, 但三个分式的极限迥异. 我们不难作出想像: 1)为 0 和 2)为∞, 说明当 $x\to0$ 时 $x^2\to0$ 比 $x\to0$"快"; 3)是一个非 0 的数, 则说明当 $x\to0$ 时 $100x\to0$ 与 $x\to0$ 同等快慢. 如果 $x\to\infty$, 则 1)和 2) 的结果倒了过来, 3)不变. 即当 $x\to\infty$时 $x^2\to\infty$比 $x\to\infty$"快", $100x\to\infty$ 和 $x\to\infty$同等快慢. 为了反映这种"快"和"慢"的区别, 就产生了"数量级"的概念.

定义 1 如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to0$, 则说当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$是**无穷小量或无穷小**.

下面都是无穷小量的例子:

$$(x-x_0)^n\ (x\to x_0),\qquad q^n\ (|q|<1)\ (n\to+\infty),$$

$$\frac{1}{n!}\ (n\to+\infty),\qquad a^x\ (0<a<1)\quad (x\to+\infty),$$

$\sin x\quad (x\to0)\quad$ (§3.2(5)式),

$1-\cos x\quad (x\to0)\quad$ (§3.2(6)式).

定义 2 设当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小量，且当 $x\neq x_0$ 时 $g(x)\neq 0$.

1° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则说当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to 0$ 的阶(或数量级)比 $g(x)\to 0$ 高，或者说当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的"高阶无穷小"．记为

$$f(x)=o(g(x))\qquad (x\to x_0).$$

2° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，则说当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to 0$ 的阶(或数量级)和 $g(x)\to 0$ 相同，或者说当 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是"同阶无穷小"．

3° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，则说当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是"等价无穷小"．记为

$$f(x)\sim g(x)\qquad (x\to x_0).$$

4° 设 $\alpha>0$．若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{|x-x_0|^{\alpha}}=A\neq 0$，则说当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是"α 阶无穷小"，或者说，$f(x)\to 0$ 的阶(数量级)是 α.

若 $f(x)\sim g(x)\,(x\to x_0)$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)\frac{f(x)}{g(x)}h(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)h(x).$$

因此，在计算极限时，我们常常可以用等价无穷小量去替换无穷小因子.

例 1 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$(§3.2 例 2).

例 2 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x=o(x)$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

证明 由例 1，

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\sim 2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2},$$

即题中第二个式子成立．以等价无穷小替换，得第一个式子也成立：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x}=0.\quad\square$$

例 3 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax^2}{1-\cos x}$.

解 由例 1 和例 2，以等价无穷小替换得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} ax^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{ax^2}{\frac{x^2}{2}}=2a.\quad\square$$

例 4 证明当 $|q|<1$ 时 $\dfrac{1}{n!}=o(q^n)\ (n\to+\infty)$.

证明 由 § 2.1 习题 2 (12)，

$$\frac{\frac{1}{n!}}{q^n}=\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^n}{n!}\to 0.\quad\square$$

定义 3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则说当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 是**无穷大量**.

显然，无穷大量的倒数是无穷小量，无穷小量的倒数是无穷大量.

定义 4 设当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷大量.

1° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则说当 $x\to x_0$ 时 $g(x)\to\infty$ 的阶（数量级）比 $f(x)\to\infty$ 高.

2° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，则说当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to\infty$ 的阶（数量级）和 $g(x)\to\infty$ 相同.

3° 若 $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|^\alpha f(x)=A\neq 0\ (\alpha>0)$，则说当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to\infty$ 的阶（数量级）为 α.

由 § 3.2 习题 10 我们看到，当 $x\to+\infty$ 时，$x^x\to+\infty$ 的数量级

比$a^x(a>1)$高，$a^x(a>1)$又比$x^k(k>0)$高，$x^k(k>0)$又比$\ln x$高. 由§2.1习题2(11)和(12)我们还看到，当自然数变量$n\to+\infty$时$n^n\to+\infty$的数量级比$n!$高，$n!$又比$a^n(a>1)$高. 因此，按照它们的数量级由低到高的次序排列起来就是:

$$\ln x,\ x^k(k>0),\ a^x(a>1),\ (n!),\ x^x. \tag{1}$$

数量级的概念是很重要的，在一些数学领域内，数量级常常成为专门研究的问题. 大家对(1)中的次序必须熟知，这对于分析问题是很有帮助的. 以后在第二章§2.6中，我们还会以简便的方法获得这一次序.

例5 求下列无穷大量的数量级:

$$\frac{x^2+x-2}{(x^2-1)^3}\quad(x\to1),\qquad \sqrt{2x^2+1}\qquad(x\to\infty).$$

解 因为

$$\frac{x^2+x-2}{(x^2-1)^3}=\frac{x+2}{(x-1)^2(x+1)^3},$$

显然当$x\to1$时其数量级是2. 因为

$$\sqrt{2}\,|x|\leqslant\sqrt{2x^2+1}\leqslant\sqrt{2}\,|x|+1,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{|x|}=\sqrt{2}.$$

故$\sqrt{2x^2+1}$当$x\to\infty$时数量级是1. □

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 何谓无穷小(大)量?

(2) 如何比较无穷小(大)量的阶(数量级)?

(3) 何谓k阶无穷小(大)量?

(4) $o(|x-a|^k)$, $o\left(\frac{1}{n^p}\right)$是什么意思?

2. 求下列无穷小量或无穷大量的阶:

(1) $x-5x^3+x^{20}\quad (x\to 0)$.

(2) $x-5x^3+x^{20}\quad (x\to\infty)$.

(3) $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 0,\ (x\to+\infty)$.

(4) $\dfrac{x+1}{x^4+1}\ (x\to\infty)$.

(5) $x^3-3x+2\ (x\to 1)$.

(6) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}\ (x\to+\infty)$.

(7) $\dfrac{1}{\sin\pi x}\ (x\to 1)$.

(8) $\sqrt{x\sin x}\ (x\to 0^+)$.

(9) $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}\ (x\to 0^+)$.

(10) $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}\ (x\to+\infty)$.

(11) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\ (x\to 0)$.

(12) $\sqrt[3]{x^2\sin\dfrac{1}{x}}\ (x\to+\infty)$.

(13) $(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)\ (x\to+\infty)$.

(14) $\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1-\sin x}\ (x\to 0)$.

(15) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}\ (x\to+\infty)$.

(16) $\sin\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}-\sqrt{2}\right)\ (x\to 0^+)$.

3. 设 $\alpha(x)\to 0\ (x\to x_0)$, 证明当 $x\to x_0$ 时

(1) $o(\alpha(x))+o(\alpha(x))=o(\alpha(x))$.

(2) $o(c\alpha(x))=o(\alpha(x))$, 其中 c 是常数.

(3) $\beta(x)\cdot o(\alpha(x))=o(\alpha(x)\beta(x))$, 其中 $\beta(x)$ 有界.

(4) $[o(\alpha(x))]^k=o([\alpha(x)]^k)$.

(5) $\dfrac{1}{1+\alpha(x)}=1-\alpha(x)+o(\alpha(x))$.

4. 用等价无穷小量替换的办法求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}^4x}{\sin^3x(1-\cos x)}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{1-\cos^2x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}x)}{x}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$.

5. 设函数 $f_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且当 $x\to+\infty$ 时 $f_n(x)$

都是无穷大量. 试在$(0,+\infty)$上构造一个函数f,当$x\to+\infty$时$f(x)\to\infty$的阶比任何$f_n(x)$都高.

第四节　连续函数

§ 4.1　函数的连续性

实用中最常见的一些变量关系往往都有一个特点：当自变量的变化很小时,因变量的变化也很小. 例如,气温随时间变化, 只要时间的变化很小,气温的变化就会很小. 再如,自由落体的位移随时间变化,只要时间充分地短,位移的变化也会很小. 对于这种现象,我们说,因变量关于自变量是"连续"变化的. 在建立了极限概念以后, 我们就可以用极限和"ε-δ"语言来确切表达这种连续性.

定义 1　设函数f在一点x_0的附近有定义,如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则说f在点x_0是**连续**的,x_0是f的**连续点**. 用"ε-δ"的语言来说,这就是,任给$\varepsilon>0$,存在$\delta_\varepsilon>0$,当$|x-x_0|<\delta_\varepsilon$时

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

注　在此连续的定义中, 不须像极限的定义那样把x_0除外.

我们看一些例子. 由极限的四则运算容易明白,有理函数R:

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

在其定义域中的每一点上都是连续的. 在上一节中我们看到, 函数sin, cos(§3.2(5), (6))和指数函数(§3.2 例 4)在点$x=0$都是连续的.

例 1　设$f(x)=\sqrt{x}\ (x>0)$. 证明f在每一点$x_0>0$都是连续的.

证明　因为

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x_0}}|x-x_0|. \quad \square$$

例 2 证明下列函数在点 $x_0=0$ 不连续:

1° $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x+1, & x>0.\end{cases}$ 2° $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

3° $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 4° $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

证明 1° 因为 $f(0^+)=1, f(0^-)=0$, 所以 f 在 $x=0$ 无极限, 当然在该点不连续(图 39).

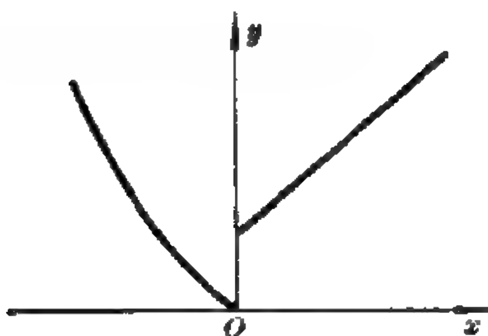


图 39

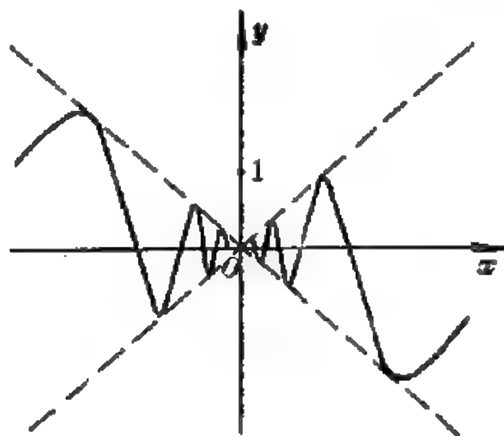


图 40

2° 因为

$$\lim_{x\to 0}f(x)=0\neq 1=f(0),$$

即 f 在 $x=0$ 虽有极限, 但不等于 $f(0)$, 所以在该点也不连续(图 40).

3° 因为$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, 所以 f 在 $x=0$ 不连续(图 41).

4° 因为 f 在 $x=0$ 无极限 (§3.2 例 3), 所以 f 在该点不连续(图 42). $\square$

若函数 f 在一点 x_0 不连续, 则 x_0 叫做 f 的**间断点**, f 在点 x_0 **有间断**. 若 $f(x_0+0)$和 $f(x_0-0)$都存在、有限, 但

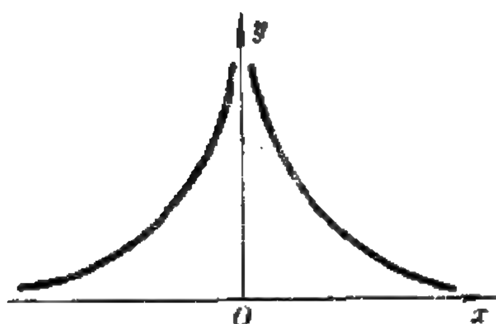


图 4'

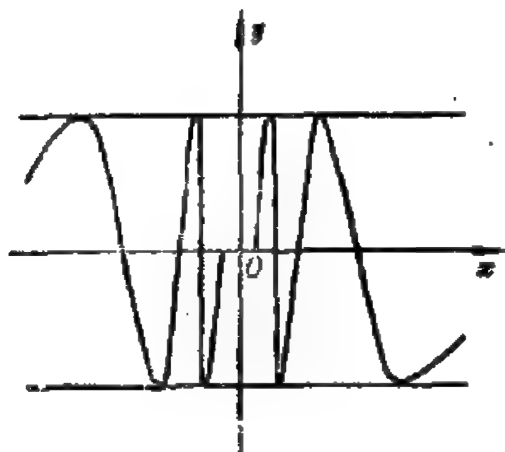


图 42

$$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$$

或

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$$

(如例 2 中的 1° 和 2°),则 x_0 叫做 f 的**跳跃点**, f 在点 x_0 有一个**跳跃**. 但对于后一种跳跃点 x_0, 显然只要改变函数在点 x_0 的值,就可使其在 x_0 连续. 因此这一种跳跃点 x_0 又叫做"可改不连续点". 如例 2 中的 2°, 只要改成 $f(0)=0$, 则 f 在 $x=0$ 就连续. 而前一种跳跃点 x_0 是无法改变为连续点的, 例 2 的 1° 中的点 $x=0$ 属此. 跳跃点又叫做**第一种间断点**, 非跳跃的间断点叫做**第二种间断点**. 在例 2 中, 1° 和 2° 中的 $x=0$ 是第一种间断点, 3°和4°中的 $x=0$ 是第二种间断点.

如果函数 f 在一点 x_0 有有限的极限 A, 但 f 在 x_0 无定义, 我们就补充定义 $f(x_0)=A$, 这样 f 就在点 x_0 连续. 例如设 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, 则 f 在 x_0 无定义; 但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, 因此我们就定义 $f(0)=0$, 这样 f 便在 $x=0$ 连续. 以后遇有这种情形我们就不再作说明. 例如, 若 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, 则就认为 $f(0)=1$(见 §3.2 例 2).

定义 2 若函数 f 在一点 x_0 的左旁有定义, 且 $f(x_0-0)=$

$f(x_0)$，则说 f 在点 x_0 为**左连续**．同样定义 f 在点 x_0 为**右连续**．

例如，例 2 中的 1° 在 $x=0$ 左连续，但不右连续．

定理 1 若函数 f 在一点 x_0 附近有定义，则 f 在 x_0 连续的充分必要条件是 f 在 x_0 同为左连续和右连续．

证明 由 § 3.1 定理 1，显然．

例 3 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<1, \\ x-1, & x\geqslant 1. \end{cases}$$

讨论函数 f 的连续性．

解 函数 f 在 $x\neq 1$ 的点上显然都是连续的．又

$$f(1-0)=1,\ f(1+0)=0,$$

所以 f 在 $x=1$ 不连续，$x=1$ 是跳跃点．但因 $f(1)=0$，所以 f 在 $x=1$ 右连续．▯

如果区间 I 含有端点，除去端点后所得开区间记为 I°．例如，若 $I=[a,b)$，则 $I^\circ=(a,b)$；若 $I=(-\infty,a]$，则 $I^\circ=(-\infty,a)$．I° 中的点叫做 I 的“内点”．

定义 3 若函数 f 在区间 I 的每一点上都连续，则说 f 在 I 上连续，f 是 I 上的**连续函数**．

但要补充说明：如果 I 含有左(右)端点，则 f 在 I 上连续的意思是在 I° 上连续，在左(右)端点上右(左)连续．

例如，例 3 中的函数在 $(-\infty,1)$ 上是连续的，在 $[1,+\infty)$ 上也是连续的．但在 $(-\infty,1]$ 上不连续，因为它在 $x=1$ 不左连续．

如果区间 I 是函数 f 的定义域，f 在 I 上连续，则径称 f 是连续函数．这一约定同样适用于其它一切类似的定义，不再作说明．例如，若说 f 是单调函数，即是说 f 在其定义域上是单调的．

如果函数 f 在区间 I 上连续，则在直观上其图象 $y=f(x)(x\in I)$ 是一条不断裂的“曲线”，这是连续的几何意义．区间上连续函

数的图象叫做“连续曲线”. 关于连续曲线的概念，我们在第二册第五章中还要给出一般的定义.

例 4 证明sin, cos和指数函数都是连续函数.

证明 已知sin和cos在 $x=0$ 都是连续的. 现在数轴上任取一点 x_0, 则(§3.2 习题 6 (5))

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\lim_{h\to 0}\sin(x_0+h)=\lim_{h\to 0}(\sin x_0\cos h+\cos x_0\sin h)$$
$$=\sin x_0.$$

即sin在其整个定义域 R 上连续，所以是连续函数. 同样可证cos也是连续函数.

关于指数函数，我们已知当 $a>0$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$(§3.2 例 4). 设 x_0 是数轴上任意一点，则

$$\lim_{x\to x_0}a^x=\lim_{h\to 0}a^{x_0+h}=\lim_{h\to 0}a^{x_0}\cdot a^h=a^{x_0}.$$

即指数函数在其整个定义域 R 上连续，是连续函数. □

定理 2 若函数 f 和 g 都在一点 x_0 连续，则函数

$$f\pm g,\quad fg,\quad f/g\quad (g(x_0)\neq 0)$$

也都在 x_0 连续.

证明 由定义 1 和§3.2 定理 3, 显然. □

例 5 研究函数tg的连续性.

解 因为 tg = sin/cos, 而由例 4, sin和cos都是全 R 上的连续函数，所以由定理 2, tg 在cos 不为 0 的地方，即在其定义域上是连续的，所以 tg 是连续函数. □

定理 3 设函数 f 在一点 x_0 连续. 令 $x=\varphi(t)$得

$$f(x)=g(t).$$

如果当 $t\to t_0$ ($t_0\pm 0$, $\pm\infty$, ∞)时 $x=\varphi(t)\to x_0$, 则

$$\lim_{t\to t_0}g(t)=f(x_0).$$

证明 任给 $\varepsilon>0$, 由定义 1, 存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

再由关于 φ 的假设，又存在 $d>0$，当 $0<|t-t_0|<d$ 时

$$|\varphi(t)-x_0|<\varepsilon.$$

所以

$$|g(t)-f(x_0)|=|f\circ\varphi(t)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

这就证明了定理. □

例 6 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(\sqrt[n]{n}\,\pi/2)$.

解 令 $x=\varphi(n)=\sqrt[n]{n}\,\pi/2$，由定理 3 和 §2.2 例 6 得

$$\lim_{n\to+\infty}\sin(\sqrt[n]{n}\,\pi/2)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1. \quad □$$

定理 4（复合函数的连续性） 设函数 φ 在一点 t_0 连续，函数 f 在点 $x_0=\varphi(t_0)$ 连续，则复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 t_0 连续.

证明 由定理 3 和 φ 的连续性,

$$\lim_{t\to t_0}f\circ\varphi(t)=f(x_0)=f\circ\varphi(t_0). \quad □$$

例如，由定理 2 和定理 4 立即可知下列式子定义的函数都是连续的:

$$f(x)=e^{\frac{x^2+1}{x-1}}\quad(x\neq1),\quad g(x)=\sin(1+\sqrt{x})\quad(x>0),$$

$$\mathrm{sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad 和\quad \mathrm{ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\quad(x\in R).$$

例 7 设 $F(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\,(x\geqslant0)$. 研究函数 F 的连续性.

解 令

$$f(x)=x\quad 和\quad g(x)=\sqrt{x}\quad(x\geqslant0).$$

则

$$(f+g)(x)=x+\sqrt{x},\qquad x\geqslant0,$$
$$g\circ(f+g)(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}},\qquad x\geqslant0,$$

$$(f+g\circ(f+g))(x)=x+\sqrt{x+\sqrt{x}}, \qquad x\geqslant 0,$$

$$g\circ(f+g\circ(f+g))(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}, \qquad x\geqslant 0.$$

因为 f 和 g 都是区间$[0,+\infty)$上的连续函数，反复应用定理 2 和定理 4，即知 $F=g\circ(f+g\circ(f+g))$ 也是$[0,+\infty)$上的连续函数. □

以上我们介绍了函数连续的概念，并具体地研究了一些初等函数的连续性. 那么，是否一切初等函数都是连续的呢？这个问题到 §4.3 中即可知道，答案是肯定的.

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) 函数在一点连续是什么意思？

(2) 函数在一点左连续和右连续各是什么意思？这和连续有何关系？何谓连续函数？

(3) 函数的间断点是什么意思？间断点有哪几种？

(4) 设 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，则函数 f 的定义域可如何理解？

(5) 设 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，能否定义 $f(0)$ 使其在 $x=0$ 连续？

(6) 设函数 f 在一点 x_0 附近有定义，$\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0)$，这是否表示 f 在 x_0 连续？

(7) 设函数 f 在一点 x_0 附近有定义，$\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$，这是否表示 f 在 x_0 连续？

(8) 一个区间上的连续函数在有理点都为 0，这是什么函数？

(9) 为什么不引用 §3.2 定理 7 来证明定理 3？

2. 研究下列式子定义的函数 f 在 $x=0$ 的连续性：

(1) $f(x)=|x|$.　　　　(2) $f(x)=[x]$.

(3) $f(x)=\begin{cases}(1+x^2)^{1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$　　　　(4) $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$　　　　(6) $f(x)=\operatorname{sgn}\sin x$.

3. 定出 a, b, c 使函数 f:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant -1,\\ ax^2+bx+c, & |x|<1, x\neq 0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

为一连续函数.

4. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x^2-2x+2}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}\sin\dfrac{\pi x}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+x^3+1}{x^3+x^2-1}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1+\pi x}{1+2x}$.　　(5) $\lim\limits_{x\to 1}\operatorname{tg}\dfrac{\sin\pi x}{4(x-1)}$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.　　(7) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

5. 讨论函数 $f+g$ 和 fg 在 x_0 的连续性, 设

(1) f 在 x_0 连续, g 在 x_0 不连续.

(2) f 和 g 在 x_0 都不连续.

6. 设函数 f 在 x_0 连续, 则 $|f|$ 和 f^2 都在 x_0 连续. 反之是否成立?

7. 设函数 f 在 x_0 连续, $f(x_0)>0$, 则当 x 充分靠近 x_0 时 $f(x)>\dfrac{1}{2}f(x_0)>0$.

8. 设函数 f 和 g 在 x_0 连续, 又

$$F(x)=\max(f(x),g(x)),\quad G(x)=\min(f(x),g(x)),$$

则函数 F 和 G 也在 x_0 连续.

9. 设

$$f^+(x)=\max(f(x),0),\ f^-(x)=-\min(f(x),0),$$

试用 f^+ 和 f^- 表示 f. 由题 8 可得什么结论?

10. 设函数 f 只有可改不连续点, 定义 $g(x)=\lim\limits_{y\to x}f(y)$, 则 g 是一连续函数.

11. 设函数 g 在 R 上单调, 定义 $G(x)=g(x+0)$, 则 G 在 R 上右连续.

12. 讨论 §3.1 习题 5 中的函数的连续性.

13. 设函数 f 在 R 上连续, 且对一切 x, y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证

明 $f(x)=ax$ 对一切 $x\in R$ 成立，其中 a 为一常数。

14. 设 a 和 b 是两个大于 1 的常数，函数 f 的定义域为 R，在 $x=0$ 附近有界，且对于一切 $x\in R$ 有 $f(ax)=bf(x)$。证明 f 在 $x=0$ 连续。

§ 4.2 连续函数的性质

现在我们要介绍连续函数的一些比较深刻的性质，这些性质是微积分学以至整个分析学经常要用到的。它们的证明都依赖于实数的连续性。为了便于初学者学习，我们把实数连续性的各等价命题和连续函数这些性质的证明都安排到第四章。这些性质在直观上都是很清楚的，因此理解它们并不难。在 § 4.1 中我们曾经谈到，如果函数 f 在一个区间上连续，则方程 $y=f(x)$ 在坐标平面上表示一条连续曲线，一条没有断裂的曲线，这是我们要讲的一些性质的直观背景。

定理 1（零值定理，B. Bolzano） 设 f 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则至少存在一点 $c\in(a,\ b)$ 使得 $f(c)=0$。

因为 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，所以点 $(a,f(a))$ 和点 $(b,f(b))$ 位于 x 轴的上下两边，因而联结这两点的连续曲线 $y=f(x)$ 必定要与 x 轴相交，设交于点 $(c,0)$，则就有 $f(c)=0$（图 43）。严格的分析证明见第四章 § 2.1。

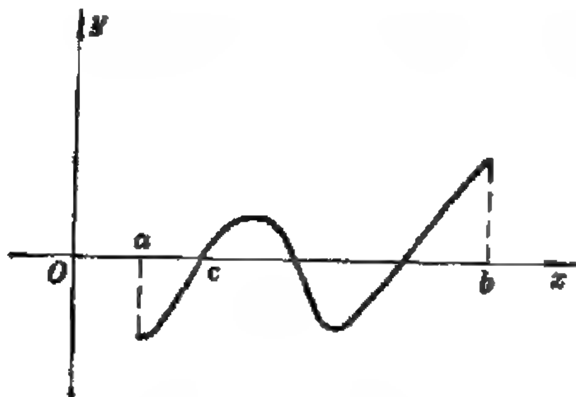


图 43

注　定理中关于函数连续的条件是不可缺少的. 函数只要在区间中有间断点，定理的结论就不一定成立. 例如，设

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

(图 44). 则 $f(-1)=-1, f(1)=1$ 异号，但不存在 $c\in(-1,1)$ 使 $f(c)=0$. 这是因为函数 f 在 $x=0$ 有一跳跃.

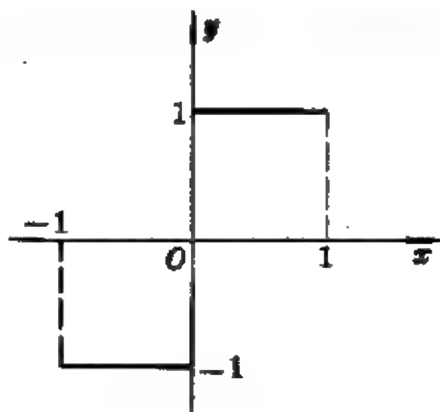


图 44

例 1　证明方程 $2^x=4x$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 中有根.

证明　设 $f(x)=2^x-4x, 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. 则就是要证函数 f 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 内有零点(即使 $f(x)=0$ 的点 x). 因为 $f(0)=1>0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}-2<0$; 又因 f 在区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上连续，所以由定理 1 必定存在 $c\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 使 $f(c)=0$. □

例 2　证明实系数的三次方程必有实根.

证明　设 $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ $(x\in R)$, 其中 p, q, r 均为实数. 现在我们来证明 f 有零点. 因为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x^3\left(1+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}+\frac{r}{x^3}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(1+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}+\frac{r}{x^3}\right)=-\infty,$$

所以必有 a 和 b 使 $f(a)<0, f(b)>0, a<b$. 而 f 是连续函数，故在 (a,b) 中必有 c 使 $f(c)=0$. □

从定理 1 容易推出:

定理 2（介值定理） 设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上连续，K 是以 $f(a)$ 和 $f(b)$ 为端点的闭区间，则对于任一 $r\in K$，必有一点 $c\in[a, b]$ 使 $f(c)=r$。也就是说，$f([a,b])\supset K$。

证明 只须考虑 $f(a)\neq r\neq f(b)$ 情形。不妨设 $f(a)<r<f(b)$。令

$$F(x)=f(x)-r,\quad x\in[a, b].$$

则 F 是 $[a, b]$ 上的连续函数，且 $F(a)<0, F(b)>0$。于是由定理 1，必有一点 $c\in(a, b)$ 使 $F(c)=0$，即 $f(c)=r$。□

这个定理进一步告诉我们，在区间 $[a, b]$ 上的连续函数，它的变化是连续不断的，它必须经过 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切数值。

推论 若 f 是定义在区间 I 上的连续函数，则值域 $J=f(I)$ 也是一个区间（可以退化为一点）。

证明 如果 f 是常值函数，则 J 退化为一点。如果 f 不是常值的，则 J 自然不是独点集。在 J 中任取两点 $y_1<y_2$。则在 I 中有两点 x_1 和 x_2 使 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$。由定理 2 易知 $J\supset[y_1, y_2]$。而 y_1 和 y_2 是任意的，所以 J 必是一个区间。□

不难明白，这个推论与定理 2 是等价的，它是定理 2 的等价形式。

定理 3 设 f 是定义在有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则 f 一定有最大值 M 和最小值 m。

这个定理的意思就是说，至少有一点 $x_1\in[a, b]$，使得 $f(x_1)=M$，且对一切 $x\in[a, b]$ 有

$$f(x)\leqslant M;$$

又至少有一点 $x_2\in[a, b]$，使得 $f(x_2)=m$，且对一切 $x\in[a, b]$ 有

$$f(x)\geqslant m.$$

M 和 m 分别就是 f 的最大值和最小值，即最大的和最小的函数值。这个定理的证明见第四章 § 2.1。

定理 2 和定理 3 告诉我们：有界闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 f，其值域 $f([a, b])$ 也是有界闭区间 $[m, M]$（图 45）.

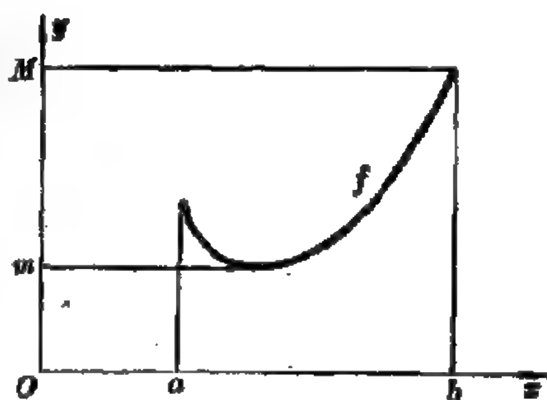


图 45

注　定理 2 中的区间必须同时是有界的和闭的. 例如，设 $f(x)=x$，则函数 f 在有界区间 $[0, 1)$ 和闭区间 $[0, +\infty)$ 上都是连续的，但显然 f 在这两个区间上都无最大值.

例 3　设

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}.$$

证明函数 f 有界.

证明　因为对一切 $x\in R$ 有

$$1-x^2+x^4=(1-x^2)^2+x^2>0,$$

所以 f 的定义域是 R. 显然 f 是连续函数. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，所以存在 $\Delta>0$，当 $|x|>\Delta$ 时 $|f(x)|<1$. 特别，f 在有界闭区间 $[-\Delta, \Delta]$ 上是连续的，因此由定理 3，f 在 $[-\Delta, \Delta]$ 上有最大值和最小值，所以 f 在 $[-\Delta, \Delta]$ 上有界. 设

$$|f(x)|\leqslant L,\quad |x|\leqslant\Delta,$$

则显然

$$|f(x)|\leqslant\max(L, 1),\quad x\in R.$$

即 f 有界. □

习　题

1. 回答下列问题：

(1) 零值定理是否对区间 $[a, b]$ 上的一切函数都成立？

(2) 区间上的连续函数的值域有何特征？

(3) 如果区间上的函数的值域是区间，则是否一定是连续函数？

(4) 函数的最大值和最小值是什么意思？

(5) 有界闭区间上的函数是否都有最大值和最小值？

(6) 闭区间或有界区间上的连续函数是否都有最大值和最小值？

(7) 有界闭区间上的连续函数是否一定有界？

(8) 有界闭区间上的连续函数的值域有何特征？

2. 设函数 f 在区间 I 上连续，且当 $x\in I$ 时 $f(x)\neq 0$，则 f 在 I 上不变号.

3. 设函数 f 在开区间 (a,b) 上连续，且 $f(a+0)$，$f(b-0)$ 异号，则存在 $c\in(a,b)$ 使 $f(c)=0$.

4. 证明：

(1) 方程 $x^5-3x+1=0$ 在区间 $[0,1]$ 中有根.

(2) 方程 $x2^x=1$ 在区间 $[0,1]$ 中有根.

(3) 方程（实系数）

$$x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

至少有一实根.

(4) 方程（实系数）

$$x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x+a_{2n}=0,\ a_{2n}<0$$

至少有两个实根.

(5) 方程

$$\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}=0,\ a_1,a_2,a_3>0,\ \lambda_1<\lambda_2<\lambda_3,$$

在区间 (λ_1,λ_2) 和 (λ_2,λ_3) 中各有一根.

(6) 方程 $x-\lambda\sin x=0\ (0\leqslant\lambda<1)$ 有唯一的根.

(7) 方程 $x-\lambda\sin x=b\ (0\leqslant\lambda<1,\ b>0)$ 在 $[0,\lambda+b]$ 中有一根.

(8) 方程 $\sin x=\frac{1}{x}$ 有无穷多个根.

5. 证明存在唯一的连续函数 f，对一切 $x\in R$，$y=f(x)$ 满足 Kepler 方程

$$y-\lambda\sin y=x,\quad 0\leqslant\lambda<1.$$

6. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明：

(1) 存在 $c\in[a,b]$ 使

$$f(c)=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)].$$

(2) 若 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 则存在 $c\in[a,b]$使

$$f(c)=\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b).$$

(3) 若 $x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$, 则存在 $c\in[a,b]$使

$$f(c)=\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

(4) 若 $x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$, 又 $t_1,\cdots,t_n\geqslant 0$, 且 $\sum_{i=1}^{n}t_i=1$, 则存在 $c\in[a,b]$ 使

$$f(c)=\sum_{i=1}^{n}t_if(x_i).$$

7. 设函数 f 在区间$[a,+\infty)$上连续, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在、有限, 则 f 在$[a,+\infty)$上有界.

8. 设函数 f 在 R 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在有限, 则 f 必有最大值或最小值.

9. (Brouwer)设函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续, $f([a,b])\subset[a,b]$, 则 f 在$[a,b]$中必有一"不动点": 即有一点 $x_0\in[a,b]$使 $f(x_0)=x_0$.

10. 设函数 f 和 g 在$[a,b]$上连续、f 单调、且有 $x_n\in[a,b]$使

$$g(x_n)=f(x_{n+1}),\qquad n\in N.$$

证明必有一点 $x_0\in[a,b]$使 $f(x_0)=g(x_0)$.

11. 设函数 f 在区间$[a,+\infty)$上连续有界, 则对于每一数λ, 存在数列 $x_n\to+\infty$ 使

$$\lim_{n\to+\infty}[f(x_n+\lambda)-f(x_n)]=0.$$

提示: 不妨设 $\lambda>0$. 如果存在自然数 n 使得

$$|f(x-\lambda)-f(x)|\geqslant\frac{1}{n}$$

对一切 $x\geqslant n$ 成立, 则可证

$$\lim_{m\to+\infty}f(n+m\lambda)=\infty.$$

§4.3 反函数的连续性

在 §1.3(定理 3)中我们已经知道, 严格单调的函数有反函数, 反函数也同样是严格单调的. 现在我们要进一步研究反函数的连

续性. 先讲一个引理.

引理 1 设函数 g 在区间 J 上单调, 如果 $I=g(J)$ 是一个区间, 则 g 在 J 上连续.

证明 不失一般性, 设 g 非减. (反证)设 $I=g(J)$ 是一个区间, 而 g 在 J 上有一个间断点 x_0, 则两个不等式

$$g(x_0-0)\neq g(x_0),\qquad g(x_0+0)\neq g(x_0)$$

中至少有一个成立. 不妨设第一个成立. 由于 g 非减, 我们得到

$$g(x_0-0)<g(x_0).$$

并且当 $x<x_0$ 时 $g(x)\leqslant g(x_0-0)$, 当 $x\geqslant x_0$ 时 $g(x_0)\leqslant g(x)$. 这样, I 便位于区间 $(g(x_0-0),g(x_0))$ 的两方(图 46), I 就不能是一个区间. 这与假设矛盾. ▯

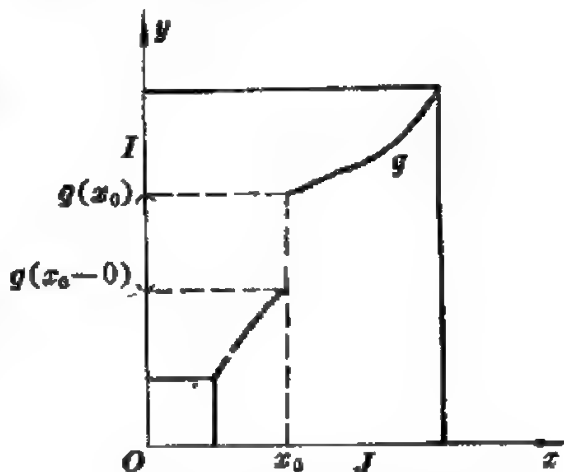


图 46

定理 1 设 f 是定义在区间 I 上的严格单调的连续函数, 值域为 J, 则反函数 f^{-1}, 定义域为 J, 也是严格单调的连续函数.

证明 由 §4.2 定理 2 的推论, J 是区间. 由 §1.3 定理 3, f 有严格单调的反函数 f^{-1}, 其定义域为区间 J, 值域为区间 I. 再由引理 1 便知 f^{-1} 是连续函数. ▯

我们已经知道, 在基本初等函数中, 三角函数和指数函数是连续的(§4.1 例 4, 例 5). 因为正弦 sin 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调和连续, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, 所以 $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=[-1,1]$. 由定理 1, 反函数 arc sin 是连续函数, 定义域是 $[-1,1]$. 同理 arccos 也是连续函数, 定义域是 $[-1,1]$. 因为 tg 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上严格单调和连续, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}+0\right)=-\infty$, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$

$=+\infty$, 所以 $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)=R$. 由定理 1, 反函数 arc tg 是连续函数, 定义域是 R. 因为以 a (不妨设 $a>1$)为底的指数函数在 R 上严格单调和连续, $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$, 所以其值域是区间 $(0,+\infty)$. 由定理1, 反函数 $\log_a$ 是连续函数, 定义域是$(0,+\infty)$. 再由 §4.1 定理 4, 因为 $x^\mu=e^{\mu\ln x}(x>0)$, 所以幂函数是连续函数, 定义域是$(0,+\infty)$. 这样我们便知道了所有基本初等函数都是连续的. 因为初等函数是由基本初等函数经有限次四则运算和复合而成的, 所以由 §4.1定理 2 和定理 4 就得:

定理 2 初等函数是连续函数.

既然初等函数是连续的, 则在其定义域中任意一点 x_0 处求极限只要将 x_0 代入就可以了. 例如

$$\lim_{x\to1}\sqrt{3x^2+\sqrt{2x-1}}=\sqrt{3\cdot1^2+\sqrt{2\cdot1-1}}=2,$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\sin^2x+\cos x)=\ln\left(\sin^2\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

注 以上我们由三角函数和指数函数的连续性和单调性, 应用 §4.2 定理 2 的推论, 我们才具体知道了它们的值域各是什么样的区间, 从而才知道了反三角函数和对数函数的定义域各是什么样的区间. 在 §1.3 和 §1.4 中我们虽已提出了反三角函数和对数函数, 但由于那时我们实际上并不真正知道三角函数和指数函数的值域, 从而也就不真正知道它们的反函数的定义域. 所以只有到了现在, 我们才算弄清楚了反三角函数和对数函数. 这也就是过去我们回避用对数证明 $\lim\limits_{x\to0^+}a^x=1$(§3.1 例 9)等极限的原因.

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 什么样的函数有连续的反函数?

(2) 反三角函数和对数函数为什么是连续的？

(3) 反三角函数和对数函数的定义域是什么？为什么？

(4) 初等函数为什么是连续的？

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{100+x^2}{1+100x^2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$.

(7) $\lim\limits_{x\to0}(1-\alpha x)^{\frac{1}{x}}$.

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $a>0$. 提示：令 $y=a^x-1$.

(10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}$, 提示：令 $(1+x)^\mu=e^y$.

(11) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b,c>0$.

(12) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^n$, $|x|<1$.

(13) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$.

(14) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

提示：考虑$\left[\dfrac{n^2}{i}\right]$，应用§2.6 习题 5(2).

3. 再证§2.2 习题 10.

4. 设函数 f 在区间 I 上连续，且是一对一的（即有反函数），则 f 是严格单调的.

第二章　一元函数的微分

第一节　导数和微分

§1.1　引言

在第一章中我们讨论了极限运算，这是因为数学分析中的一些运算都与极限有关．现在我们来讲数学分析中的主要运算之一，即一元函数的“求导”运算．

“求导”就是获得函数的“导数”．导数概念是十七世纪时从两个问题产生的，这两个问题就是“切线”问题和“速度”问题．

1）切线问题．我们考虑由方程 $y=f(x)$ 表示的曲线 L(图47)．在 L 上取两点 $P_0(x_0, f(x_0))$ 和 $P(x, f(x))$．联结 P_0 和 P 的直线 T 是 L 的一条“割线”，它的斜率是

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{QP}{P_0Q}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

当 x 向 x_0 移动时，点 P 沿着 L 向点 P_0 移动，割线 T 也随着变化，它的斜率 $\operatorname{tg}\varphi$ 也随着变化．如果当 $x\to x_0$ 时 $\operatorname{tg}\varphi$ 有极限 α:

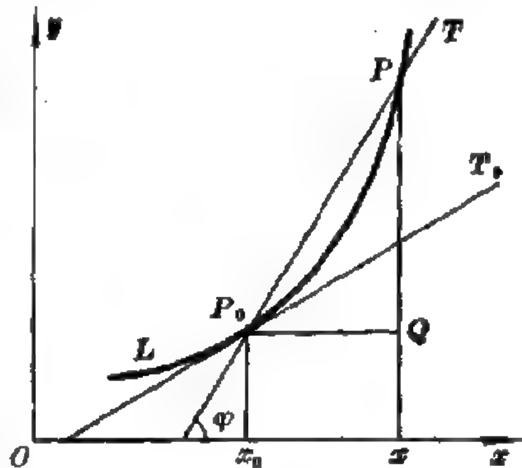


图　47

$$\alpha=\lim_{x\to x_0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\tag{1}$$

我们就把通过点 P_0 以 α 为斜率的直线 T_0 叫做曲线 L 在点 P_0 的“切线”．这就是说，我们把切线看作割线的极限位置．关于切线问题，我们在第二册第六章中还要进一步讨论．

2）速度问题．对于“速度”这个概念，我们是有感性认识的．例如，一辆汽车在3小时内行驶了150公里，它的速度就是$\frac{150}{3}=50$公里/时．但这只是它在三小时内的“平均速度”．实际上，汽车在这三个小时的行驶中，可能有时较快，有时较慢．显然，如果我们要进一步知道汽车快慢的变化情况，就需要把时间区间进行缩短来研究．

一般地，考虑一个质点作直线运动，它的位置x与时间t的关系记为$x=f(t)$（图48）．则质点由时刻t到t'这段时间内的平



图 48

均速度就是

$$\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}.$$

如果t'非常接近t，质点在这很短的时间内的快慢变化就不会很大，这个平均速度就能较好地反映质点在时刻t和t'之间的运动状态．这就导至我们考虑取极限，令$t'\to t$，我们把极限

$$v(t)=\lim_{t'\to t}\frac{f(t')-f(t)}{t'-t} \tag{2}$$

叫做质点在时刻t的“瞬时速度”或简称“速度”．

瞬时速度是运动学最基本的概念．由平均速度到瞬时速度，是我们在概念上的一个大的飞跃．下面来说明，如果我们知道了质点在每一个时刻t的瞬时速度$v(t)$，即知道了速度函数v，则就知道了质点运动快慢的全部变化情况．事实上，任意固定一个时刻t，由(2)式知道，只要t'很靠近t就有

$$v(t)\approx\frac{f(t')-f(t)}{t'-t},$$

所以

$$f(t')-f(t)\approx v(t)(t'-t).$$

如果$|v(t)|$很大，则$|v(t)(t'-t)|$也大，即位移变化$|f(t')-f(t)|$就大；反之位移变化就小．这就是说，速度函数 v 反映了质点运动何时较快，何时较慢，即反映了运动快慢的全部变化情况．

综合以上两个问题，对于一般的一个一元函数，我们考虑比式

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

其中 $x=x_0+h$．上式的分子表示当自变量由 x_0 变到 $x=x_0+h$ 时函数值的变化，分母是自变量的变化，比式表示当自变量 x 由 x_0 变到 x_0+h 时函数值平均变化了多少，叫做函数的"平均变化率"．这个概念，在几何上就相当于割线的斜率，在物理上就相当于平均速度．同样，当 $x\to x_0$ 即 $h\to 0$ 时如果比式的极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在并且有限，则此极限就叫做函数 f 在点 x_0 的"变化率"．这就相当于切线斜率和瞬时速度的概念．

我们看到，切线斜率和瞬时速度都是函数在一点的变化率．变化率问题除了有极大的普遍性以外，对于函数的研究也有极大的重要性，因此我们有必要对它进行专门的研究．函数在一点的变化率，通常叫做函数在一点的"导数"．这一章主要是研究导数并利用它研究函数的性质．

习　　题

1．回答下列问题：

(1) 质点作直线运动．何谓其平均速度？何谓其瞬时速度？若在时刻 t 的速度 $v(t)>0(<0)$，则说明什么问题？

(2) 质点作直线运动，如果我们知道了它的速度函数，为什么说我们就知道了它的快慢变化情况？

(3) 曲线 $y=f(x)$ 在一点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线是如何定义的?

(4) 何谓函数在一点的变化率? 它反映哪些物理量? 你能否举出若干?

2. 试求出抛物线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线.

§1.2 导数概念

前面我们由几何和物理问题提出了函数的变化率, 即导数的概念, 现在定义如下:

定义 1 设函数 f 在一点 x 的附近有定义, 如果极限

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

存在, 并且有限, 则说 f 在点 x 为可导; 并称这个极限为 f 在点 x 的导数(即变化率), 记为 $f'(x)$, 即

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

用"ε-δ"的语言来说, 这就是, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $0<|h|<\delta$ 时

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right|<\varepsilon.$$

由 §1.1 知道, 曲线 $y=f(x)$ 在一点 $(x_0, f(x_0))$ 的切线斜率就是导数 $f'(x_0)$, 这是导数的几何意义. 质点作直线运动, 其在时刻 t 的(瞬时)速度就是位移函数 f 在 t 的导数 $f'(t)$, 这是导数的一个物理意义.

再如, 设有细杆 AB(图 49). 记 A 端的坐标为 $x=0$, 细杆在区间 $[0,x]$ 上的质量为 $m(x)$. 则

$$\frac{m(x+h)-m(x)}{h}$$

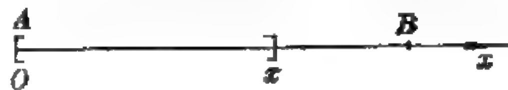


图 49

就是细杆在 x 和 $x+h$ 之间的平均线密度. 如果导数 $m'(x)$ 存在, 则 $m'(x)$ 就叫做细杆在点 x 处的"线密度". 又如, 以 $\theta(t)$ 表示由时刻 $t=0$ 到时刻 t 通过导线截面的电流, 则 $\theta'(t)$ 就是在时刻 t

的电流强度．这些都是由导数反映的物理量．

例 1 求正弦函数在 $x=0$ 的导数 $\sin'0$，并写出曲线 $y=\sin x$ 在原点处的切线方程．

解 由定义 1 和第一章 §3.2 例 2，

$$\sin'0=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-\sin 0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1.$$

根据导数的几何意义，这也就是曲线 $y=\sin x$ 在原点 $(0,0)$ 处的切线斜率．故所求切线方程是

$$y=x. \quad \square$$

定义 2 设函数 f 在一点 x 的右旁 $[x,x+r)$ 有定义，若极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

存在、有限，则称此极限为 f 在点 x 的**右导数**，记为 $f'_+(x)$．同样定义**左导数** $f'_-(x)$．

显然，函数 f 在一点 x 可导的充分必要条件是右导数 $f'_+(x)$ 和左导数 $f'_-(x)$ 都存在且相等，这时

$$f'(x)=f'_+(x)=f'_-(x).$$

例 2 设 $f(x)=|x|$（图 50），证明函数 f 在 $x=0$ 不可导．

证明 因为

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1,$$

左、右导数虽都存在，但不相等，所以 f 在 $x=0$ 不可导． $\square$

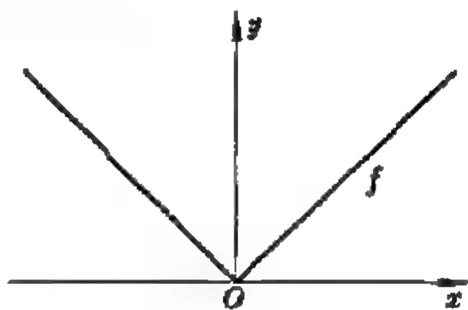


图 50

定义 3 设函数 f 在区间 I 上有定义，则 f 在 I 上可导的意思是：f 在每一点 $x\in I^\circ$ 都可导；并且，如果 I 含有左（右）端点，则 f 在左（右）端点上有右（左）导数．

若函数 f 在区间 I 上可导，则对于每一点 $x\in I$ 便得一导数 $f'(x)$，若 x 是左(右)端点，则 $f'(x)$ 是右(左)导数 $f'_+(x)$($f'_-(x)$)，于是便得一定义在 I 上的函数 f'，叫做 f 在 I 上的**导函数**. 导函数也简称为导数.

例如，例 2 中的函数 f，易知当 $x<0$ 时 $f'(x)=-1$；当 $x>0$ 时 $f'(x)=1$. 又 $f'_-(0)=-1$，$f'_+(0)=1$. 所以 f 在区间 $(-\infty,0]$ 和 $[0,+\infty)$ 上分别是可导的. 但由于 f 在 $x=0$ 不可导，所以它在 $(-\infty,+\infty)$ 上不可导.

下面我们先来计算几个基本初等函数的导函数.

例 3 设 $f(x)=c$ $(x\in R)$. 求 f'.

解 由定义 1，对于一切 $x\in R$ 有

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0,$$

即常值函数的导函数是 0. □

例 4 求正弦函数 sin 的导函数.

解 由定义 1，对于一切 $x\in R$ 有

$$\sin' x=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

再由第一章 §3.2 例 2 和 cos 的连续性即得

$$\sin' x=\cos x,\qquad x\in R. \ □$$

第一章 §3.2 例 2 中的极限，就是为求 sin 的导函数作准备的. 我们注意那里的结果当角度单位是弧度时才成立. 由此可见，采用弧度制可使正弦函数以至其它三角函数的求导运算特别简单. 因此在分析学中角度都采用弧度制.

同法可得(习题)

$$\cos' x=-\sin x,\quad x\in R.$$

例 5 求对数函数 $\log_a$ 的导函数.

解 由定义 1, 对于一切 $x>0$ 有

$$\log_a' x=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1}{x}\log_a(1+u)^{\frac{1}{u}}.$$

再由第一章 §3.2 例 5 和对数函数的连续性即得

$$\log_a' x=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a},\quad x>0.\ \square$$

在上式中, 特别取 $a=e$ 又得

$$\ln' x=\frac{1}{x},\quad x>0.$$

定理 1 若函数 f 在一点 x_0 可导, 则 f 在 x_0 连续.

证明 由假定, 极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在、有限, 因此

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=0.$$

这就是要证的. $\square$

注 定理 1 的逆不成立. 即由函数在一点的连续性不能断言它在该点可导. 如例 2 中的函数 f 在 $x=0$ 是连续的, 但在 $x=0$ 不可导.

设函数 f 有导函数 f'. 令 $y=f(x)$, 视 x 和 y 为变量, 则记 $y'=f'(x)$, 把它叫做"因变量 y 关于自变量 x 的导数", 它还是一个因变量. 记 $y'|_{x=x_0}=f'(x_0)$, 叫做 y 关于 x 在点 x_0 的导数.

例如, 若 $y=\sin x$, 则 $y'=\cos x$, $y'|_{x=0}=1$. 又如, 若 $y=x^2$, 则 $y'=2x$(习题 2(1)).

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 函数在一点可导是什么意思?

(2) 何谓函数在一点的左、右导数? 它们与导数有何关系?

(3) 函数在区间上可导是什么意思? 函数在区间上的导函数是什么意思?

(4) 可导与连续有何关系?左、右导数与连续有何关系?

(5) 如果角度不以弧度为单位,则 sin 的导数如何?

(6) 设函数 f 在 $x=0$ 可导,且 $f(0)=0$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$?

(7) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=$? $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=$?

(8) 设函数 f 在 x_0 可导,则($n\in N$)

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right]=?$$

2. 设

(1) $f(x)=x^n$, n 是自然数,求 f'.

(2) $f(x)=\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$. 求 $f'(x)(x>0)$;并求 $f'(1)$, $f'(2)$. 又问 f 在 $x=0$ 是否可导? $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=$?

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ $(x\in R)$. 求 $f'(x)(x\neq 0)$. f 在 $x=0$ 是否可导? $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=$?这在几何上说明什么(画图)?

3. 设 $f(x)=x(x-1)^2(x-2)^3$ $(x\in R)$. 由定义求 $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.

4. 设 $f(x)=o(x-x_0)$ $(x\to x_0)$. 问在什么条件下 f 在 x_0 可导? 导数为何?

5. 设函数 f 在 x_0 可导,则

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=f'(x_0).$$

反之,若此极限存在、有限,f 在 x_0 是否可导?

6. 设函数 φ 在 $x=a$ 连续,又在 $x=a$ 附近有 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$, $g(x)=|x-a|\varphi(x)$. 则 f 在 $x=a$ 可导,$f'(a)=$?g 在 $x=a$ 何时可导?

7. 设函数 f 在 $x=0$ 可导，问 $|f|$ 在 $x=0$ 何时可导？何时不可导？

8. 在抛物线 $y=x^2$ 上哪一点的切线 (1) 平行于直线 $y=4x-5$？ (2) 垂直于直线 $2x-6y+5=0$？ (3) 与直线 $3x-y+1=0$ 交成 45° 角？

9. 过 x 轴上一点 A 作 x 轴的垂线，交抛物线 $y=ax^2$ 于 B 点，过 B 点作抛物线的切线交 x 轴于 C 点. 证明 C 点平分线段 OA.

10. 下列各式定义的函数 f 在 $x=0$ 是否可导？设

(1) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 0,\\ x-1, & x<0.\end{cases}$ (2) $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$.

(3) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$. (4) $f(x)=|\sin x|$.

11. 设 a, b 为常数，问 a, b 为何时函数 f 在 x_0 可导，设

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0.\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0.\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}h(x), & x\leqslant x_0,\\ ax+b, & x>x_0,\end{cases}$ 其中 h 在 x_0 可导.

12. 将一物体垂直向上发射，在时刻 t 的高度为

$$h(t)=v_0t-16t^2,$$

其中 v_0 是一常数.

(1) 证明 v_0 是物体的初速.

(2) 何时物体的速度为 0？

(3) 物体返回地面时的速度为何？

(4) 初速 v_0 为何时，物体在 10 秒时返回地面？

(5) 证明物体以等加速度(速度的变化率)运动.

13. 应如何定义两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在相交处的夹角？并求两条抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=\sqrt{x}$ 的夹角.

14. 设函数 f 在点 a 可导，且 $f(a)\neq 0$. 求(n 为自然数)

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right|^n.$$

15. 证明 Riemann 函数(第一章 §3.1 习题 5 (2))处处不可导.

提示：设 $x_0=0.a_1a_2\cdots$ 为无理数，$h=-0.0\cdots0a_{n+1}a_{n+2}\cdots$，考虑

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

16. 设函数 f 在 $x=0$ 可导，$n\in N$，$a_n\to 0^-$，$b_n\to 0^+$，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}=f'(0).$$

提示：记

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)+\alpha(x),$$

则 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$.

§1.3 求导法则

我们已经讲了导数的概念，求一个函数的导数简称"求导"．求导是对于函数的一种运算．在数学中，凡是一种运算都服从一些基本法则(例如极限运算那样)，求导运算也是这样．对于具体的函数，我们不能都像 §1.2 中的例子那样从定义去求导，尤其当函数比较复杂时，这样去求导是很困难的．因此，我们有必要弄清楚求导的一些基本法则．

定理 1 (求导的四则运算) 如果函数 f 和 g 在一点 x 可导，则函数 $f+g$，cf (c 是常数)和 fg 也在 x 可导；如果 $g(x)\neq 0$，则函数 f/g 也在 x 可导，且

1) $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$；

2) $(cf)'(x)=cf'(x)$ (c 是常数)；

3) $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $\quad g(x)\neq 0$.

证明 1) 因为

$$\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

由假定，f 和 g 均在 x 可导，令 $h\to 0$ 即得证。

2）显然.

3）因为

$$\frac{(fg)(x+h)-(fg)(x)}{h}=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h},$$

由假定，f 和 g 均在 x 可导，又由 §1.2 定理 1，g 在 x 连续，令 $h\to 0$ 即得证.

4）因为

$$\frac{1}{h}\left[\frac{f}{g}(x+h)-\frac{f}{g}(x)\right]=\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right]$$

$$=\frac{1}{g(x+h)g(x)}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right].$$

由假设，仍应用 g 在 x 的连续性，令 $h\to 0$ 即得证. □

例 1 设 $y=x^2\sin x-\ln x$，求 y'.

解 由定理 1 和 §1.2 例 4 和例 5，

$$y'=2x\sin x+x^2\cos x-\frac{1}{x}.\ \Box$$

例 2 求 tg 和 ctg 的导数.

解 由定理 1 的 4)，

$$\mathrm{tg}'x=\frac{\sin' x\cos x-\sin x\cos' x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

同样可得

$$\mathrm{ctg}'x=-\frac{1}{\sin^2 x}.\ \Box$$

定理 2（复合函数求导） 设函数 φ 在一点 x 可导，函数 f 在点 $u=\varphi(x)$ 可导，则复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 x 可导，且

$$(f\circ\varphi)'(x)=f'(u)\varphi'(x)=(f'\circ\varphi)(x)\varphi'(x).\qquad(1)$$

证明 设

$$F(y)=\begin{cases}\dfrac{f(u+y)-f(u)}{y}, & y\neq 0,\\ f'(u), & y=0,\end{cases}$$

其中 $u=\varphi(x)$是固定的一点. 由假设, f 在 u 可导, 所以

$$\lim_{y\to 0}F(y)=f'(u)=F(0),$$

即F在 $y=0$ 连续. 令

$$y=r(h)=\varphi(x+h)-\varphi(x).$$

则易见

$$\frac{f\circ\varphi(x+h)-f\circ\varphi(x)}{h}=\frac{f[\varphi(x+h)]-f[\varphi(x)]}{h}$$

$$=F\circ r(h)\cdot\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}.$$

由假设, φ 在 x 可导, 所以当 $h\to 0$ 时 $y=r(h)\to 0$(§1.2 定理 1). 在上式中令 $h\to 0$, 由第一章 §4.1 定理 3 即得证. □

如果函数 f 和 φ 都有导函数, 令 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, 则复合函数求导公式(1)就可写成

$$y'_x=y'_u u'. \tag{2}$$

式中 y'_x 是 y 关于 x 的导数, 即$(f\circ\varphi)'(x)$; y'_u是 y 关于 u 的导数, 即 $f'(u)$. 二者是不同的. 由此, 应用复合函数求导法就是要正确地设出"中间变量" u.

例 3 设 $y=\cos(5x^2+x+2)$, 求 y'.

解 令 $u=5x^2+x+2$, 则 $y=\cos u$, 由(2)式得

$$y'=y'_x=y'_u u'=\cos' u\cdot u'=(-\sin u)u'$$
$$=-(10x+1)\sin(5x^2+x+2).\ □$$

例 4 设 $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$, 求 y'.

解 令 $u=\dfrac{x-1}{x+1}$, 则 $y=u^2$, 由(2)式得

$$y' = y'_u u' = 2uu' = 4\frac{x-1}{(x+1)^3}. \quad \square$$

例 5 设 $f(x)=\ln|x| \quad (x\neq 0)$，证明

$$f'(x)=\frac{1}{x}, \qquad x\neq 0.$$

证明 当 $x>0$ 时 $f(x)=\ln x$，所以

$$f'(x)=\ln' x=\frac{1}{x}.$$

当 $x<0$ 时 $f(x)=\ln(-x)$. 令 $u=-x$，由(2)式得

$$f'(x)=(\ln' u)u' = -\frac{1}{u}=\frac{1}{x}. \quad \square$$

定理 3（反函数求导） 设函数 f 的定义域为区间 I，值域为 J. 若 f 在 I 上可导，且当 $y\in I$ 时 $f'(y)>0$（或 $f'(y)<0$），则 f 有反函数 f^{-1} 在 J 上可导，且当 $x\in J$ 时

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}, \tag{3}$$

其中 $y=f^{-1}(x)$.

证明 因为 f 在 I 上可导，所以 f 在 I 上连续. 设 $f'(y)>0$ $(y\in I)$，由下面 § 2.2 定理 2 即知 f 在 I 上严格增. 再由第一章 §4.3 定理 1，f 有严格增的连续反函数 f^{-1}，定义域为 J（一定是区间）. 令 $y=f^{-1}(x) \quad (x\in J)$. 任取 $x_0\in J$. 令 $y_0=f^{-1}(x_0)$，则当 $x\to x_0$ 时 $y\to y_0$，并且当 $x\neq x_0$ 时 $y\neq y_0$. 于是由第一章 §3.2 定理 7 即得

$$(f^{-1})'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(x_0)}{x-x_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{y-y_0}{f(y)-f(y_0)}$$

$$=\frac{1}{f'(y_0)}. \quad \square$$

我们还可以从几何直观上来看等式(3). 方程 $x=f(y)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 表示同一条曲线，设此曲线在点 (x_0, y_0) 的切线 l 关于 x 轴

和 y 轴的倾角分别是 α 和 β（图 51），则

$$f'(y_0)=\mathrm{tg}\beta, \qquad (f^{-1})'(x_0)=\mathrm{tg}\alpha.$$

但 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，因此应有

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\beta}.$$

即是(3)式.

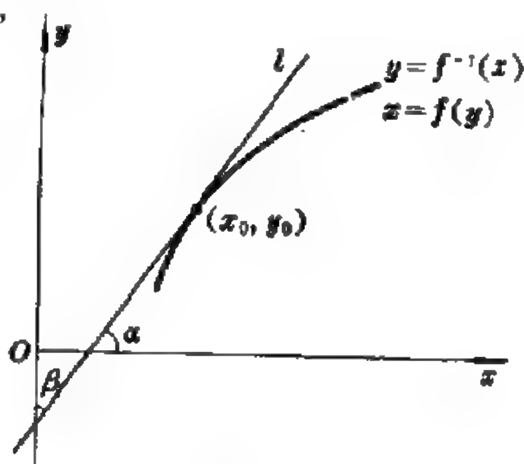


图 51

例 6 求指数函数的导函数.

解 设 $g(x)=a^x$ $(x\in R)$. 设 $a>1$（$0<a<1$ 同理）. 则 g 是对数函数 $\log_a$ 的反函数. $\log_a$ 的定义域是 $I=(0,+\infty)$，值域是 $J=R$. 又 $\log_a$ 在 I 上可导（§1.2 例 5），且当 $y\in I$ 时

$$\log_a' y=\frac{1}{y\ln a}>0.$$

根据定理 3，反函数 g 在 $J=R$ 上可导，且当 $x\in R$ 时

$$g'(x)=\frac{1}{\log_a' y}=y\ln a=g(x)\ln a=a^x\ln a. \ \square$$

特别，若 $g(x)=e^x$ $(x\in R)$，则

$$g'(x)=e^x, \quad x\in R. \tag{4}$$

即 $g'=g$. 这就使得以 e 为底的指数函数是一个很特殊的函数. 由于这个原故，今后我们研究的指数函数大多以 e 为底，对数大多是自然对数.

例 7 求反正弦函数 arc sin 的导函数.

解 当 $y\in I=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时 $\sin' y=\cos y>0$. 又 $\sin\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=J=(-1,1)$. 因此由定理 3，当 $x\in J$ 时

$$\arcsin' x=\frac{1}{\sin' y}=\frac{1}{\cos y},$$

其中 $y=\arcsin x$. 但

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

(现在 $\cos y>0$, 故根号前取正号), 所以

$$\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x|<1. \ \square$$

同法可得(习题)

$$\arccos' x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad |x|<1,$$

$$\operatorname{arctg}' x=\frac{1}{1+x^2}, \qquad x\in R,$$

$$\operatorname{arcctg}' x=-\frac{1}{1+x^2}, \qquad x\in R.$$

例 8 求幂函数的导函数.

解 设 $f(x)=x^\mu \quad (x>0)$. 因为

$$f(x)=x^\mu=e^{\mu\ln x}, \quad x>0,$$

由定理 2 和(4)式即得

$$f'(x)=e^{\mu\ln x}\frac{\mu}{x}=\mu x^{\mu-1}, \quad x>0. \ \square$$

基本初等函数求导公式表

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c(常数)	0	a^x	$a^x\ln a$
x^μ	$\mu x^{\mu-1}$	e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$		

以上我们研究了求导法则，并求出了全部基本初等函数的导函数．因为初等函数是由基本初等函数经有限次四则运算和复合而成的，所以由定理 1 和定理 2，求初等函数的导函数就归结为求基本初等函数的导函数．这样，初等函数的求导问题就完全解决了．上面我们将基本初等函数的导函数汇集成表供参考．

例 9 设 $y=(\arcsin x^3)\ln x-5a^{x+x^4}$，求 y'．

解 因为

$$(\arcsin x^3)'=(\arcsin' u)u'=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}},$$

$$(a^{x+x^4})'=(a^u)'u'=a^u\ln a\cdot(1+4x^3)$$
$$=(1+4x^3)a^{x+x^4}\ln a.$$

所以

$$y'=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\ln x+\frac{\arcsin x^3}{x}-5(1+4x^3)a^{x+x^4}\ln a.\ \square$$

习　　题

1．回答下列问题：

(1) 求导四则运算的条件是什么？

(2) 复合函数求导的条件和公式是什么？

(3) 在什么条件下，函数有可导的反函数？反函数的导数为何？

2．求 y'_x，设

(1) $y=x^3-2x+6$．

(2) $y=\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt{a}-\frac{1}{a}$．

(3) $y=a\cos x+b\sin x$．

(4) $y=\sqrt[5]{x^3}+x\sin a$．

(5) $y=3\ln x^2+ae^x$．

(6) $y=a\log_b cx+ab^x$．

(7) $y=x\sin x$．

(8) $y=a\operatorname{tg}x+\operatorname{arctg}x$．

(9) $y=\sqrt[3]{x}\cos x$．

(10) $y=\csc x+\operatorname{ctg}x$．

(11) $y=(x^3+1)(ax+b)$．

(12) $y=\frac{ax+b}{cx+d}$．

(13) $y=\frac{3x^2+9x-2}{2x+1}$．

(14) $y=x\ln x$．

(15) $y=a^x \operatorname{tg} x$.

(16) $y=\arcsin x+x^2 \operatorname{arcctg} x$.

(17) $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

(18) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

(19) $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$.

(20) $y=x(\ln x)\sin x$.

(21) $y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x \operatorname{arcctg} x$.

(22) $y=\sin(\omega x+\varphi)$.

(23) $y=(x^3-x+1)^3$.

(24) $y=e^{ax}\sin bx$.

(25) $y=\sin^2 x$.

(26) $y=\sqrt{1-x^2}$.

(27) $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2$.

(28) $y=\arcsin\sqrt{x}$.

(29) $y=\operatorname{arctg}(1+x^2)$.

(30) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

(31) $y=\ln(\sin x+\cos x)$.

(32) $y=a^{\sin x}$.

(33) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(34) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln\sin x$.

(35) $y=\dfrac{e^{ax}(\alpha\sin\alpha x+\beta\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}$.

(36) $y=\dfrac{1}{x}(2\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)$.

(37) $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

(38) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-(\cos x)\ln\operatorname{tg} x$.

3. 试从 $1+x+\cdots+x^n$ 求出下列式子的和:

(1) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$, 并算出 $1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$.

(2) $1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$.

4. 回答下列问题:

(1) 若函数 f 在 x_0 可导, g 在 x_0 不可导, 则函数 $f+g$ 和 fg 在 x_0 是否可导?

(2) 若函数 f 和 g 在 x_0 都不可导, 则函数 $f+g$ 和 fg 在 x_0 是否可导?

(3) 若函数 f 在 $u=\varphi(x)$ 可导, 函数 φ 在 x 不可导, 则复合函数 $f\circ\varphi$ 在 x 的可导性如何?

(4) 若函数 f 在 $u=\varphi(x)$ 不可导, 函数 φ 在 x 可导, 则 $f\circ\varphi$ 在 x 的可导性如何?

(5) 若函数 f 在 $u=\varphi(x)$ 不可导, 函数 φ 在 x 也不可导, 则 $f\circ\varphi$ 在 x 的

可导性如何?

5. 若 f 是一可导的周期为 T 的函数,则 f' 也是周期为 T 的函数.

6. 若 f 是一可导的偶(奇)函数,则 f' 为奇(偶)函数.

7. 设 f 是一个二次多项式,且 $f(a)=f(b)=0$. 证明 f 在 $[a,b]$ 上不变号的充分必要条件为 $f'(a)f'(b)\leqslant 0$.

8. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续,$f(a)=f(b)=0$, 且 $f'_+(a)f'_-(b)>0$. 证明 f 在 (a,b) 中至少有一个零点.

§1.4 补充例题

复合函数求导公式(§1.3(1)式和(2)式)显然也适用于多次复合. 设函数 f 在点 $u=\varphi(v)$ 可导,函数 φ 在点 $v=\psi(x)$ 可导,函数 ψ 在点 x 可导,则复合函数 $F=f\circ\varphi\circ\psi$ 在点 x 可导,且

$$F'(x)=f'(u)\varphi'(v)\psi'(x). \tag{1}$$

如果令 $y=f(u)$, $u=\varphi(v)$, $v=\psi(x)$, 且函数 f,φ,ψ 均有导函数,则(1)式就可以写成

$$y'_x=y'_u\cdot u'_v\cdot v'_x. \tag{2}$$

例1 设 $y=\sin^5(x+x^3)$, 求 y'.

解 令 $y=u^5$, $u=\sin v$, $v=x+x^3$, 则由(2)式,

$$y'=5u^4\cos v\cdot(1+3x^2)=5(1+3x^2)\sin^4(x+x^3)\cos(x+x^3). \quad \square$$

在对复合函数求导法熟练以后,自然就不必设出全部中间变量.

例2 设 $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$, 求 y'.

解 $y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}(x+\sqrt{a^2+x^2})'$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}},\ x\in R. \quad \square$$

例3 设 $y=\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)(x-4)^2}}$, 求 y'.

解 取对数得

$$\ln y=\frac{1}{3}[\ln(x-1)+2\ln(x-2)-\ln(x-3)-2\ln(x-4)].$$

两边求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x-4}\right).$$

以 y 代入即得 y'. □

例 4　设 $y=|x+1|^3$, 求 y'.

解　当 $x\geqslant -1$ 时 $y=(x+1)^3$, 所以

$$y'=3(x+1)^2.$$

当 $x\leqslant -1$ 时 $y=-(x-1)^3$, 所以

$$y'=-3(x+1)^2.$$

由以上二式得

$$y'_+|_{x=-1}=y'_-|_{x=-1}=0,$$

所以 $y'|_{x=1}=0$. 综合起来就是

$$y'=3(x+1)^2\operatorname{sgn}(x+1).\ □$$

例 5　设

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

求导函数 f', 并说明其连续性.

解　当 $x\neq 0$ 时有

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

在点 $x=0$ 我们只能由导数定义求导:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\dfrac{1}{h}-0}{h}=0.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在, 故导函数 f' 在 $x=0$ 不连续. □

下面我们解两个物理问题.

例 6 汽车前灯的反光镜是由抛物线绕对称轴旋转而成的旋转抛物面. 这种反光镜就是利用抛物线的光学特性: 若光源置于抛物线的焦点上, 则光线经抛物线反射成一束平行于对称轴的光线(图 52). 试证明之.

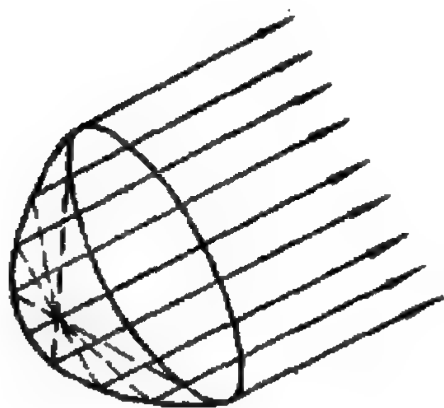


图 52

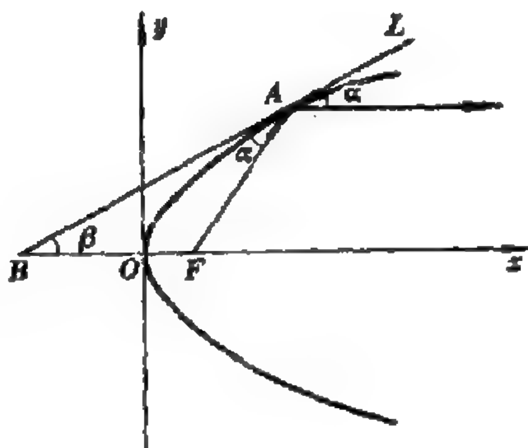


图 53

证明 设抛物线的方程为

$$y^2 = 2px, \tag{3}$$

则焦点是 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$(图 53). 在抛物线上任取一点 $A(x_0, y_0)$, 过 A 点作切线 L, 记 L 与线段 AF 的夹角为 α, L 与 x 轴的夹角为 β. 根据光学原理, 光线的入射角等于反射角. 因此, 如果我们能证明 $\alpha = \beta$, 则就证明了反射光线平行于 x 轴, 即对称轴. 记 L 与 x 轴的交点为 B, 也就是要证明 $AF = BF$.

将抛物线方程(3)两边求导得

$$2yy' = 2p,$$

所以

$$y' = \frac{p}{y}.$$

因此抛物线在点 $A(x_0, y_0)$ 的切线 L 的斜率为

$$y'|_{x=x_0} = \frac{p}{y_0},$$

故 L 的方程是

$$y-y_0=\frac{p}{y_0}(x-x_0).$$

在上式中令 $y=0$ 即得 B 点的坐标为 $(-x_0, 0)$. 因此

$$BF=\left|\frac{p}{2}+x_0\right|.$$

而

$$AF=\sqrt{\left(x_0-\frac{p}{2}\right)^2+y_0^2}=\sqrt{\left(x_0-\frac{p}{2}\right)^2+2px_0}$$
$$=\left|x_0+\frac{p}{2}\right|=BF,$$

即为所证. □

例 7 有一底半径为 R 厘米, 高为 h 厘米的正圆锥容器, 今以每秒 A(厘米)^3 的速度向容器内注水. 试求当容器内水位等于锥高一半时, 水面上升的速度.

解 以 $x=f(t)$ 表示在时刻 t 容器内的水位(图 54), 我们就是要计算当 $x=\frac{h}{2}$ 时 x'_t 的值. 在时刻 t 容器内水的体积是 At, 这也就是下底半径为 R, 上底半径为 $r=\varphi(t)$, 高为 $x=f(t)$ 的圆台的体积. 由三角形相似性得

$$r=\frac{R}{h}(h-x),$$

所以

$$At=\frac{1}{3}\pi R^2h-\frac{1}{3}\pi\frac{R^2}{h^2}(h-x)^3.$$

两边对 t 求导得

$$A=\frac{\pi R^2}{h^2}(h-x)^2x'_t,$$

所以

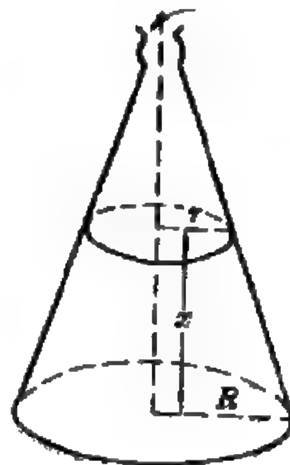


图 54

$$x_t'\Big|_{x=\frac{h}{2}}=\frac{4A}{\pi R^2}.\quad \square$$

习 题

1. 求 y'_x, 设

(1) $y=\sin^n \frac{x^n}{n}$.

(2) $y=\sqrt{1+e^{2x}}$.

(3) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$.

(4) $y=e^{\sqrt{x+1}}$.

(5) $y=e^x-e^{x^2}+e^{e^x}$.

(6) $y=\ln\ln\sin x$.

(7) $y=\ln\ln^2\ln^3 x$.

(8) $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

(9) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$.

(10) $y=\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$.

(11) $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.

(12) $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$.

(13) $y=e^{-\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$.

(14) $y=10^{x^x}$.

(15) $y=\sec^2\frac{x}{a^2}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{b^2}$.

(16) $y=\arccos\cos^2 x$.

(17) $y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$.

(18) $y=\operatorname{arctg}e^x-\ln\sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

(19) $y=a^x+x^a+x^x$.

(20) $y=\sqrt[x]{a}+\sqrt[a]{x}+\sqrt[x]{x}$.

(21) $y=(\sin x)^{\cos x}+(\cos x)^{\sin x}$.

(22) $y=\sin x^{\sin x}$.

(23) $y=x^{x^a}+x^{a^x}+a^{x^x}$.

(24) $y=x^{x^x}$.

(25) $y=\frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.

(26) $y=\frac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{x^2+2x}}$.

(27) $y=\sqrt[3]{\frac{1-x^2+x^4}{1+x^2+x^4}}$.

(28) $y=(x-a_1)^{a_1}(x-a_2)^{a_2}\cdots(x-a_n)^{a_n}$.

(29) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

2. 证明

(1) $\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.

(2) $(f_1 \cdots f_n)'(x) = \sum_{i=1}^{n} (f_1 \cdots f_{i-1} f'_i f_{i+1} \cdots f_n)(x)$.

(3) $$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{i1}(x) & \cdots & f'_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix},$$

并计算

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}'.$$

3. 求函数 f 的导数和左、右导数，设

(1) $f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & x \overline{\in} (a, b). \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{e}, & |x| > 1. \end{cases}$

(3) $f(x) = e^{a|x|} + e^{-b|x|}$.

(4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

4. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

其中 n 为自然数. 问：当 n 为何值时

(1) f 连续？(2) f 可导？(3) f 有连续导函数？

5. 证明双曲线 $xy = a$ 的切线与坐标轴所成三角形的面积为常数.

6. 若圆半径以 2 厘米/秒的速度增加，问当半径为 10 厘米时圆面积增加的速度为何？

7. 矩形一边长为 20 米，另一边长为 15 米，若第一边以 1 米/秒的速度

减少，而第二边以 2 米/秒的速度增加．问矩形面积和对角线的变化速度为何？

8．水自高为 18 厘米，底半径为 6 厘米的圆形漏斗流入直径为 10 厘米的圆柱形桶内．已知漏斗中水深为 12 厘米时水面下降速度为 1 厘米/秒，求桶中水面上升的速度．

9．设函数 f 和 g 都可导，求函数 F 的导函数，设

(1) $F(x)=\sqrt[f(x)]{g(x)}$，处处 $f(x)\neq 0, g(x)>0$．

(2) $F(x)=\log_{f(x)}g(x)$，处处 $f(x)>0, g(x)>0, f(x)\neq 1$．

(3) $F=f\circ f\circ f$．

§1.5 高阶导数

一个函数 f 如果有导函数 f'，自然我们又可以继续考虑函数 f' 的导数．

定义 1 设函数 f 在一点 x 附近有导函数 f'，若 f' 又在点 x 可导，则记

$$f''(x)=(f')'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h},$$

叫做函数 f 在点 x 的**二阶导数**，而 $f'(x)$ 则叫做 f 在 x 的**一阶导数**．同样，如果 f 在 x 附近有二阶导函数 f''，则记 $f'''(x)=(f'')'(x)$，叫做 f 在 x 的**三阶导数**．一般地，如果 f 在 x 附近有 $n-1$ 阶导函数 $f^{(n-1)}$，则记 $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)})'(x)$，叫做 f 在 x 的 **n 阶导数**．

在直线运动中，若以 $x=f(t)$ 表示质点在时刻 t 的位移，则 x'' 是速度 x' 的变化率，即"加速度"．例如，若质点的位移与时间的平方成正比：$x=At^2$，则 $x''=2A$ 是常数，即等加速度运动．

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求f''.

解 与§1.4例5解法相同,求得

$$f'(x)=\begin{cases}4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

同样继续可得

$$f''(x)=\begin{cases}12x^2\sin\dfrac{1}{x}-6x\cos\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}\quad\square$$

例2 设$y=e^{ax}$,求n阶导数$y^{(n)}$, $n=1,2,\cdots$.

解

$$y'=ae^{ax},$$

$$y''=a^2e^{ax},$$

易见一般有

$$y^{(n)}=a^ne^{ax},\quad n=1,2,\cdots.\quad\square$$

例3 证明

$$\sin^{(n)}x=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\qquad n=1,2,\cdots.\tag{1}$$

证明 用数学归纳法. 当$n=1$时有

$$\sin' x=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

即命题当$n=1$时成立. 设命题对于自然数$n-1$成立:

$$\sin^{(n-1)}x=\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right).$$

则

$$\sin^{(n)}x=\left[\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)\right]'$$

$$=\cos\left(x+\frac{n-1}{2}\pi\right)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

即命题对于自然数n也成立. 故命题对一切自然数都成立. □

同法可证(习题)

$$\cos^{(n)}x=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),\qquad n=1,2,\cdots. \tag{2}$$

我们常常记 $f^{(0)}=f$, 称为函数 f 的“零阶导数”.

例 4 设有多项式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$$

证明

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},\qquad k=0,1,\cdots,n.$$

证明 因为

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1,$$

$$f''(x)=n(n-1)a_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+3\cdot 2a_3x+2!a_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n,$$

所以

$$f(0)=a_0,\ f'(0)=a_1,\ f''(0)=2!a_2,\ \cdots,$$
$$f^{(n)}(0)=n!a_n.$$

因此得证. □

由此，多项式 f 可以表示为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,\quad x\in R.$$

我们从此还容易看到，若一多项式恒等于0，则其系数全为0. 因此，若两个多项式恒等，则它们的系数全同.

对于 n 阶导数的运算显然有

$$(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)},$$
$$(cf)^{(n)}=cf^{(n)},$$

其中 c 为常数. 而关于$(fg)^{(n)}$我们有下述定理:

定理 1 (G. W. Leibnitz) 设函数 f 和 g 在区间 I 上都有 n 阶导函数,则函数fg在 I 上也有 n 阶导函数,且

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}, \tag{3}$$

其中C_n^k为二项式系数:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},\qquad k=1,2,\cdots,n,$$

$$C_n^0=1.$$

证明 用归纳法. 由 §1.3定理1,3)知道定理当 $n=1$ 时成立. 设定理当$n=m$时成立,则

$$(fg)^{(m+1)}=[(fg)^{(m)}]'=\left(\sum_{k=0}^{m}C_m^k f^{(m-k)}g^{(k)}\right)'$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k(f^{(m-k)}g^{(k)})'$$

$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^k f^{(m-k+1)}g^{(k)}+\sum_{k=0}^{m}C_m^k f^{(m-k)}g^{(k+1)}$$

$$=I_1+I_2.$$

在I_2中令$k+1=j$,得

$$I_2=\sum_{j=1}^{m+1}C_m^{j-1}f^{(m+1-j)}g^{(j)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}C_m^{k-1}f^{(m+1-k)}g^{(k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}C_m^{k-1}f^{(m+1-k)}g^{(k)}+fg^{(m+1)}.$$

又 $$I_1=f^{(m+1)}g+\sum_{k=1}^{m}C_m^k f^{(m+1-k)}g^{(k)}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(m+1)} &= I_1 + I_2 \\
&= f^{(m+1)}g + \sum_{k=1}^{m}(C_m^k + C_m^{k-1})f^{(m+1-k)}g^{(k)} + fg^{(m+1)} \\
&= f^{(m+1)}g + \sum_{k=1}^{m}C_{m+1}^k f^{(m+1-k)}g^{(k)} + fg^{(m+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1}C_{m+1}^k f^{(m+1-k)}g^{(k)},
\end{aligned}
$$

即定理当$n=m+1$时也成立. 因此定理对一切自然数 n 成立. □

例 5　设$y=x^2\cos x$, 求$y^{(50)}$.

解　令$f(x)=\cos x, g(x)=x^2$. 由(2)式,

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right), \qquad k=0,1,\cdots.$$

又

$$g'(x)=2x,\ \ g''(x)=2,\ \ g^{(3)}(x)=g^{(4)}(x)=\cdots=0.$$

代入(3)式便得

$$
\begin{aligned}
y^{(50)} &= x^2\cos\left(x+\frac{50\pi}{2}\right)+50\cdot 2x\cdot\cos\left(x+\frac{49\pi}{2}\right) \\
&\qquad +\frac{50\cdot 49}{2}\cdot 2\cdot\cos\left(x+\frac{48\pi}{2}\right) \\
&= (2450-x^2)\cos x-100x\sin x.
\end{aligned}
$$
□

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 函数 f 仅在一点 x 可导, 是否可以继续考虑其二阶导数?

(2) 函数 f 在一点 x 有二阶导数, f 是否在 x 的一个邻域内可导?

(3) 函数 f 在一点 x 有二阶导数, f' 是否在 x 的一个邻域内可导?

(4) 函数 f 在一点 x 有二阶导数, f' 是否在 x 连续?

(5) 函数 f 在一点 x 有二阶导数, f 是否在 x 的一个邻域内连续?

2. 求 y 关于 x 的二阶导数 y'', 设

(1) $y=e^{-x^2}$.

(2) $y=x^2a^x$.

(3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$.

(4) $y=\dfrac{1}{a+\sqrt{x}}$.

(5) $y=\operatorname{tg}x$.

(6) $y=(1+x^2)\operatorname{arc\,tg}x$.

(7) $y=\ln\sin x$.

(8) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(9) $y=\ln f(x)$.

3. 求下列二阶导数:

(1) $f(x)=e^{2x-1}$, $f''(0)=?$

(2) $f(x)=\operatorname{arctg}x$, $f''(1)=?$

(3) $f(x)=\sin^2 x$, $f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=?$

4. 求 n 阶导函数 $f^{(n)}$, 设

(1) $f(x)=a^x\ (a>0)$.

(2) $f(x)=x^{\mu}\ (x>0)$.

(3) $f(x)=\ln x$.

(4) $f(x)=x\ln x$.

(5) $f(x)=\varphi(ax+b)$.

(6) $f(x)=x\cos ax$.

(7) $f(x)=x^3\cos x$.

(8) $f(x)=x^n e^{ax}$.

5. 求下列高阶导数, 设

(1) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 求 $y^{(10)}$.

(2) $y=\dfrac{x^2}{1-x}$, 求 $y^{(8)}$.

6. 设函数 f 在 $(-\infty, x_0]$ 上二次可导(即有二阶导数), 又

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\leqslant x_0, \\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0. \end{cases}$$

问 a, b, c 为何时函数 F 二次可导?

7. 设

$$f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

其中 n 为自然数. 问 f 在 $x=0$ 有几阶导数?

8. 设

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

证明 f 无限次可导.

9. 证明

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^m=\begin{cases}0, & m=0,1,\cdots,n-1,\\(-1)^n n!, & m=n.\end{cases}$$

提示：考虑

$$y=(1-t)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k t^k.$$

§1.6 微分

现在我们要从另一个角度来得到导数，这样不仅可以获得一个与求导相辅的运算，而且对于以后研究多元函数的微分学是很有启发的. 先看一个实例.

我们来计算半径为 r 和 $r+h$ 的同心圆围成的圆环面积. 因为半径为 r 的圆面积为

$$S(r)=\pi r^2,$$

故所求圆环面积为

$$S(r+h)-S(r)=\pi(r+h)^2-\pi r^2=2\pi rh+\pi h^2.$$

若 h 很小，例如 $h=0.01$，则

$$S(r+h)-S(r)=0.02\pi r+0.0001\pi.$$

如果只要求计算误差不超过 $\frac{1}{10^3}$，则上式第二项就可略去，于是得圆环面积的近似等式:

$$S(r+0.01)-S(r)\approx 0.02\pi r.$$

我们注意到，πh^2 当 $h\to 0$ 时是 h 的高阶无穷小，因此我们得狭圆环的面积近似公式为

$$S(r+h)-S(r)\approx 2\pi rh.$$

右端关于 h 是一次的，计算起来比左端方便.

一般地，设一元函数 f 在一点 x 附近有定义，我们把

$$f(x+h)-f(x)$$

叫做 f 在 x 的"增量"或"差分"，其中 h 可正可负．由上例看到，我们的问题是：是否存在一个与 h 无关的常数 A 使得

$$f(x+h)-f(x)=Ah+o(h) \tag{1}$$

成立？

定义 1 如果(1)式成立，则称函数 f 在点 x **可微**；这时记

$$df(x)(h)=Ah, \qquad h\in R,$$

则一元一次齐次函数 $df(x)$ 叫做 f 在点 x 的**微分**.

例如，质点作直线运动，在任一时刻 t 的位移为 $x=f(t)$．固定时刻 t，如果 f 在 t 可微，则就存在常数 A 使得

$$f(t+h)-f(t)=Ah+o(h).$$

因为当 $h\to 0$ 时，$o(h)$ 是 h 的高阶无穷小，质点由时刻 t 到 $t+h$ 产生的位移就可近似地看作 Ah，即质点在时刻 t 附近的运动可以近似地看作速度为 A 的匀速运动．这是所谓"匀代不匀"．

同样，如果一元函数 f 在一点 x_0 可微：

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+o(h).$$

令 $x=x_0+h$ 得

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+o(x-x_0).$$

因此当 x 趋于 x_0 时我们就可以用

$$f(x_0)+A(x-x_0)$$

近似地代替 $f(x)$．这在几何上就是以直线

$$y=f(x_0)+A(x-x_0) \tag{2}$$

近似地代替曲线

$$y=f(x) \tag{3}$$

(图 55)，即所谓"以直代曲"．这就是说，直线(2)和曲线(3)在点 $(x_0,f(x_0))$ 接触得很好．因此直线(2)应就是曲线(3)在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线，应有 $A=f'(x_0)$．这是正确的，我们有下述定理：

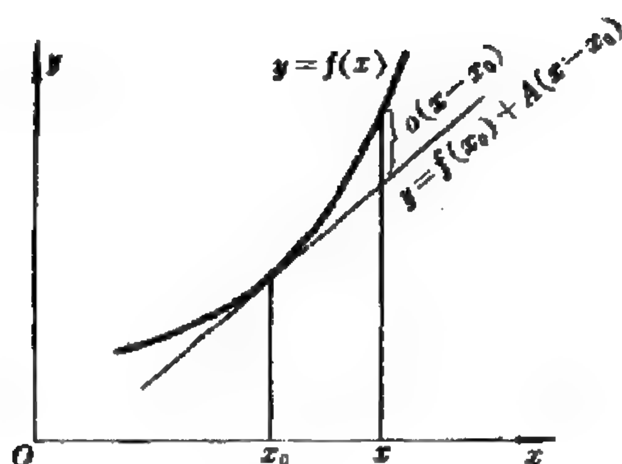


图 55

定理1 函数 f 在一点 x 可微的充分必要条件为 f 在 x 可导，这时(1)式中的 $A=f'(x)$，即

$$df(x)(h)=f'(x)h, \quad h\in R.$$

证明 （必要性） 设 f 在 x 可微，则存在与 h 无关的常数 A，使得

$$f(x+h)-f(x)=Ah+o(h),$$

所以

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=A+\frac{o(h)}{h}.$$

令 $h\to 0$ 即知 f 在 x 可导，且 $A=f'(x)$.

（充分性） 设 f 在 x 可导，令

$$r(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x), \qquad h\neq 0.$$

则

$$\lim_{h\to 0} r(h)=0,$$

所以

$$r(h)h=o(h),$$

因此

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+o(h).$$

而$f'(x)$是一个与h无关的常数，所以f在x可微. □

例如，若$f=\sin$，则

$$df(x)(h)=(\cos x)h, \quad h\in R.$$

若$f(x)=e^x$，则

$$df(x)(h)=e^x h, \quad h\in R.$$

对于圆面积$S(r)=\pi r^2$有

$$dS(r)(h)=2\pi rh.$$

微分在整个微积分学中是一个重要的概念. 综上所述，我们应从下面几个方面掌握这个概念：

1. 函数在一点可微的定义，即(1)式.

2. 如果函数f在一点x可微，则f在x就有微分$df(x)$. 并且

1° 微分$df(x)$是一个一元一次齐次函数：

$$df(x)(h)=Ah, \quad h\in R.$$

它的定义域是整个R，因此上式并不要求h很小.

2° 当$h\to 0$时微分值$df(x)(h)$与差分值$f(x+h)-f(x)$相差h的高阶无穷小：

$$f(x+h)-f(x)=df(x)(h)+o(h).$$

但是，对于一元微积分来说，微分在理论上并不显现出有多大的价值，意义也不在于近似计算(如圆环面积的计算)，而在于它以后对积分演算和微分方程演算的作用. 鉴于此，下面我们特别引进变量微分的概念.

设函数f在其定义区间I上可微（即在I中每一点上都可微）. 视x为I上的变量，令$y=f(x)$，记

$$dy=df(x)=f'(x)h \qquad (x\in I, h\in R), \tag{4}$$

叫做变量$y=f(x)$的微分，它依赖于x和h两个变量，x和h是相互独立的. 特别，若$f(x)=x$，则得

$$dx = h.$$

由于这个缘故，今后我们记(4)式为

$$dy = df(x) = f'(x)dx, \quad x \in I. \tag{5}$$

其中$dx = h$叫做自变量x的微分，是一个独立变量，它实际上与x无关，即x和dx是相互独立的.

例如

$$d\sin x = \cos x dx,$$

$$de^x = e^x dx,$$

$$d\pi r^2 = 2\pi r dr,$$

等等.

由(5)式我们又得到

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x), \qquad x \in I. \tag{6}$$

即导数是微分之比，因此导数又叫做"微商".

由定理1和§1.3定理1易见，对于微分也有类似于求导的四则运算：若函数f和g均在某区间上可微，令$u = f(x)$，$v = g(x)$，则在该区间上有(c是常数)

$$d(u + v) = du + dv, \tag{7}$$

$$dcu = cdu, \tag{8}$$

$$duv = udv + vdu, \tag{9}$$

$$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2}. \tag{10}$$

有特别重要意义的是"复合微分". 设函数f在区间J上可微，函数φ在区间I上可微，且当$t \in I$时$x = \varphi(t) \in J$. 令$y = f \circ \varphi(t)$. 则由定理1和§1.3定理2，y在I上可微，且

$$dy = f'(x)\varphi'(t)dt, \quad t \in I,$$

其中$x = \varphi(t)$. 但

$$dx = \varphi'(t)dt,$$

因此得到

$$dy=f'(x)dx, \tag{11}$$

其中 $x=\varphi(t)$. 这就是说,视dy为 y 关于 x 的微分(这时 x 是自变量)和视dy为 y 关于 t 的微分(这时 x 是中间变量), 其形式不变,都是(11)式. 这叫做微分形式的"不变性". 因此, 不管 x 是自变量还是中间变量,等式

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=y'_x \tag{12}$$

总成立. 即微分dy和dx之比总是 y 关于 x 的导数.

应用微分四则运算(7)—(10)式和微分形式的不变性(11)式,我们来演算几个例题.

例 1 设$y=e^{x^2+x}$, 求dy.

解 引进中间变量$u=x^2+x$,则由微分形式的不变性,

$$dy=(e^u)'du=e^u du=(2x+1)e^{x^2+x}dx. \quad \square$$

例 2 设有方程

$$x^3+y^3=4,$$

求y' 和x'.

解 x和 y 满足题中所给方程, 因此 x 和 y 不是相互独立的, y对 x 有函数关系, x 对 y 也有函数关系. 例如,视 y 为因变量,对方程微分得

$$d(x^3+y^3)=d4=0.$$

再由微分四则运算和微分形式不变性又得

$$3x^2dx+3y^2dy=0.$$

所以

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2}{y^2}.$$

同样也可以视 x 为因变量又得

$$x' = \frac{dx}{dy} = -\frac{y^2}{x^2}. \quad \square$$

例 3 设有方程

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2},$$

求微分dx和dy的方程.

解 与例 2 解法一样，对方程微分得

$$d\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = d\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

因为

$$d\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}d\frac{y}{x} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2}$$

$$= \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2},$$

$$d\ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}d\ln(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}d(x^2+y^2)$$

$$= \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2},$$

所以

$$x\,dy - y\,dx = x\,dx + y\,dy,$$

即

$$(x-y)dy = (x+y)dx.$$

这就是dx和dy的方程. 这种带微分的方程叫做“微分方程”. 就是说，若x, y满足题中所给方程，则x, y要满足这个微分方程，因此所给方程是这个微分方程的一个“解”. □

例 4 设

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t.$$

求y'_x, y''_{xx}.

解 设想从第一个方程解出t，代入第二个方程即知y对x有函数关系．因此我们可以求y关于x的导数y'_x, y''_{xx}．但实际上我们可以不必解出t，而只要应用(12)式，得

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{r\cos t}{-r\sin t}=-\operatorname{ctg} t.$$

将此式再与$x=r\cos t$联立，继续应用(12)式又得

$$y''_{xx}=\frac{dy'_x}{dx}=\frac{-d\operatorname{ctg} t}{-r\sin t\,dt}=-\frac{1}{r\sin^3 t}. \quad \square$$

此例的几何意义是很清楚的，题中参数方程是圆的方程，$\frac{dy}{dx}=y'_x$就是切线斜率．例如，令$t=\frac{\pi}{4}$就得圆在点$\left(\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$处的切线斜率为$-1$．关于参数方程我们将在第二册中讨论，在第一册中只偶见于例题和习题，不再详细讨论．

习　题

1．回答下列问题：

(1) 函数在一点可微是什么意思？

(2) 函数在一点可微的充分必要条件是什么？

(3) 函数在一点可微，则微分是什么？定义域为何？

(4) 变量$y=f(x)$的微分是什么意思？

(5) 在$dy=f'(x)dx$中，如果x是自变量，则dx和x是否有关？

(6) 何谓微分形式的不变性？

(7) 如果$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，则$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$＝？ y'_t＝？ x'_y＝？ y''_{xx}＝？

2．求y关于x的微分，设

(1) $y=\frac{1}{x}$．　　(2) $y=\sqrt{x^2+a^2}$．

(3) $y=\operatorname{arctg}(ax+b)$．　　(4) $y=\sin x-x\cos x$．

(5) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$．

3．填空：

(1) $d(\quad)=\frac{dx}{x}$.

(2) $d(\quad)=\frac{dx}{1+x^2}$.

(3) $d(\quad)=\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

(4) $d(\quad)=(2x+1)dx$.

(5) $d(\quad)=(\sin x+\cos x)dx$.

(6) $d(\quad)=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

(7) $d(\quad)=\sin x\cos x dx$.

(8) $d(\quad)=e^{-ax}dx$.

(9) $d(\quad)=\frac{dx}{x\ln x}$.

(10) $d(\quad)=-\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

(11) $d(\quad)=\sin x\cos^2 x dx$.

(12) $d(\quad)=\sin^2 x dx$.

4. 设 u, v, w 均可微, 求 y 的微分:

(1) $y=uvw$.

(2) $y=\frac{u}{v^2}$.

(3) $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

(4) $y=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

(5) $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

5. 微分下列方程, 求出 y':

(1) $x=y+e^y$.

(2) $x=y+\ln y$.

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(4) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

(5) $\frac{y^2}{x}=\sqrt{x^2+y^2}$.

6. 求 y'_x 和 y''_{xx}, 设

(1) $x=\sin^2 t, y=\cos^2 t$.

(2) $x=a\cos t,\quad y=b\sin t$.

(3) $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$.

(4) $x=e^{2t}\cos^2 t,\quad y=e^{2t}\sin^2 t$.

7. 置光源于椭圆的一个焦点上, 证明光线经椭圆反射到另一个焦点上.

第二节　用一阶和二阶导数研究函数

§ 2.1　微分平均值定理

在上一节里我们已经研究了导数的概念及其运算. 导数是函

数的变化率，因而对函数的研究有着重大的作用．本节要用一阶和二阶导数研究函数．它主要依据下面要讲的一个关于导数的基本定理，叫做“微分平均值定理”．

定义 1 设函数 f 的定义域为区间 I，又 $x_0\in I^\circ$．如果 x_0 有一个邻域 $\Delta=(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset I$ 使得 $f(x_0)$ 是 f 在 Δ 上的最大值（最小值），也就是说，当 $x\in\Delta$ 时

$f(x)\leqslant f(x_0)$ $(f(x)\geqslant f(x_0))$，

则说 $f(x_0)$ 是 f 的一个**极大值**（**极小值**）（图 56）；这时 x_0 叫做 f 的一个**极值点**．函数的极大值和极小值统称**极值**．

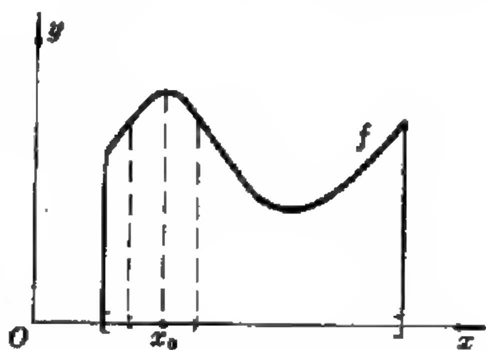


图 56

注 函数的极大值（极小值）和最大值（最小值）是不同的概念．设函数 f 的定义域为区间 I．f 的最大值（最小值）是全部函数值 $f(I)$ 中之最大者（最小者），是 f 在整个定义域 I 上的最大值（最小值）．但 f 的极值按定义只是局部的最大值或最小值．所以极值不一定是最大值或最小值．最大值或最小值可以在 I 的端点上达到，极值按定义只能在 I 的内点（即 I° 中之点）上达到．设 $f(x_0)$ 是最大值（最小值），若 $x_0\in I^\circ$，则 $f(x_0)$ 当然也是极大值（极小值）；若 x_0 是 I 的端点，则 $f(x_0)$ 就非极值．

从图 57 我们可以直观地看到，函数的图象在极值点上应具有水平切线．早在导数概念形成之初，17 世纪法国数学家 Pierre de Fermat 就是这样考虑的．

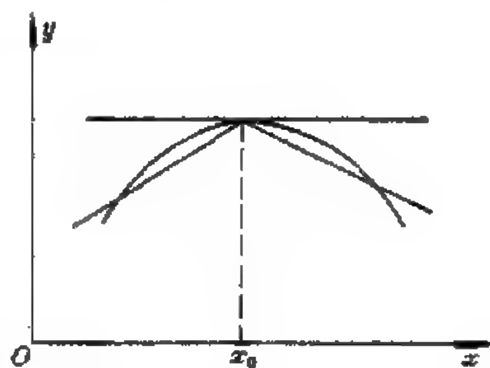


图 57

定理 1（P. Fermat） 若函数 f 在极值点 x_0 可导，则 $f'(x_0)$

$=0$.

证明 不妨设 $f(x_0)$ 是极大值(对于极小值也可同样证明). 由定义1, 存在$\delta>0$, 当$x_0-\delta<x<x_0+\delta$时有

$$f(x)\leqslant f(x_0).$$

因此, 当$x_0-\delta<x<x_0$时有(图 57)

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0.$$

又当$x_0<x<x_0+\delta$时有

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0,$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0.$$

因此

$$f'(x_0)=0. \ \square$$

注 定理的逆不成立. 例如函数 f: $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 的导数是 0, 但 $x=0$ 显然不是它的极值点.

定理 2 (M. Rolle) 如果函数f在闭区间$[a, b]$上连续, 在开区间(a, b)上可导, 且$f(a)=f(b)$, 则至少存在一点 $\xi\in(a, b)$使得$f'(\xi)=0$.

证明 由函数的连续性可知 (第一章 § 4. 2 定理3), f在$[a, b]$上一定取到最大值M和最小值m. 设$f(\alpha)=M$, $f(\beta)=m$. 对于α, β 有两种可能性:

(1) α, β 都是$[a, b]$的端点. 这时由假设便得$M=m$, 显然f在$[a, b]$上只能是一个常数;

$$f(x)=M \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

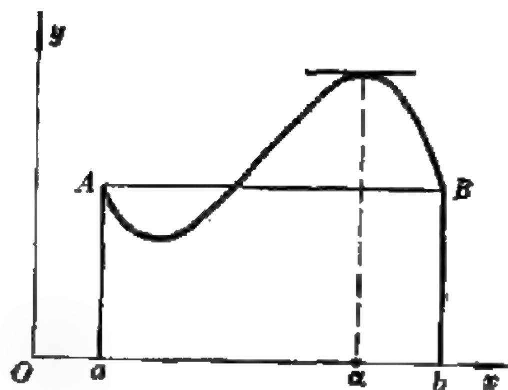


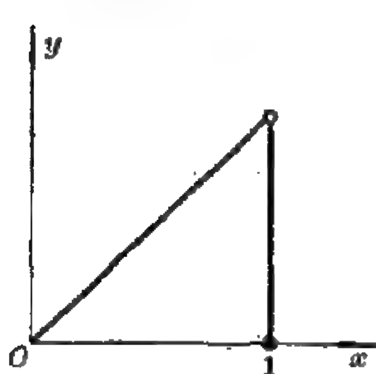
图 58

因此任取$\xi\in(a,b)$均得$f'(\xi)=0$，所以定理成立.

(2) α和β中至少有一个，不妨设α，在(a,b)内（图58）. 则$f(\alpha)$便是极大值. 又因为f在(a,b)内是可导的，故由定理1得$f'(\alpha)=0$. 因此，取$\xi=\alpha$即知定理成立. □

在几何上这定理就是说，若(可导)函数f满足定理中的条件：$f(a)=f(b)$，则曲线$y=f(x)$一定有一条水平切线(图58).

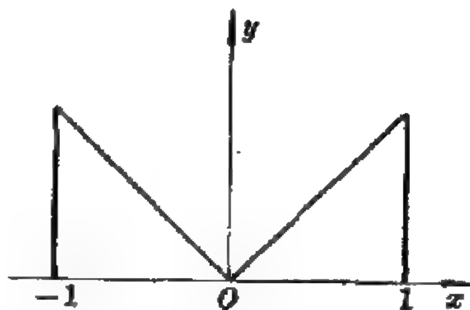
注 定理中的三个条件均是不可缺的，图59—61中分别是三个反例.



$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 0, & x=1\end{cases}$

$x=1$是间断点

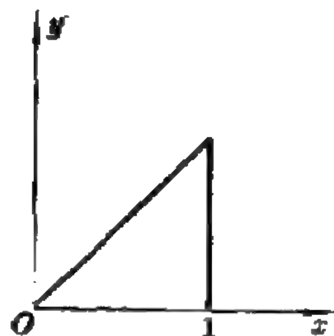
图 59



$f(x)=|x|,\quad -1\leqslant x\leqslant 1$

f在$x=0$不可导

图 60



$f(x)=x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1$

$f(0)\neq f(1)$

图 61

下面我们对Rolle定理进行推广.

定理3（平均值定理，J. L. Lagrange） 如果函数f在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi), \tag{1}$$

或

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a). \tag{2}$$

证明 令

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),\quad a\leqslant x\leqslant b. \tag{3}$$

由所设，显然函数 g 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且

$$g(a)=g(b)=0.$$

因此 g 满足Rolle定理的三个条件，故有$\xi\in(a,b)$ 使得$g'(\xi)=0$. 但

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

令$x=\xi$即得(1)式. □

注 1 在此定理中，如果 $f(a)=f(b)$，则$f'(\xi)=0$. 由此可见，这个定理就是Rolle定理的推广.

注 2 在定理中，令

$$\theta=\frac{\xi-a}{b-a},$$

则$0<\theta<1$, $\xi=a+\theta(b-a)$. 因此平均值定理又可叙述如下:

若函数 f 满足定理 3 中的条件，则存在数$\theta\in(0,1)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a). \tag{4}$$

这也是平均值定理常用的形式.

我们再来看平均值定理的几何意义. 在图 62 中，$\overline{AB}$ 是联结曲线 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$端点的弦，则$\overline{AB}$的斜率就是

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

因此，平均值定理的意思就是说，曲线$y=f(x)$一定有一条平行于弦$\overline{AB}$的切线.

例 1 设 $0<\alpha\leqslant\beta<\frac{\pi}{2}$，证明

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}\leqslant \operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\leqslant\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

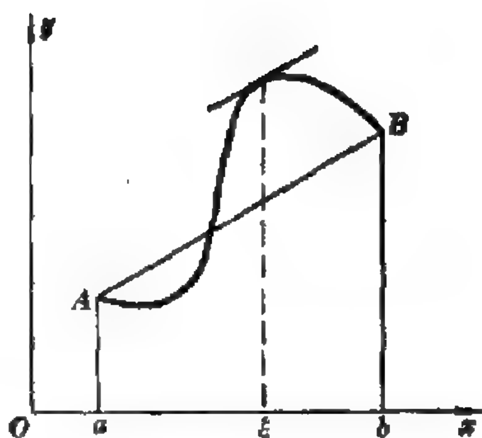


图 62

证明 当$\alpha=\beta$时，题中不等式显然成立。当$\alpha\neq\beta$时，考虑区间$[\alpha,\beta]$上的函数f:

$$f(x)=\operatorname{tg}x,\quad \alpha\leqslant x\leqslant\beta.$$

它满足平均值定理的条件，所以有$\xi\in(\alpha,\beta)$使得

$$f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)(\beta-\alpha),$$

即

$$\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha=\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\xi}. \tag{5}$$

由 $0<\alpha<\xi<\beta<\frac{\pi}{2}$ 有

$$0<\cos^2\beta<\cos^2\xi<\cos^2\alpha,$$

所以

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\xi}<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

再由(5)式即得所证. □

推论 设函数 f 在区间 I 上连续，在I° 上可导，则 f 在 I 上为常数的充分必要条件是当$x\in I^\circ$ 时$f'(x)=0$.

证明 （必要性） 显然.

（充分性） 设在I°上处处有$f'(x)=0$. 在 I 上任取两点x_1,x_2. 不妨设 $x_1<x_2$. 对区间 $[x_1,x_2]$ 和函数 f 应用平均值定理，有$\xi\in(x_1,x_2)$使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1).$$

但由假设，$f'(\xi)=0$，所以

$$f(x_1)=f(x_2).$$

而x_1, x_2是 I 上任意两点，所以 f 在 I 上是常数. □

注　由此推论可知，如果函数f_1和f_2在区间 I 上连续，在I°上可导，且对于一切 $x\in I^\circ$有

$$f_1'(x)=f_2'(x),$$

则有常数C，使得对一切 $x\in I$有

$$f_1(x)=f_2(x)+C.$$

反之亦然．这只要令$f=f_1-f_2$，由上述推论便立即推得．此注对后面学习积分时是很重要的．

例 2　证明当$|x|<1$时

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}=\operatorname{arc\,tg}x+\frac{\pi}{4}.$$

证明　令

$$f(x)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}-\operatorname{arc\,tg}x,\qquad |x|<1.$$

则

$$f'(x)=0,\qquad |x|<1.$$

因此由上述推论，函数 f 在区间$(-1,1)$上为一常数：

$$f(x)=C,\qquad |x|<1.$$

令$x=0$即得 $C=\frac{\pi}{4}$，便是所证．□

下面我们再对Lagrange平均值定理进行推广．

定理 4（平均值定理，A．L．Cauchy）　设函数 f 和 g 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，且当 $x\in(a,b)$时 $g'(x)\neq0$. 则至少有一点 $\xi\in(a,b)$使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证明 先证 $g(b)\neq g(a)$. 反证: 如若 $g(b)=g(a)$, 则依Rolle定理, 存在$\eta\in(a,b)$使$g'(\eta)=0$, 这与假设矛盾. 以下与Lagrange平均值定理的证明完全相同. 令

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)],$$

$$a\leqslant x\leqslant b.$$

则显然函数F满足Rolle定理的条件: F在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可导, 且$F(a)=F(b)$. 因此有$\xi\in(a,b)$使得$F'(\xi)=0$. 而

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x),\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

令$x=\xi$即得证. □

注 若 $g(x)=x$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 则 Cauchy 平均值定理就成为Lagrange平均值定理, 即前者是后者的推广. 所以, 定理2, 定理 3和定理 4 都是同一性质的定理, 统称“微分平均值定理”. 定理4是其最一般的形式.

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 何谓极值? 若函数在极值点可导, 则导数为何?

(2) 函数的最大值和最小值是否一定是极值? 反之如何? 何时最大值和最小值一定是极值?

(3) 若 $f(a)$ 是函数 f 在区间$[a,b]$上的最大值或最小值, 且 $f'(a)$ 存在, 则是否一定有 $f'(a)=0$?

(4) 设 x_0 是函数 f 的定义区间的内点, 且 $f'(x_0)=0$, 则 x_0 是否一定是f的极值点?

(5) Rolle 定理成立的条件是什么? 条件不成立时你能否一一举出反例?

(6) Rolle 定理的证明中用到哪些定理?

(7) Lagrange 平均值定理和 Cauchy平均值定理都是由什么定理推出

来的？

(8) 设 $f(x)=x^2, g(x)=x^3$. Cauchy 平均值定理对于函数 f 和 g 在区间$[-1,1]$上是否成立？

2. 设函数 f 和 g 在开区间(a,b)上可导，在闭区间$[a,b]$上连续，且 $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=g'(\xi)$.

3. 证明方程 $x^3-3x+c=0$ 在$[0,1]$中无相异的根.

4. 证明

(1) 若 n 为偶数，则 $a^n+b^n=(a+b)^n$ 只当 $a=0$ 或 $b=0$ 时才成立.

提示：设 $a\neq0$, $b\neq0$ 使题中等式成立，考虑函数 f:

$$f(x)=x^n+b^n-(x+b)^n.$$

(2) 若 n 为奇数，则 $a^n+b^n=(a+b)^n$ 只当 a 和 b 有一为 0 或 $a=-b$时才成立.

5. 设函数 f 在开区间(a,b)上可导，且 $f(a+0)=f(b-0)$有限或$=\infty$，则存在 $\xi\in(a,b)$使 $f'(\xi)=0$.

6. (1) 设函数 f 在区间(a,b)上有二阶导数，又 $a<x_0<x_1<x_2<b$，且 $f(x_0)=f(x_1)=f(x_2)$，则存在 $\xi\in(a,b)$使 $f''(\xi)=0$.

(2) 将(1)推广到 f 有 n 阶导数的情形.

7. 设函数 f 在R上有 n 阶导数，又 P 是一个 n 次(实系数)多项式：

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

且有 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 使 $f(x_i)=P(x_i)$, $i=0,1,\cdots,n$. 则有 ξ 使

$$a_0=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

8. 设实系数方程

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根均为实根，证明方程 $P'(x)=0$ 的根也都是实根. 由此证明方程

$$[(x^2-1)^n]^{(n)}=0$$

的根均为实根，且都在$(-1,1)$内.

9. 设函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导. 令

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}.$$

试用函数 F 证明 Lagrange 平均值定理，并对 F 作几何解释. 上述证明与书

中的证明是否相同？同法是否可以证明 Cauchy 平均值定理？

10. 证明下列不等式:

(1) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$, $x, y\in R$.

(2) $py^{p-1}(x-y)\leqslant x^p-y^p\leqslant px^{p-1}(x-y)$, 其中 $0<y<x$, $p>1$.

(3) $|\operatorname{arctg}a-\operatorname{arctg}b|\leqslant|a-b|$, $a, b\in R$.

(4) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$, $0<b<a$.

11. 设函数 f 在区间 $(a, +\infty)$ 上有有界导函数，证明存在常数 C 和 x_0，当 $x\geqslant x_0$ 时 $f(x)<Cx$.

12. 设函数 f 在区间 $(0, a)$ 上可导，且 $f(0^+)=+\infty$，证明 f' 在 $x=0$ 的右旁无下界.

13. 设函数 f 在区间 $(a, +\infty)$ 上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0.$$

14. 设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 上二次可导，$f(a)=f(b)=0$，且存在 $c\in(a, b)$ 使 $f(c)>0$. 证明存在 $\xi\in(a, b)$ 使 $f''(\xi)<0$.

15. 设非常值的函数 f 在区间 $[a, b]$ 上满足 Rolle 定理的条件，则存在 $\xi_1, \xi_2\in(a, b)$ 使 $f'(\xi_1)<0$, $f'(\xi_2)>0$.

16. (1) 设函数 f 在开区间 (x_0, a) 上可导，且在 x_0 (右)连续，又 $f'(x_0+0)$ 存在、有限. 证明 $f'_+(x_0)$ 存在，且 $f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$.

(2) 设

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, & x=0.\end{cases}$$

证明 $f'_+(0)=-1$.

17. 设函数 f 满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M(x-y)^2,\quad x, y\in R.$$

则 f 是一常数.

18. 证明

(1) $2\operatorname{arctg}x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x$, $|x|\geqslant1$.

(2) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi$, $|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

19. 设函数 f 在区间$[a, b]$上可导，证明：

(1) 导函数 f' 可以取到 $f'(a)$和 $f'(b)$之间的一切数值.

(2) f' 无第一种间断点.

20. 设函数 f 在区间$[a, +\infty)$上可导，$f(a)=0$，且当 $x\geqslant a$ 时 $|f'(x)|\leqslant |f(x)|$. 证明 $f=0$.

提示：证明 $|f|$在$[a, a+1]$上的最大值为 0.

21. 设既非常值也非一次函数的函数 f 在闭区间$[a, b]$上连续，在开区间(a, b)上可导，证明存在 $c\in(a, b)$使

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

提示：考虑联结$(a, f(a))$和$(b, f(b))$两点的弦.

22. 设函数 f 在区间$[0, 1]$上三次可导，且 $f(0)=f(1)=0$. 设 $F(x)=x^3 f(x)$. 证明存在 $\xi\in(0, 1)$使 $F'''(\xi)=0$.

23. 设函数 f 在区间$(a, +\infty)$上有有界导数，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$.

24. 设函数 f 在区间$[a, b]$上可导，且 $ab>0$. 则存在 $\xi\in(a, b)$使

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

25. 设函数 f 在区间$[a, b]$上二次可导，且 $f'(a)=f'(b)$. 证明存在 $c\in(a, b)$使

$$|f''(c)|\geqslant\frac{1}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

提示：分别在区间$\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$和$\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$上作出适当的函数 g_1 和 g_2 并与 f 配合应用 Cauchy 平均值定理.

26. 设函数 f 在区间$(a, +\infty)$上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

提示：令 $F(x)=f(x)e^x$, $G(x)=e^x$，对函数 F 和 G 应用 Cauchy 平均值定理.

27. 设函数 f 在区间$[0, 1]$上可导，$f(0)=0$, $f(1)=1$. 又 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是任意 n 个正数. 证明在$[0, 1]$中存在 n 个不同的数 $x_1, \cdots, x_n$ 使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

§ 2.2 函数的增减

有了平均值定理，我们就可以用导数来研究函数的一些性质．首先研究函数的增减．

定理 1 设函数 f 在区间 I 上连续，在 I° 上可导，则 f 在 I 上非减(非增)的充分必要条件是当 $x\in I^\circ$ 时 $f'(x)\geqslant 0(f'(x)\leqslant 0)$．

证明 (必要性) 在 I° 上任取一点 x，由于 f 在 I 上非减(非增)，所以当 $x+h\in I$ 时就有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0(\leqslant 0).$$

令 $h\to 0$ 即得 $f'(x)\geqslant 0(\leqslant 0)$．

(充分性) 设定理中的条件成立．在 I 上任取两点 x_1，x_2，$x_1<x_2$．对函数 f 在区间 $[x_1, x_2]$ 上应用平均值定理(§2.1定理3)，使得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\geqslant 0(\leqslant 0),$$

即 $f(x_2)\geqslant f(x_1)(f(x_2)\leqslant f(x_1))$．所以 f 在 I 上非减(非增)．□

定理 2 若函数 f 在区间 I 上连续，在 I° 上可导，且当 $x\in I^\circ$ 时 $f'(x)>0(f'(x)<0)$，则 f 在 I 上严格增(严格减)．

证明 在 I 上任取两点 x_1, x_2，$x_1<x_2$．对函数 f 在区间 $[x_1, x_2]$ 上应用平均值定理(§2.1定理3)，得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0(<0),$$

即 $f(x_1)<f(x_2)(f(x_1)>f(x_2))$．所以 f 在 I 上严格增(严格减)．

□

例 1 证明正弦函数 sin 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上严格增．

证明 因为sin在区间 $I=\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，当 $x\in I^\circ=\left(-\frac{\pi}{2},\right.$

$\left.\frac{\pi}{2}\right)$时 $\sin' x = \cos x > 0$, 由定理 2, sin 在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上严格增. □

例 2 证明 当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$时

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1.$$

证明 由第一章 § 3.2 的(4)式, 我们只须证明题中第一个不等式. 令

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

于是

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

但由第一章 § 3.2(1)式, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$时 $\operatorname{tg} x > x$, 因此当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$时 $f'(x) < 0$. 又函数 f 在区间$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$上是连续的, 由定理 2, f 在$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$上严格减. 然而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, 所以当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时 $f(x) \geqslant \frac{2}{\pi}$, 并且等号只当 $x = \frac{\pi}{2}$时成立(图 63). □

例 3 证明 $e^x > 1 + x \ (x \neq 0)$.

证明 令

$$f(x) = e^x - (1 + x), \quad x \in R.$$

则 f 为连续函数. 又

$$f'(x) = e^x - 1 \begin{cases} > 0, & x > 0, \\ < 0, & x < 0. \end{cases}$$

因此, 由定理 2, f 在区间$[0, +\infty)$上严格增, 在区间$(-\infty, 0]$上严格减. 但 $f(0) = 0$, 故当 $x \neq 0$ 时 $f(x) > 0$(图 64). 即为所证. □

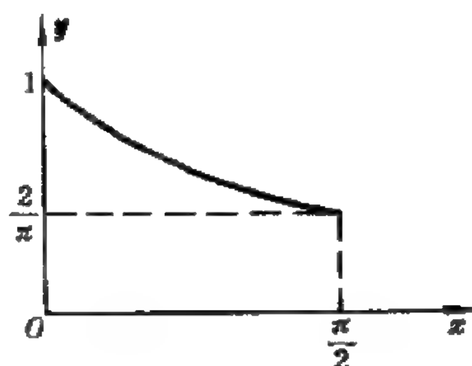


图 63

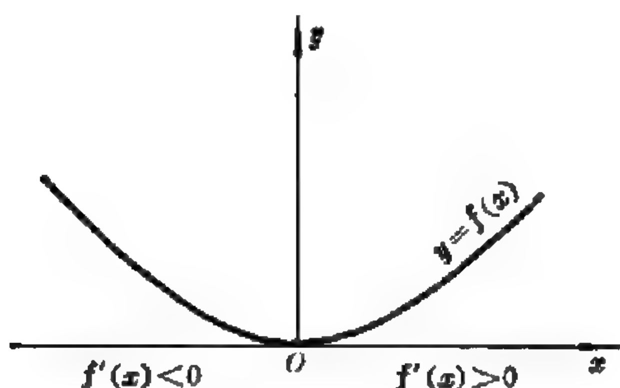


图 64

注 定理 2 的逆不真. 例如, 设 $f(x)=x^3$, $x\in R$. 则 f 严格增, 但 $f'(0)=0$.

定理 3 设函数 f 在区间 I 上连续, 在 I° 上可导, 则 f 在 I 上为严格增(严格减)的充分必要条件是:

1° 当 $x\in I^\circ$ 时 $f'(x)\geqslant 0(f'(x)\leqslant 0)$;

2° 在 I° 的任何一个(非退化)子区间 I_1 上 $f'(x)\not\equiv 0$, 也就是说, 若(非退化)区间 $I_1\subset I^\circ$, 则至少有一点 $x\in I_1$ 使 $f'(x)\neq 0$.

证明 (必要性) 设 f 在 I 上严格增. 由定理1, 条件1°成立. 下面证条件 2° 也成立. (反证)设有(非退化)区间 $I_1\subset I^\circ$ 使 $f'(x)=0$ 对一切 $x\in I_1$ 成立, 则由 § 2.1 定理 3 的推论, f 在 I_1 上为一常数. 这和 f 为严格增的假设矛盾, 所以条件 2° 成立.

(充分性) 设条件 1° 和 2° 成立. 由定理 1, f 在 I 上非减. 在 I 中任取两点 x_1, x_2, $x_1<x_2$, 则 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$. 若 $f(x_1)=f(x_2)$, 则因 f 非减, f 在区间 $[x_1, x_2]$ 上是一常数, 于是 $f'(x)=0$ 对一切 $x\in(x_1,x_2)$ 成立, 这与条件 2° 矛盾. 因此 $f(x_1)<f(x_2)$, 即 f 在 I 上严格增. □

例 4 设 $f(x)=x-\sin x$ $(x\in R)$, 证明 f 严格增.

证明 因为

$$f'(x)=1-\cos x\geqslant 0, \qquad x\in R,$$

故定理 3 的条件 1°成立. 而使 $f'(x)=0$ 的点为 $x=2k\pi(k=0,\pm1,\cdots)$不构成(非退化)区间, 故条件 2°也成立. 所以 f 严格增.

□

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 设函数 f 在区间 I 上连续, 在 I° 上可导, 则 f 在 I 上非减(非增)的充要条件为何?

(2) 在(1)的假设下, 如果当 $x\in I^\circ$ 时 $f'(x)>0$, 则 f 如何?

(3) 设函数 f 在区间 I 上可导, 且在 I 上严格增, 则是否对一切 $x\in I$ 有 $f'(x)>0$?

(4) 设函数 f 在区间 I 上连续, 在 I° 上可导, 则 f 在 I 上严格单调的充要条件为何?

(5) 设函数 f 有连续导函数, 且 $f'(x_0)>0$, 则 f 在点 x_0 附近如何?

2. 研究下列函数 f 的单调性, 设

(1) $f(x)=\operatorname{tg}x,\ |x|<\dfrac{\pi}{2}$.

(2) $f(x)=\operatorname{arctg}x-x,\ x\in R$.

(3) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x,\quad x>0$.

3. 证明下列不等式:

(1) 当 $x<0$ 时 $\operatorname{arctg}x>x$, 当 $x>0$ 时 $\operatorname{arctg}x<x$.

(2) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x\quad(x>0)$.

(3) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x\quad(x>0)$.

(4) $\operatorname{tg}x>x-\dfrac{x^3}{3}\qquad\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(5) $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\quad(x,y>0,\ \beta>\alpha>0)$.

(6) $\dfrac{\operatorname{tg}x_2}{\operatorname{tg}x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}\quad\left(0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(7) $\ln(1+x)>\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x}\quad(x>0)$.

(8) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$.

(9) $\left(\frac{1+x}{2}\right)^p + \left(\frac{1-x}{2}\right)^p \leqslant \frac{1}{2}(1+x^p) \quad (p \geqslant 2, 0 \leqslant x \leqslant 1)$.

4．设函数 f 在区间 $[0, +\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且 f' 严格增．证明 $\frac{f(x)}{x}$ 当 x 增加时严格增．

5．设函数 f 在区间 I 上连续，在 I° 上可导，且当 $x \in I^\circ$ 时 $f'(x) \neq 0$．证明 f 在 I 上严格单调．

6．设函数 f 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，$f(a) < 0$，且当 $x > a$ 时 $f'(x) > k > 0$．证明 f 在区间 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 中有唯一的零点．

7．设函数 f 在 R 上有界，且 $f'' \geqslant 0$．证明 f 是常数．

8．设函数 f 和 g 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，且当 $x > a$ 时 $|f'(x)| \leqslant g'(x)$．证明当 $x \geqslant a$ 时

$$|f(x) - f(a)| \leqslant g(x) - g(a).$$

9．证明：

$$x^2 e^{\frac{1}{x}} < e^x \quad (x > 1), \quad x^2 e^{\frac{1}{x}} > e^x \quad (0 < x < 1).$$

10．设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}[x - \ln(1+x)], & x > -1, x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明函数 f 在区间 $(-1, +\infty)$ 上严格减．

§ 2.3　函数的最大值和最小值

应用导数还可以确定函数的最大值和最小值．

定义 1　使 $f'(x) = 0$ 的点 x 叫做函数 f 的驻点．

定理 1　设函数 f 在其定义域闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 上可导，又 $x_1, \cdots, x_n$ 是 f 在 (a, b) 中的全部驻点，则在函数值

$$f(a), f(x_1), \cdots, f(x_n), f(b)$$

中，最大者就是 f 的最大值，最小者就是 f 的最小值.

证明 因为函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，所以 f 一定取到其最大值和最小值(第一章§4.2定理3). 它的最大值和最小值可能在区间的端点上取到，即可能是 $f(a)$ 或 $f(b)$；也可能在 (a,b) 内取到. 如果 f 在 (a,b) 内的某点 c 取到最大值或最小值，则 c 是极值点. 由假设，f 在点 c 可导，因此由 Fermat 定理(§2.1定理1)，点 c 一定是驻点，即点 c 必是 $x_1,\cdots,x_n$ 诸点之一，所以 $f(c)$ 必是 $f(x_1),\cdots,f(x_n)$ 诸值之一. 根据以上的分析，显见定理的结论成立. □

定理 2 设函数 f 在其定义区间 I 上连续，在 I° 上可导，$x_0\in I^\circ$.

1° 如果当 $x<x_0$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时 $f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 是唯一的最小值；

2° 如果当 $x<x_0$ 时 $f'(x)>0$，当 $x>x_0$ 时 $f'(x)<0$，则 $f(x_0)$ 是唯一的最大值.

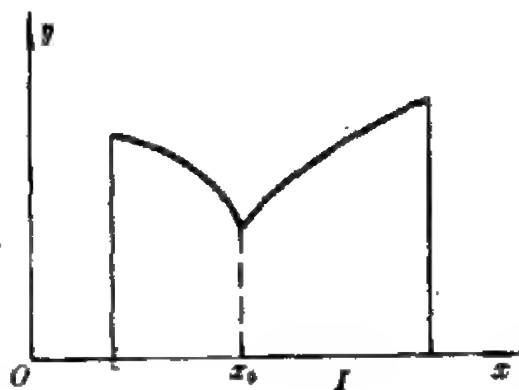


图 65

证明 我们证明1°. 由假设和§2.2定理2，f 在区间 $\{x\in I: x\leqslant x_0\}$ 上严格减，在区间 $\{x\in I: x\geqslant x_0\}$ 上严格增. 由此可见当 $x\in I$ 时 $f(x)\geqslant f(x_0)$ (图65) 且等号只当 $x=x_0$ 时成立. 所以 $f(x_0)$ 是唯一的最小值. 同样可以证明2°. □

定理 3 设函数 f 在其定义区间 I 上连续，在 I° 上有二阶导数，又 $x_0\in I^\circ$ 是驻点.

1° 若 $f''>0$，则 $f(x_0)$ 是唯一的最小值；

2° 若 $f''<0$，则 $f(x_0)$ 是唯一的最大值.

证明 我们证明1°. 由假设和§2.2定理2可知，f' 在 I° 上

严格增. 又因 $f'(x_0)=0$, 故当 $x<x_0$ 时 $f'(x)<0$; 当 $x>x_0$ 时 $f'(x)>0$. 再由定理 2 的 1°, 即知 $f(x_0)$是唯一的最小值. 同样可以证明 2°. □

例 1 设 $f(x)=(x-1)(x-2)^2$. 求函数 f 在区间$\left[0,\frac{5}{2}\right]$上的最大值和最小值.

解 先求驻点. 解方程

$$f'(x)=(3x-4)(x-2)=0$$

得 f 在$\left(0,\frac{5}{2}\right)$中的驻点有

$$x_1=\frac{4}{3},\quad x_2=2.$$

比较函数值

$$f(0)=-4,\ f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{27},\quad f(2)=0,\quad f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{8},$$

得 $f(0)=-4$ 最小, $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{8}$最大. 根据定理 1, f 在区间$\left[0,\frac{5}{2}\right]$的两个端点 0 和$\frac{5}{2}$上分别取到最小值 -4 和最大值 $\frac{3}{8}$. □

例 2 设 $f(x)=xe^x$ $(x\in R)$. 求函数 f 的最大值或最小值.

解 因为

$$f'(x)=(x+1)e^x,$$

所以, 当 $x<-1$ 时, $f'(x)<0$; 当 $x>-1$ 时, $f'(x)>0$. 由定理 2 即知 $f(-1)=-\frac{1}{e}$为最小值. 又因 $f(+\infty)=+\infty$, 故知 f 无最大值. □

例 3 某工厂 C 到铁路的距离 $CB=20$ 公里(图 66), 须从距 B 为 150 公里的 A 站运来原料. 现从铁路上某处 D 修建公路与工厂连接. 已知铁路与公路的运费之比为 3:5, 问 D 点应选在何处

方能使运费最省.



图 66

解 不妨设铁路每吨公里的运费为 3，则公路每吨公里的运费就是 5. 设 $BD=x$, 则

$$AD=150-x, \qquad CD=\sqrt{x^2+20^2}.$$

于是每吨的总运费便是

$$f(x)=3(150-x)+5\sqrt{x^2+20^2}, \quad 0\leqslant x\leqslant 150.$$

我们的问题就是要求函数 f 的最小值. 解方程

$$f'(x)=-3+\frac{5x}{\sqrt{x^2+400}}=0$$

得 $x=\pm 15$. 于是得 f 在区间 $(0, 150)$ 中的驻点为 $x=15$. 又因对一切 $x\in(0, 150)$ 有

$$f''(x)=\frac{2000}{(x^2+400)^{3/2}}>0,$$

由定理 3 的 1° 便知，f 只在 $x=15$ 取到最小值. 故 D 点应选在距 B 为 15 公里处，这时运费最省. □

例 4 重量为 W 的物体放在一粗糙水平面上，施加一力克服摩擦，使之移动. 设摩擦系数为 μ. 问该力应与水平面成何角度，方为最小?

解 如图 67，设作用力 F 与水平面成 θ 角，其水平分力为 F_x，垂直分力为 F_y. 于是有

$$F_x=\mu(W-F_y),$$

即

$$F\cos\theta=\mu(W-F\sin\theta),$$

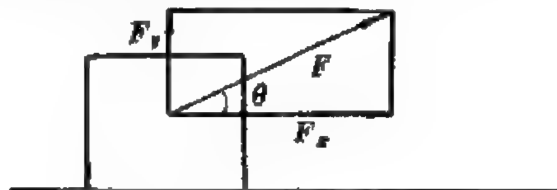


图 67

所以

$$F=\frac{\mu W}{\cos\theta+\mu\sin\theta},\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

要使F最小，即是要使 $\cos\theta+\mu\sin\theta$ 最大．令

$$g(\theta)=\cos\theta+\mu\sin\theta,\qquad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

解方程

$$g'(\theta)=-\sin\theta+\mu\cos\theta=0$$

得驻点 $\theta_0=\operatorname{arctg}\mu$．易见 $\theta_0\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$．又因当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时

$$g''(\theta)=-\cos\theta-\mu\sin\theta<0,$$

所以 g 在 θ_0 取到最大值．即所施之力与水平面成角度为 θ_0 时为最小．□

例 5 炼油厂要修建体积为 V_0 的贮油罐．问此罐直径与高之比为何时，表面积最小（用料最省）？

解 设半径为 r，高为 h，则表面积为

$$S=2\pi rh+2\pi r^2,\qquad r,h>0. \tag{1}$$

另一方面，根据题设，

$$\pi r^2h=V_0. \tag{2}$$

代入(1)式得

$$S=\frac{2V_0}{r}+2\pi r^2,\qquad r>0.$$

于是

$$S'=-\frac{2V_0}{r^2}+4\pi r,\qquad r>0, \tag{3}$$

$$S''=\frac{4V_0}{r^3}+4\pi>0,\qquad r>0.$$

记 $S'=0$ 的解为 r_0．由定理 3，当 $r=r_0$ 时 S 最小．由(3)式应有

$$2\pi r_0^3=V_0. \tag{4}$$

设 $r=r_0$ 时 $h=h_0$．由(2)式

$$\pi r_0^2 h_0 = V_0.$$

代入(4)式得

$$\frac{h_0}{2r_0} = 1.$$

即直径与高相等时表面积最小. □

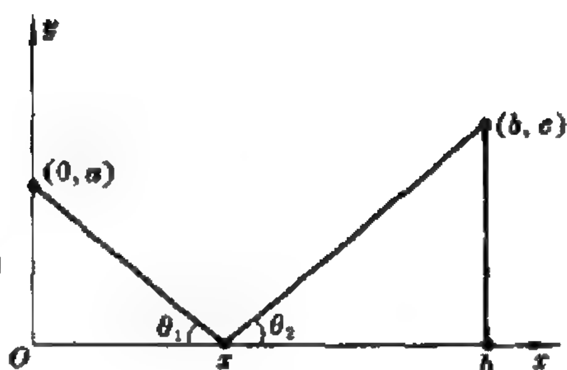


图 68

例 6 证明光线的入射角等于反射角.

证明 光线服从"最小原理", 即所经路程最短. 如图 68, 在点$(0, a)$处置一光源, 光线经 x 轴上某点 x 反射到(b, c). 这时光线所走过的路程为

$$L(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{c^2 + (b-x)^2}, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

于是问题是, x 为何时 $L(x)$最小? 由方程

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{b-x}{\sqrt{c^2 + (b-x)^2}} = 0$$

得到

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{b-x}{\sqrt{c^2 + (b-x)^2}}.$$

设入射角和反射角分别为 θ_1 和 θ_2, 上式便是说,

$$\cos\theta_1 = \cos\theta_2.$$

因此在驻点上$\theta_1 = \theta_2$, 即入射角等于反射角. 又

$$L''(x) = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{c^2}{[c^2 + (b-x)^2]^{3/2}} > 0,$$

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

所以当 $\theta_1 = \theta_2$ 时(这时 x 是驻点)$L(x)$最小. 因此, 光线为使所经路程最短, 必须有入射角等于反射角. □

注 如果在点 x_0 的一个邻域 $\Delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$上定理 2 或定理 3 的条件成立, 也就是说, 于 Δ 上 f' 在 x_0 的两边异号, 或者 f'' 在 Δ 上恒为正或恒为负且 x_0 是驻点, 则 $f(x_0)$是 f 在 Δ 上的最

小值或最大值，因而 $f(x_0)$ 是极小值或极大值．特别，由此容易明白：设 x_0 是函数 f 定义区间的内点且是 f 的驻点，f'' 在 x_0 连续．若 $f''(x_0)<0$，则 $f(x_0)$ 是极大；若 $f''(x_0)>0$，则 $f(x_0)$ 是极小．

习　　题

1．回答下列问题：

(1) 确定函数的最大值和最小值有哪些方法？

(2) 确定函数的极值有哪些方法？

2．设函数 f 在定义区间 I 上连续，且有唯一的极值点 $x_0\in I^\circ$．若 $f(x_0)$ 是极大值(极小值)，则 $f(x_0)$ 是最大值(最小值)．

3．求下列函数 f 的最大值和最小值，设

(1) $f(x)=x^4-2x^2+5,\quad -2\leqslant x\leqslant 2.$

(2) $f(x)=\sin 2x-x,\quad |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}.$

(3) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x},\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$

(4) $f(x)=|x^2-3x+2|,\quad |x|\leqslant 10.$

(5) $f(x)=x^2-3x+2,\quad |x|<+\infty.$

(6) $f(x)=x\ln x,\quad x>0.$

4．面积一定的矩形，何时周长最小？周长一定的矩形，何时面积最小？

5．欲建一间面积为 10 平方米的用房，其一边借用原有的墙壁．问此边为几米长时材料最省？

6．面积一定的矩形，何时其外接圆最小？

7．在半径为 R 的球内作正圆柱体，何时体积最大？

8．在半径为 R 高为 H 的正圆锥内作正圆柱体，何时体积最大？

9．内接于椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，边平行于坐标轴的矩形何时面积最大？

10．在底为 a，高为 h 的三角形中作矩形，一边在底边上，何时面积最大？

11．有矩形纸板，长为 8 厘米，宽为 5 厘米，从四角上剪去四个相等的小正方形，制成一个纸盒．问小正方形的边长为何时，盒子的容积最大？

12．要做一个无盖的圆柱桶，容积为 24π(米)^3．用来做底的金属板每平

方米 60 元，做侧面的每平方米 20 元。为使成本最低，桶的尺寸为何？

13. 体积一定的圆锥帐篷，高与底半径之比为何时，表面积最小？

14. 从半径为 R 的圆纸板上剪去一个扇形，做成一个圆锥体。欲使其有最大体积，扇形的顶角为何？

15. 顶为半圆形的坑道，其截面周长为 15 米。问底宽为何时，截面积最大？

16. 求从点 $(0, b)$ 到抛物线 $x^2=4y$ 的最短距离。

17. 求从点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的最短距离。

18. 对某量 a 做了 n 次测量，得 n 个数据 $x_1, \cdots, x_n$。试求一数 x 使 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x)^2$ 最小。

19. 一待测之量 x，已知 $x\in[a, b]$，$a>0$。今以一数 $t\in[a, b]$ 代之，考虑"相对误差" $r=|t-x|/x$。证明：

(1) 固定 t，则 r 在 $x=a$ 或 $x=b$ 时达到最大值 $m(t)$。

(2) $m(t)$ 当 t 为 a 和 b 的调和平均值时，即 $t=2\Big/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ 时最小。

20. 数列 $\sqrt{1}$，$\sqrt[2]{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\cdots$ 中那一项最大？

21. 设 $p, q>0$，$a, b\geqslant 0$。证明下列不等式：

(1)
$$\left(\frac{a}{p}\right)^p\left(\frac{b}{q}\right)^q\leqslant\left(\frac{a+b}{p+q}\right)^{p+q}.$$

(2) $\min\left(\frac{1}{2^{p-1}}, 1\right)(a+b)^p\leqslant a^p+b^p\leqslant\max\left(\frac{1}{2^{p-1}}, 1\right)(a+b)^p$.

提示：令 $b=c-a$。

22. (1) 设 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$。则 f 不变号的充分必要条件为何？方程 $f(x)=0$ 有重根、相异实根和无实根的条件分别为何？

(2) 用(1)证明 Schwarz 不等式

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{n}a_k^2\sum_{k=1}^{n}b_k^2.$$

由此再证 Cauchy 不等式

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}.$$

提示：考虑函数 f：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2.$$

§ 2.4 函数的凹凸

在§2.2中我们研究了如何用导数判别函数的单调性．如果函数单调增，则其几何图象是上升的；如果单调减，则是下降的．但在直观上，无论上升还是下降，都有两种方式：上凹和下凸，如图69所示．例如，$y=x^2$是下凸的．而$y=x^3$是上升的，但当$x<0$

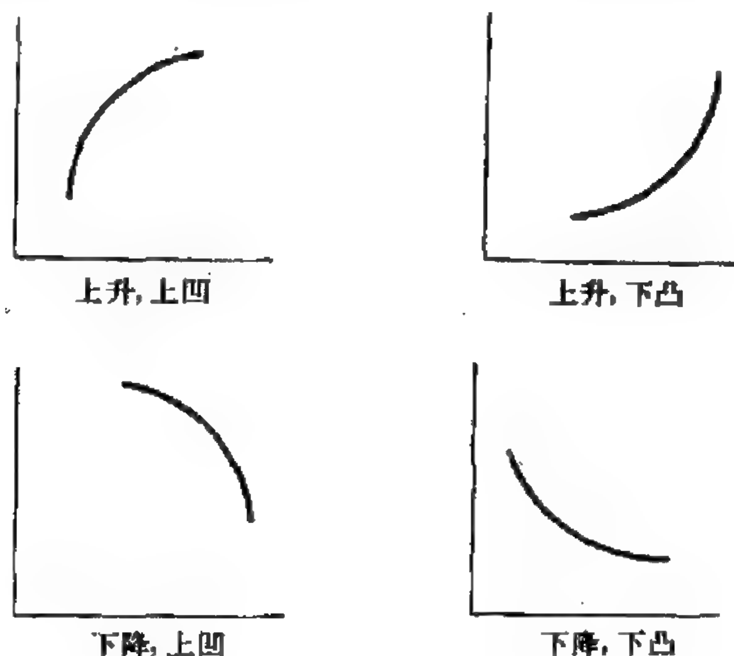


图 69

是上凹的，当$x>0$是下凸的．如果我们既知道了函数增减的区间，又知道它在升降时是上凹还是下凸的，则就可以比较确切地画出其图象了．

那么，究竟应如何定义函数的凹凸呢？若函数f下凸，$x_1<x_2$是定义域中任意两点，联结两点$(x_1, f(x_1))$和$(x_2, f(x_2))$作弦，则当$x_1<x<x_2$时曲线$y=f(x)$应位于弦的下方(图70)．为了描写这个现象，我们注意到，若x_1，x_2是任意二数，$x_1\neq x_2$，则数x位

于 x_1 和 x_2 之间的充要条件是

$$0<\frac{x-x_2}{x_1-x_2}<1.$$

令 $t=\frac{x-x_2}{x_1-x_2}$, 则 $0<t<1$, 且

$$x=tx_1+(1-t)x_2.$$

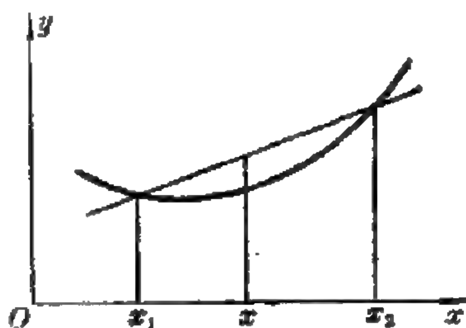


图 70

因此, 联结两点 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ 的弦的方程为

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2}=t, \qquad \frac{y-f(x_2)}{f(x_1)-f(x_2)}=t,$$

其中 $0<t<1$. 也就是

$$x=tx_1+(1-t)x_2, \quad y=tf(x_1)+(1-t)f(x_2), \qquad 0<t<1.$$

这样我们就有下述定义:

定义 1 设函数 f 在区间 I 上有定义. 如果对于一切 $x_1, x_2 \in I$ 和 $t\in(0, 1)$ 有

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\leqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2), \tag{1}$$

则说 f 在 I 上为**下凸**的或**凸**的. 如果对于一切 $x_1, x_2\in I$ 和 $t\in(0, 1)$ 有

$$f(tx_1+(1-t)x_2)\geqslant tf(x_1)+(1-t)f(x_2), \tag{2}$$

则说 f 在 I 上为**上凹**的或**凹**的. 如果对于一切 $t\in(0, 1)$, (1)式((2)式)中的等号只当 $x_1=x_2$ 时成立, 则说 f 在 I 上为**严格凸**(**严格凹**)的.

函数的凹、凸属性也是由导数确定的. 我们先从几何直观上来分析这个问题. 假定函数 f 有二阶导数. 如果它是下凸的, 从图 71 观之, 当 x 增加时相应的切线渐渐抬起, 也就是说, 当 $x_1<x_2$ 时应有 $f'(x_1)\leqslant f'(x_2)$, 即 f' 非减. 因此应有 $f''\geqslant 0$; 反之亦然. 如果它是上凹的, 则从图 72 来看, 当 $x_1<x_2$ 时应有 $f'(x_1)\geqslant f'(x_2)$, 即 f' 非增. 因此应有 $f''\leqslant 0$; 反之亦然. 这个直观是正确的.

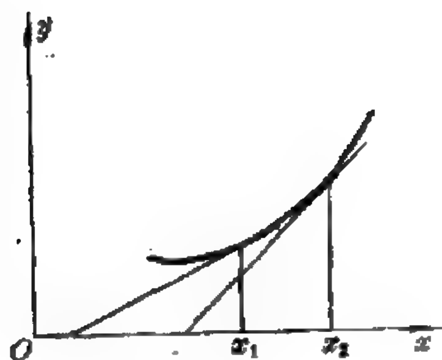


图 71

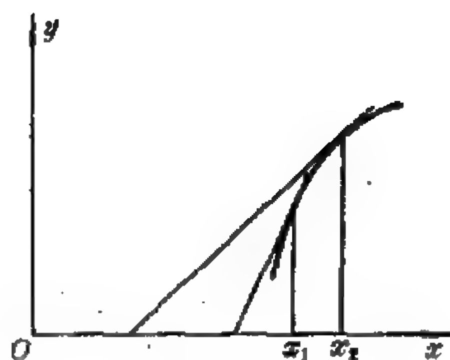


图 72

定理 1 如果函数 f 在区间 I 上有非减(非增)的导函数，则 f 在 I 上是下凸(上凹)的．特别，如果当 $x\in I$ 时 $f''(x)\geqslant 0$($f''(x)\leqslant 0$)，则 f 在 I 上是下凸(上凹)的．

证明 设 f' 在 I 上非减(非增)，又设 x_1, x_2 为 I 中任意两点，$0<t<1$．由微分平均值定理，

$$
\begin{aligned}
&tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-f(tx_1+(1-t)x_2)\\
=&t[f(x_1)-f(tx_1+(1-t)x_2)]\\
&\qquad+(1-t)[f(x_2)-f(tx_1+(1-t)x_2)]\\
=&tf'(\xi_1)(1-t)(x_1-x_2)+(1-t)f'(\xi_2)t(x_2-x_1)\\
=&t(1-t)(x_2-x_1)[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)],
\end{aligned}
$$

其中 ξ_1 位于 x_1 和 $tx_1+(1-t)x_2$ 之间，ξ_2 位于 x_2 和 $tx_1+(1-t)x_2$ 之间．而 $tx_1+(1-t)x_2$ 位于 x_1 和 x_2 之间．因此，若 $x_1<x_2$，则 $\xi_1<\xi_2$，于是 $f'(\xi_1)\leqslant f'(\xi_2)$($f'(\xi_1)\geqslant f'(\xi_2)$)；若 $x_1>x_2$，则 $\xi_1>\xi_2$，于是 $f'(\xi_1)\geqslant f'(\xi_2)$($f'(\xi_1)\leqslant f'(\xi_2)$)．所以(1)((2))式成立．□

注 1 如果函数 f 在区间 I 上可导，则定理 1 中的条件也是 f 在 I 上为下凸(上凹)的必要条件(习题 7(1))．

注 2 从定理 1 的证明易见：如果函数 f 在区间 I 上有严格增(严格减)的导函数，则 f 在 I 上严格下凸(严格上凹)．

例 1 证明：若 $p>1$，则对一切 $x, y\in R$ 有

$$|x+y|^p \leqslant 2^{p-1}(|x|^p+|y|^p).$$

证明 考虑函数 f: $f(x)=x^p$ $(x>0)$. 因为

$$f''(x)=p(p-1)x^{p-2}>0 \qquad (x>0),$$

由定理 1 的注 2，f 是严格下凸的. 应用(1)式，取 $t=\frac{1}{2}$, $x_1=x$, $x_2=y$ 得

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^p \leqslant \frac{x^p+y^p}{2}, \qquad x, y>0.$$

所以

$$(x+y)^p \leqslant 2^{p-1}(x^p+y^p), \qquad x, y>0,$$

而且等号当且只当 $x=y$ 时成立. 若 $x=0$ 或 $y=0$, 上式显然也成立. 再以 $|x|$, $|y|$ 代 x, y 即得证，而且可见等号当且只当 $x=y$ 时成立. □

定理 2 函数 f 在区间 I 上下凸(上凹)的充分必要条件是对一切 $x_1, \cdots, x_n \in I$, $t_1, \cdots, t_n>0$ $(n \geqslant 2)$ 有

$$f\left(\frac{t_1x_1+\cdots+t_nx_n}{t_1+\cdots+t_n}\right) \leqslant \frac{t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n)}{t_1+\cdots+t_n} \tag{3}$$

$$\left(f\left(\frac{t_1x_1+\cdots+t_nx_n}{t_1+\cdots+t_n}\right) \geqslant \frac{t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n)}{t_1+\cdots+t_n}\right). \tag{4}$$

证明 (充分性) 这是显然的. 设(3)式对一切 $n \geqslant 2$ 成立. 特别取 $n=2$ 得

$$f\left(\frac{t_1x_1+t_2x_2}{t_1+t_2}\right) \leqslant \frac{t_1f(x_1)+t_2f(x_2)}{t_1+t_2}$$

$$\left(f\left(\frac{t_1x_1+t_2x_2}{t_1+t_2}\right) \geqslant \frac{t_1f(x_1)+t_2f(x_2)}{t_1+t_2}\right)$$

对一切 $x_1, x_2 \in I$, $t_1, t_2>0$ 成立. 若 $0<t<1$, 令 $t_1=t$, $t_2=1-t$ 即得(1)((2))式.

(必要性) 设 f 在I上是下凸(上凹)的，我们证明(3)((4))式对一切自然数 $n \geqslant 2$ 成立. 先证(3)((4))式当 $n=2$ 时成立. 事实

上，任取 $t_1>0, t_2>0$，令 $t=\frac{t_1}{t_1+t_2}$，则 $0<t<1$，$1-t=\frac{t_2}{t_1+t_2}$，代入(1)式即知(3)((4))式在 $n=2$ 时成立．设(3)((4))式当 $n=k-1$ 时成立．任取 $x_1, \cdots, x_k\in I$，$t_1>0, \cdots, t_k>0$，则因

$$\min_{1\leqslant i\leqslant k} x_i\leqslant\frac{t_1x_1+\cdots+t_kx_k}{t_1+\cdots+t_k}\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant k} x_i,$$

所以

$$\frac{t_1x_1+\cdots+t_kx_k}{t_1+\cdots+t_k}\in I.$$

同理

$$\frac{t_1x_1+\cdots+t_{k-1}x_{k-1}}{t_1+\cdots+t_{k-1}}\in I.$$

记

$$T_1=t_1+\cdots+t_{k-1},\quad T_2=t_k,$$

$$X_1=\frac{t_1x_1+\cdots+t_{k-1}x_{k-1}}{t_1+\cdots+t_{k-1}},\quad X_2=x_k.$$

于是

$$f\left(\frac{t_1x_1+\cdots+t_kx_k}{t_1+\cdots+t_k}\right)=f\left(\frac{T_1X_1+T_2X_2}{T_1+T_2}\right)$$

$$\leqslant\frac{T_1f(X_1)+T_2f(X_2)}{T_1+T_2}\leqslant\frac{T_1\dfrac{t_1f(x_1)+\cdots+t_{k-1}f(x_{k-1})}{t_1+\cdots+t_{k-1}}+T_2f(X_2)}{T_1+T_2}$$

$$=\frac{t_1f(x_1)+\cdots+t_kf(x_k)}{t_1+\cdots+t_k},$$

即(3)((4))式当 $n=k$ 时也成立．因此(3)((4))式对一切自然数 $n\geqslant 2$ 成立．□

注　从定理 2 的证明易见，函数 f 在区间 I 上为严格下凸(严格上凹)的充分必要条件是对一切 $x_1, \cdots, x_n\in I$，$t_1, \cdots, t_n>0$ $(n\geqslant 2)$ 有(3)式((4))式成立，并且(3)式((4))式中的等号只当 $x_1=\cdots=x_n$ 时成立．

例 2 证明几何平均数不大于算术平均数，也就是说，若 $x_1, \cdots, x_n \geqslant 0$，则

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \tag{5}$$

并且等号当且只当 $x_1 = \cdots = x_n$ 时成立.

证明 考虑函数 f:

$$f(x) = \ln x, \qquad x > 0.$$

因为

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \qquad x > 0,$$

由定理 1 的注 2 可知 f 是严格上凹的. 再由定理 2 的注，(4)式成立. 取 $t_1 = \cdots = t_n = \frac{1}{n}$，则当 $x_1, \cdots, x_n > 0$时有

$$\ln \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \frac{\ln x_1 + \cdots + \ln x_n}{n} = \ln \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},$$

即(5)式成立，且其中等号只当 $x_1 = \cdots = x_n$ 时成立. □

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 函数的(严格)上凹和(严格)下凸的定义为何?

(2) 函数凹、凸的几何意义为何? 对了解函数图象有何作用?

(3) 如何用导数判定函数的凹、凸和严格凹、凸?

(4) 如果 f 为区间 I 上的凸函数，$x_1, \cdots, x_n \in I$, $t_1, \cdots, t_n \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$，则 $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} t_i x_i\right)$如何?

2. 判定函数 f 的凹、凸，设

(1) $f(x) = x^{\mu}$ $\qquad (x \geqslant 0, \mu \geqslant 1)$.

(2) $f(x) = a^x$ $\qquad (x \in R, a > 0)$.

(3) $f(x)=\ln x \qquad (x>0)$.

(4) $f(x)=x\ln x \qquad (x>0)$.

(5) $f(x)=\sin x \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi)$.

3. 证明下列不等式(并讨论等号成立的条件):

(1)
$$a^{\frac{x_1+x_2}{2}}\leqslant\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2},\quad a>0,\ x_1,\ x_2\in R.$$

(2)
$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^p\leqslant\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n},$$

其中 $p\geqslant1$, $x_1, x_2, \cdots, x_n\geqslant0$.

(3)
$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\leqslant\left(x_1^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n}\right)^{\frac{1}{x_1+x_2+\cdots+x_n}},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n>0$.

(4)
$$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}\leqslant\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n,$$

其中 $x_1, \cdots, x_n\geqslant0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n>0, \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$.

4. 证明圆的内接 n 边形中, 以正 n 边形的面积为最大.

5. 证明两个凸函数之和仍为凸函数.

6. 证明两个非减的非负凸函数之积仍是凸函数.

7. 设 f 是区间 I 上的凸函数, 证明:

(1) 对于 I 中的任意三点 $x_1<x_2<x_3$ 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

试作出几何解释.

提示: 将 x_2表示为 $x_2=tx_1+(1-t)x_3$, 解出 t, 再应用定义.

(2) 在 I° 上存在非减的左、右导函数 f'_-和 f'_+, 并且 $f'_-(x)\leqslant f'_+(x)$对一切 $x\in I^\circ$成立.

(3) 设 $x\in I^\circ$, 若 f'_+在 x 左连续或 f'_-在 x 右连续, 则 f 在 x 可导.

(4) 若$[a, b]\subset I^\circ$, 则当 $x_1, x_2\in[a, b]$时有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|,$$

其中M是常数. 所以 f 在 I° 上连续.

(5) 若 $c\in I^\circ$, 则存在数 α 使

$$f(x)\geqslant\alpha(x-c)+f(c)$$

对一切 $x\in I$ 成立. 试作出几何解释.

8. 设函数 f 的定义域为区间 I. 如果对于 I 中的任意三点 $x_1<x_2<x_3$ 都有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1},$$

则 f 是凸的.

9. 设函数 f 的定义域是区间 I, 如果对于每一点 $b\in I$ 都相应有一数 α 使

$$f(x)\geqslant\alpha(x-b)+f(b)$$

对一切 $x\in I$ 成立, 则 f 是凸的.

提示: 在 I 中任取三点 $a<b<c$ 可得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant\frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

和上题一样, 这也是凸的充分条件.

10. 设函数 f 在区间 I 上可导, 则 f 在 I 上为凸的充分必要条件是当 $x\in I$ 时曲线 $y=f(x)$ 位于其每一条切线的上方.

11. 设 f 是区间 $[0,+\infty)$ 上的非负凸函数, $F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ $(x>0)$. 证明

(1) 若 $f(0)=0$, 则 f 严格增, F 非减.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=0$, 则 F 严格增.

12. 设函数 f 在区间 I 上连续, 且

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

对一切 $x_1, x_2\in I$ 成立, 则 f 在 I 上是凸的.

提示: 由所设可得

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^n}}{2^n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{2^n})}{2^n}$$

对一切 $x_1,\cdots,x_{2^n}\in I$ 成立, 因此

$$f(tx+(1-t)y)\leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$$

对一切 $x, y\in I$ 和 $(0,1)$ 中形为 $t=\dfrac{k}{2^n}$ 的有理数成立.

§ 2.5 函数作图

应用以上的知识, 我们可以绘出函数的图象. 要绘出一个函

数 f 的图象，最重要的是要知道它的增、减和凹、凸的区间. 这就要算出 f' 和 f''，再算出 f' 和 f'' 的全部零点 $x_1, \cdots, x_n$. 只要 f'' 连续，则 f' 和 f'' 在每一个区间 (x_{i-1}, x_i) 上定号，因此就可知道 f 在这些区间上的增、减和凹、凸. 其次还应知道一些重要的函数值和极限值，以及函数是否有对称性等. 总的来说，函数作图大致有如下几个步骤：

1） 确定函数 f 的定义域.

2） 确定 f 的奇、偶性和周期性.

3） 求出 f' 和 f'' 的全部零点 $x_1, \cdots, x_n$，确定 f' 和 f'' 在每一个区间 (x_{i-1}, x_i) 上的符号.

4） 算出函数值 $f(x_i)(i=1, \cdots, n)$ 以及其它一些容易算出的函数值.

5） 求出 f 的零点.

6） 算出 f 在区间端点上的极限.

定义 1 若函数 f 在点 x_0 的一边为下凸，另一边为上凹，则 x_0 叫做 f 的拐点.

如果 x_0 是函数 f 的拐点，则 f 的图象通过点 $P(x_0, f(x_0))$ 时要出现"扭转"现象. 例如，设 f 在 x_0 的左边为下凸，右边为上凹，且 $f'(x_0)$ 存在. 记 f 的图象在 P 点的切线为 l. 则当 $x<x_0$ 时 f 的图象位于 l 的上方（§2.4 习题 10），而当 $x>x_0$ 时位于 l 的下方，因此 f 的图象在通过点 P 时"扭"过其切线(图 73). 点 P 也常常叫做 f 的拐点.

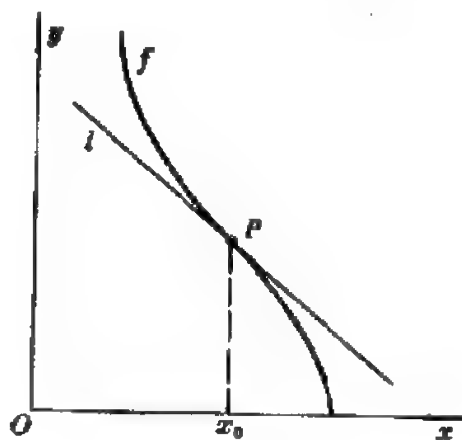


图 73

例 1 设 $f(x)=(x-1)^2+2\ln x$. 作出函数 f 的图象.

解 f 的定义域为$(0, +\infty)$. 又

$$f'(x)=2(x-1)+\frac{2}{x}=2\frac{x^2-x+1}{x},$$

$$f''(x)=2\frac{x^2-1}{x^2}.$$

$$f''(1)=0,\ f(1)=0,$$

$$f(0^+)=-\infty, f(+\infty)=+\infty.$$

根据以上资料列表:

x	0^+	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$+\infty$
f'		$+$	2	$+$	
f''		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↑上凹	0 拐点	↑下凸	$+\infty$

由此就可作出f的图象如图74. f有拐点$(1, 0)$, 图象在拐点上扭过切线$y=2(x-1)$. □

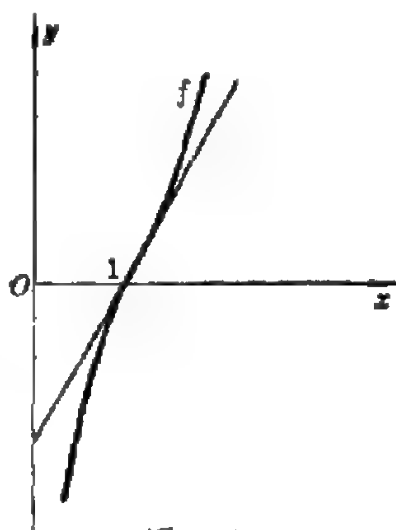


图 74

例 2 作出函数 f: $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$的图象.

解 f的定义域是 R. 但因它是偶函数,所以只须考虑区间$[0, +\infty)$. 算得

$$f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},\qquad f''(x)=2\frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}.$$

$$f'(0)=0,\ f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0.$$

$$f(+\infty)=0.$$

列表:

x	0	$\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$	$+\infty$
f'	0	$-$	$-\frac{9}{8\sqrt{3}}$	$-$	
f''	$-$	$-$	0	$+$	
f	1 极大	↓上凹	$\frac{3}{4}$ 拐点	↓下凸	0

据此作得 f 的图象如图 75. □

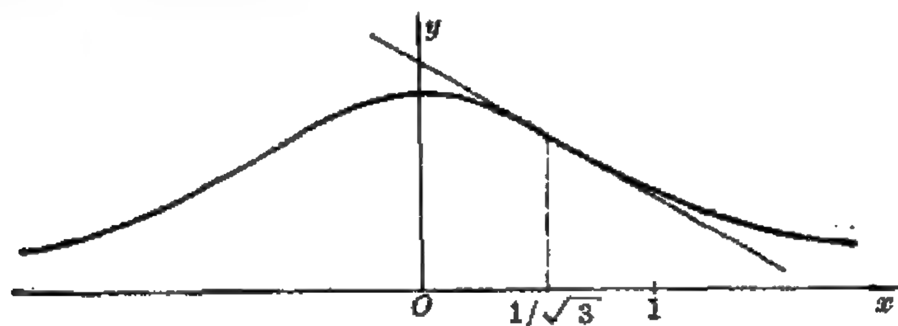


图 75

例 3 作出函数 f: $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+\frac{4}{3}$ 的图象.

解 f 的定义域是 R. 又

$$f'(x)=x^2-2x, \qquad f''(x)=2(x-1),$$

$$f'(0)=f'(2)=0, \qquad f''(1)=0.$$

$$f(-1)=f(2)=0,$$

$$f(-\infty)=-\infty, f(+\infty)=+\infty.$$

列表:

x	$-\infty$	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$	$+\infty$
f'		$+$		$+$	0	$-$	-1	$-$	0	$+$	
f''		$-$				$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f	$-\infty$	↑上凹	0	↑上凹	$\frac{4}{3}$ 极大	↓上凹	$\frac{2}{3}$ 拐点	↓下凸	0 极小	↑下凸	$+\infty$

据表作得 f 的图象如图 76．▯

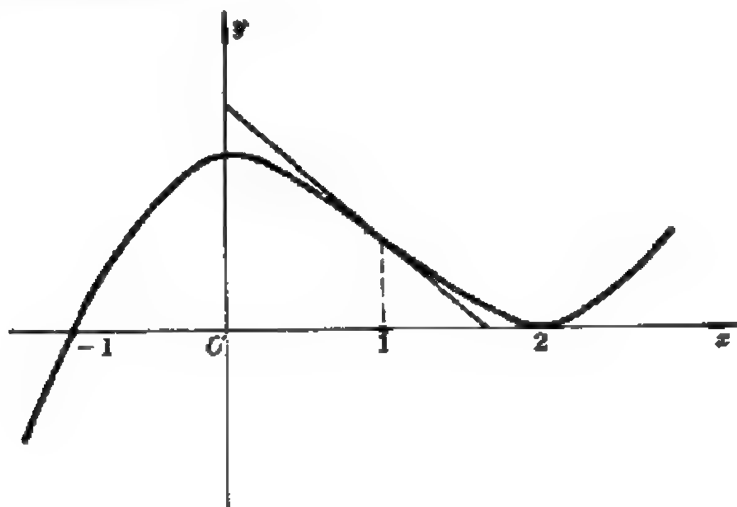


图 76

习　　题

1．回答下列问题：

(1) 函数作图应根据哪些资料？它们对函数图象有何作用？

(2) 何谓拐点？函数图象在拐点上出现什么现象？

(3) 拐点与二阶导数有何关系？

2．画出下列曲线：

(1) $y=x^4-2x+10$．　　(2) $y=e^{-x^2}$．

(3) $y=\ln(1+x^2)$．　　(4) $y=x-\ln(1+x)$．

(5) $y=x^3-3x^2-9x+14$．　　(6) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$．

(7) $y=x^2e^{-x}$．

3．确定下列方程的实根所在范围：

(1) $x^3-6x^2+9x-10=0$．　　(2) $x^3-3x^2-9x+h=0$．

(3) $x^5-5x=a$．　　(4) $\ln x=kx$．

4．在什么条件下，方程 $x^3+px+q=0$

(1) 有一个实根；

(2) 有三个实根．

5．设函数 f 在 $(a,+\infty)$ 上定义，如果

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\mu)]=0,$$

则称直线 $y=\lambda x+\mu$ 为曲线 $y=f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的"渐近线"。试作出几何上的解释，并证明

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad \mu=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x].$$

再作出下列曲线：

(1) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$.

(2) 在同一坐标平面上作出两条曲线

$$y=\frac{1}{x}\quad 和\quad y=x+\frac{1}{x}.$$

§ 2.6 L'Hospitale 法则

在第一章 § 3.3 中我们已经知道，如果当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷小量，那么 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 当 $x\to x_0$ 时可以出现各种极限，也可能没有极限。因此，我们称 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 当 $x\to x_0$ 时为"$\frac{0}{0}$"型的**不定型**.

应用平均值定理，我们可以得到计算不定型极限的一个简单有效的方法.

定理 1(L'Hospitale 法则) 设函数 f 和 g 在区间 (x_0,b)(或 (a,x_0))上可导，又

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0,$$

同时在该区间上 $g'(x)\neq0$. 如果极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明 由假设可以认为，函数 f 在点 x_0 是连续的，其值为 0. 在区间 (x_0,b) 内任取一点 x，于是根据Cauchy平均值定理(§2.1),

在(x_0, x)内有ξ使得

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

由于$\xi=\varphi(x)$介于x和x_0之间，故当$x\to x_0$时$\xi\to x_0$。在上式两端取极限即得(第一章§3.2定理7)

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ \square$$

这个法则告诉我们，如果$\frac{f(x)}{g(x)}$当$x\to x_0$时是"$\frac{0}{0}$"型的不定型，那么计算极限$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$只要计算$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. 如果$\frac{f'(x)}{g'(x)}$当$x\to x_0$时还是"$\frac{0}{0}$"不定型，那么又可对它使用 L'Hospitale 法则，转为计算极限$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}$. 如此可以一直继续下去. 即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

但要注意，上式中除最后一个极限外，都是不定型.

例 1　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解　这是"$\frac{0}{0}$"不定型. 用 L'Hospitale 法则:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.\ \square$$

例 2　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.\ \square$$

例 3　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\alpha+1}-(\alpha+1)x+\alpha}{(x^2-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\alpha+1}-(\alpha+1)x+\alpha}{(x-1)^2(x+1)^2}$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{x^{\alpha+1}-(\alpha+1)x+\alpha}{(x-1)^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{(\alpha+1)x^{\alpha}-(\alpha+1)}{2(x-1)}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to 1}\frac{(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1}}{2}=\frac{(\alpha+1)\alpha}{8}. \quad \square$$

L'Hospitale 法则当 $x\to\infty$ 时也是成立的，即

定理 2 设函数 f 和 g 在区间 $(a,+\infty)$ 上可导，又

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0,$$

同时在该区间上 $g'(x)\neq 0$. 如果

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明 令 $x=\frac{1}{t}$，则当 $x\to+\infty$ 时 $t\to 0$. 所以

$$0=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{t\to 0}f\left(\frac{1}{t}\right),\quad 0=\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{t\to 0}g\left(\frac{1}{t}\right).$$

由定理 1 即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square$$

例 4 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\sin\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)\cos\frac{1}{x}}=1. \quad \square$$

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是无穷大量，那么当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是"$\frac{\infty}{\infty}$"型的不定型. 对于这种不定型，L'Hospitale 法则也是成立的，即

定理 3 设函数 f 和 g 在区间 (x_0, b)（或 (a, x_0)）上可导，且

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty,$$

同时在该区间上 $g'(x)\neq 0$. 如果极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1}$$

存在，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

证明 我们就一种情况来证明：假定(1)中的极限是有限的. 设

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

任给 $\varepsilon>0$，于是存在一数 $c_0\in(x_0, b)$，当 $x\in(x_0, c_0)$时

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

又

$$\frac{f(x)-f(c_0)}{g(x)-g(c_0)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(c_0)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(c_0)}{g(x)}}=\frac{f(x)}{g(x)}I(c_0, x).$$

另一方面，由 Cauchy 平均值定理，当 $x\in(x_0, c_0)$时

$$\frac{f(x)-f(c_0)}{g(x)-g(c_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

其中 $\xi\in(x, c_0)\subset(x_0, c_0)$. 所以当 $x\in(x_0, c_0)$时

$$A-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}I(c_0, x)<A+\frac{\varepsilon}{2}.$$

但由假设可见

$$\lim_{x\to x_0} I(c_0, x)=1. \tag{2}$$

因此存在 $c_1\in(x_0, c_0)$，当 $x\in(x_0, c_1)$时 $I(c_0, x)>0$. 所以当$x\in(x_0,$

$c_1) \subset (x_0, c_0)$时

$$\frac{A-\frac{\varepsilon}{2}}{I(c_0, x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{A+\frac{\varepsilon}{2}}{I(c_0, x)}.$$

由(2)式，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{A-\frac{\varepsilon}{2}}{I(c_0, x)} = A-\frac{\varepsilon}{2}, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{A+\frac{\varepsilon}{2}}{I(c_0, x)} = A+\frac{\varepsilon}{2},$$

所以又存在 $c \in (x_0, c_1)$，当 $x \in (x_0, c)$时

$$\frac{A-\frac{\varepsilon}{2}}{I(c_0, x)} > \left(A-\frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} = A-\varepsilon,$$

$$\frac{A+\frac{\varepsilon}{2}}{I(c_0, x)} < \left(A+\frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{\varepsilon}{2} = A+\varepsilon.$$

因此当$x \in (x_0, c) \subset (x_0, c_1)$时

$$A-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A+\varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

这便是所证. □

注 与定理 2 的情形相同，当 $x \to \infty$时定理 3 也是成立的.

例 5 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}$，$\alpha > 0$.

解 这是"$\frac{\infty}{\infty}$"不定型. 应用 L'Hospitale 法则(定理 3 的注)得

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = 0. \quad □$$

例 6 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{x}}$，$\alpha > 0$.

解 不妨设 $n-1 < \alpha \leqslant n$，其中 n 是某一自然数. 于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}{e^{x}}=\cdots$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^{\alpha-n}}{e^{x}}$$

$$=0. \quad \square$$

再注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}}{x^{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{x(1-\ln x)}=0,$$

我们便又一次得到第一章§3.3(1)中的数量级序列. 但是，现在我们所用的方法是一个统一的、简单的方法，比起第一章中的方法要容易多了.

在计算极限时，还有"$0\cdot\infty$"型和"$\infty-\infty$"型的不定型. 又"0^0"可以看成是"$e^{0\cdot\ln 0}$"，因此可以归结为"$0\cdot\infty$"型，所以"0^0"是不定型. 同样，"1^{∞}"和"∞^0"也是不定型，统都可归结为"$0\cdot\infty$". 而"$0\cdot\infty$"和"$\infty-\infty$"常常可以变化为"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$".

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha}\ln x$, $\alpha>0$.

解 这是"$0\cdot\infty$"不定型，可以改为"$\frac{\infty}{\infty}$"：

$$\lim_{x\to0^+}x^{\alpha}\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=\lim_{x\to0^+}-\frac{x^{\alpha}}{\alpha}=0.$$

或由例 5，

$$\lim_{x\to0^+}x^{\alpha}\ln x=\lim_{t\to+\infty}\frac{-\ln t}{t^{\alpha}}=0. \quad \square$$

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)$.

解 这是"$\infty-\infty$"不定型，可以变化为"$\frac{0}{0}$"：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\operatorname{tg}x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0. \quad \square$$

例 9　求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x$.

解　这是"0^0"不定型. 改写成 e 的指数形式:

$$(\sin x)^x = e^{x\ln\sin x},$$

就得"$0\cdot\infty$"不定型. 因为(例 7)

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln\sin x = \lim_{x\to 0^+}\sin x\cdot\ln\sin x = 0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^x = 1. \quad \square$$

例 10　求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\mathrm{tg}x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

解　这是(∞^0). 因为

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\ln\mathrm{tg}x &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(\ln\sin x-\ln\cos x)\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\ln\cos x\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\cos x\ln\cos x\\
&= \left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1}{-\sin x}\right)\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\mathrm{tg}x)^{\frac{\pi}{2}-x} = 1. \quad \square$$

以上我们介绍了用 L'Hospitale 法则求极限的方法. 归纳起来有以下几点:

1) 首先应判断所求极限是否不定型,非不定型不能用L'Hospitale 法则.

2) 如果是"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型, 只要极限$\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$存在, 就可用

L'Hospitale 法则。

3）如果是“$0\cdot\infty$”或“$\infty-\infty$”型，应变化为“$\frac{0}{0}$”或“$\frac{\infty}{\infty}$”。

4）如果是“0^0”，“1^∞”或“∞^0”型，变化成 e 的指数形式即得“$0\cdot\infty$”。

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) 不定型有哪几种？

(2) 下列极限能否用 L'Hospitale 法则？为什么？

1° $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x}{x}$.　　2° $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}$.

3° $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$.

(3) 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^x$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}x^{\cos x}$ 是否不定型？

(4) 设 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是不定型，如果极限 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，是否极限 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也不存在？

(5) L'Hospitale 法则是否可用于数列极限？

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x(x+2)}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^{x^2}-1)\sin x^2}{x^2(\cos x-1)}$.　　(4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}$.　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{x^3}$.　　(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2(x^3+1)\ln x}{e^x(2x^3+x+5)}$.

(9) $\lim\limits_{x\to 1-0}(\ln x)\ln(1-x)$.　　(10) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$.

(11) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$.　　(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{a}{x}\right)^x$.

(13) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$. (14) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right]$.

(16) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$. (17) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{arctg}\,n\right)^n$.

(18) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a, b, c>0$.

3. (1) 设 f 有连续的二阶导函数, 证明

$$f''(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

(2) 设 f 有二阶导数, 证明上式.

(3) 设 f 是有二阶导数的凸函数, 证明 f'' 非负.

4. 设 u, v 和 w 有连续的二阶导数, 求极限

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h^3}\begin{vmatrix}u(x) & v(x) & w(x)\\ u(x+h) & v(x+h) & w(x+h)\\ u(x+2h) & v(x+2h) & w(x+2h)\end{vmatrix}.$$

5. 设 $a, b>0$. 定义

$$\Delta(a,b)(s)=\left(\frac{a^s+b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}},\quad s\neq0,$$

叫做 a 和 b 的"s阶平均数". 显然, 当 $s=1$ 时得算术平均数; 当 $s\to0$ 时得几何平均数(习题 2(18)).

证明:

(1) 当 $a\neq b$ 时 $\Delta(a,b)$ 严格增.

(2) $\lim\limits_{s\to-\infty}\Delta(a,b)(s)=\min(a,b)$, $\lim\limits_{s\to+\infty}\Delta(a,b)(s)=\max(a,b)$.

(3) $\min(a,b)\leqslant\Delta(a,b)(s)\leqslant\max(a,b)$.

6. 设

$$y=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=1+x+\cdots+x^n.$$

证明:

(1) $$y'\Big|_{x=1}=1+2+\cdots+n,$$

$$(xy')'\Big|_{x=1}=1^2+2^2+\cdots+n^2,$$

$$[x(xy')']'\Big|_{x=1}=1^3+2^3+\cdots+n^3.$$

(2) $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

提示：$(x-1)y+1=x^{n+1}$.

(3) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$.

提示：$(x-1)xy'+xy=(n+1)x^{n+1}$.

(4) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=(1+2+\cdots+n)^2$.

提示：$(x-1)x(xy')'+2x(xy')+xy=(n+1)^2x^{n+1}$.

7. 设 $n\in N$ 是一個数，函数 f 在一点 x_0 有 n 阶导数，证明

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f(x_0+kh).$$

第三节 Taylor 公式及其应用

§ 3.1 Taylor 公式

在第二节中，我们根据微分平均值定理用一阶和二阶导数研究了函数若干方面的性质，那么函数的高阶导数对函数的研究有没有作用呢？要回答这个问题，自然就想到把微分平均值定理推广到高阶导数．微分平均值定理的一般形式是(§ 2.1 定理 4)：

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(\xi)}{G'(\xi)}[G(x)-G(a)]. \tag{1}$$

其中 ξ 是 a 和 x 之间的某数．"高阶"的微分平均值定理应具何种形式呢？我们先考虑最简单的函数——多项式．设函数 f 是多项式：

$$f(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n.$$

倘若我们可以把它改写成

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+\cdots+a_n(x-a)^n,$$

则就有(参见 §1.5 例 4)

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!},\quad k=0,1,\cdots,n, \tag{2}$$

所以

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

由于它的右边是一个 n 次多项式，所以这个式子只当 f 是多项式时才能成立．如果 f 不是多项式，这个式子就不能成立．因此就有(设 f 有 n 阶导数)

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \tag{3}$$

如果 $n=0$，平均值定理的(1)式告诉我们，存在 ξ 于 a 和 x 之间使

$$R_0(x)=\frac{f'(\xi)}{G'(\xi)}[G(x)-G(a)].$$

我们的问题就是，当 $n>0$ 时函数 R_n 的形式为何？弄清楚了这个问题，自然就得平均值定理的推广．为此我们不妨将(3)式简写为

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x), \tag{4}$$

其中

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \tag{5}$$

P_n叫做 f 在 a 点的“Taylor 多项式”．我们把(4)式(也就是(3)式)叫做函数 f 在 a 点的“Taylor 公式”，其中 R_n 叫做“余项”，是我们要估计的．

定理 1（余项形式定理） 设函数 f 在区间 I 上有 n 阶连续导数，在 I° 上有 $n+1$ 阶导数，$a\in I^\circ$。令

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),\quad x\in I, \tag{6}$$

其中 P_n 是 f 在 a 点的 Taylor 多项式．任取 $x\in I, x\neq a$．记 I_x 为以 a 和 x 作端点的闭区间(图 77)．设函数 G 在 I_x 上连续，在 I_x° 上可导，且当 $t\in I_x^\circ$ 时 $G'(t)\neq 0$．则存在 $\xi\in I_x^\circ$ 使

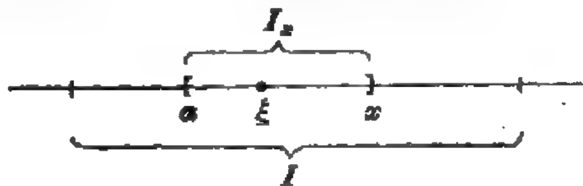


图 77

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!G'(\xi)}(x-\xi)^n[G(x)-G(a)]. \tag{7}$$

特别，取 $G(t)=(x-t)^{n+1}$ 就得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{8}$$

这个余项叫做"Lagrange 余项"．取 $G(t)=x-t$ 就得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a). \tag{9}$$

这个余项叫做"Cauchy 余项"．

证明 令

$$F(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,\quad t\in I.$$

则 F 在 I 上连续，在 I° 上可导．当 $t\in I^\circ$ 时

$$\begin{aligned}F'(t)&=f'(t)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\\&=f'(t)+\sum_{j=2}^{n+1}\frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!}(x-t)^{j-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}.\end{aligned}$$

易见，抵消后得

$$F'(t)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n, \qquad t\in I^\circ.$$

对 F 和 G 在 I_x 上应用 Cauchy 平均值定理，便知存在 $\xi\in I_x^\circ$ 使

$$\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!G'(\xi)}(x-\xi)^n.$$

但

$$F(x)-F(a)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k=R_n(x),$$

因此得到(7)式. □

注 (7)式中的 ξ 自然也可以写成

$$\xi=a+\theta(x-a),$$

其中 θ 是(0, 1)中某数. 如果 $a=0$, 则 Taylor 公式也常常叫做"Mclaurin 公式". (8)是特别重要的余项形式. 易见，带 Lagrange 余项(8) 的Taylor 公式是Lagrange 平均值定理(§ 2.1 定理 3)的推广.

下面我们对 Taylor 公式的意义作一些说明. 如果 $f^{(n+1)}$在 a 点附近有界，则由(8)式就有

$$|R_n(x)|\leqslant M|x-a|^{n+1}$$

当 x 在 a 点附近时成立，从而

$$R_n(x)=o(|x-a|^n).$$

在分析上, 这说明函数 f 在 a 点附近与 n 次多项式 P_n 相近似，差为 $o(|x-a|^n)$. 由于多项式是最简单的初等函数，所以这是很有意义的. 例如, 我们可以通过计算多项式的值来近似计算函数值，并且可以达到很高的精确度. 在下面 § 3.3中我们将看到具体的例子.

在几何上, 由于

$$P_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a), \quad k=0, 1, 2, \cdots, n,$$

所以我们可以认为 n 次曲线 $y=P_n(x)$ 与曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a,f(a))$"n 次相切"，相切的紧密度是 $o(|x-a|^n)$. 例如，当 $n=1$ 时直线(即切线)

$$y=P_1(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$$

与曲线相切，紧密度是 $o(|x-a|)$；$n=2$ 时抛物线

$$y=P_2(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

与曲线相切(图 78)，紧密度是 $o(|x-a|^2)$. 为要达到较高的紧密度，就必须用高次曲线去与曲线相切. 由此可见，n 次曲线 $y=P_n(x)$ 可以看作切线(一次曲线)概念的推广.

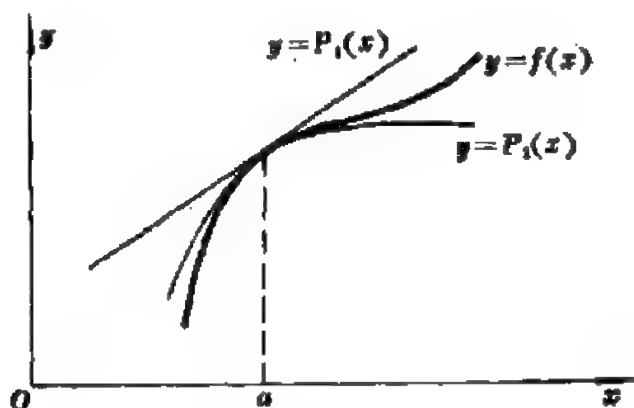


图 78

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 函数在一点的 Taylor 多项式为何？

(2) 余项形式定理的条件和结论为何？

(3) 为什么说 Taylor 公式是 Cauchy 平均值定理的推广？

(4) 我们得到了哪些特殊的余项形式？

(5) 为什么说带 Lagrange 余项的 Taylor 公式是 Lagrange 平均值定理的推广？

(6) Taylor 公式的分析和几何意义为何？

2. 设有 n 次多项式 P:

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n.$$

如何用 Taylor 公式将 $P(x)$ 表示为 $x-a$ 的多项式? 试将多项式

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$$

表示为 $x+1$ 的多项式.

3. 设函数 f 在 x_0 附近有 $n+1$ 阶连续导数, 且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n)}(x_0)=0,\quad f^{(n+1)}(x_0)\neq 0.$$

证明: 若 n 为奇数, 则 x_0 是 f 的极值点; 若 n 为偶数, 则 x_0 不是 f 的极值点.

$x=0$ 是不是下列函数 f 的极值点, f 在 $x=0$ 取极大还是极小? 设

(1) $f(x)=e^x-\sin x-1$.

(2) $f(x)=x-\sin x$.

(3) $f(x)=2+x+\dfrac{x^3}{6}-e^x-\cos x$.

4. 设函数 f 和 g 在 $[-1,1]$ 上连续, 在 $(-1,1)$ 上有任意阶导数, 且

$$|f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)|\leqslant n!\,|x|,\quad n=0,1,\cdots.$$

证明 $f=g$.

5. 设函数 f 在一点 x_0 有 $n+1$ 阶导数, 且 $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$. 将 f 用 Taylor 公式表示为

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h),$$

其中 $\theta\in(0,1)$. 证明

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}.$$

6. 若函数 f 在一点 x_0 附近有

$$f(x)=(x-x_0)^kg(x),$$

其中 k 是一非负整数, $g(x_0)\neq 0$, 且函数 g 在 x_0 连续, 则说 x_0 是 f 的"k重零点". 证明: 若 f 在 x_0 附近有 k 阶连续导数, 则 x_0 是 f 的 k 重零点的充分必要条件为

$$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0,\ f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

7. 设函数 f 在一点 x_0 附近可以表示为

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+R(x),$$

其中 $R(x)=o((x-x_0)^n)$. 讨论是否有 $a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k=0,1,\cdots,n$.

§3.2 几个初等函数的 Taylor 公式

现在我们推导几个常用的基本初等函数的 Taylor 公式. 由于这些函数的定义域都含有原点, 所以我们在 Taylor 公式(§3.1(3))中取 $a=0$, 即推导它们的 Mclaurin 公式.

1) $f(x)=e^x$, $x\in R$.

因为

$$f^{(k)}(x)=e^x,$$

所以

$$f^{(k)}(0)=1,\quad k=0,1,\cdots,$$

所以它的 Taylor 公式(Mclaurin 公式)是

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),\qquad x\in R,$$

它的 Lagrange 余项是

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi},$$

其中 $\xi\in I_x^\circ$, 即位于 0 和 x 之间.

2) $f=\sin$.

因为(§1.5 例 3)

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right),\quad k=0,1,\cdots,$$

所以

$$f^{(k)}(0)=\begin{cases}0, & k=2j,\\ (-1)^j, & k=2j+1,\end{cases}\quad j=0,1,\cdots.$$

在 §3.1 定理 1 中取 $n=2m$, 则其 Taylor 公式(§3.1(6))是

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x),$$

$$x\in R.$$

又因

$$f^{(2m+1)}(x)=\sin\left(x+m\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^m\cos x,$$

所以它的 Lagrange 余项是

$$R_{2m}(x)=(-1)^m(\cos\xi)\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

其中 ξ 位于 0 和 x 之间.

图 79 反映 sin 的图象分别与一次、三次、五次、七次和九次曲线相切的紧密程度.

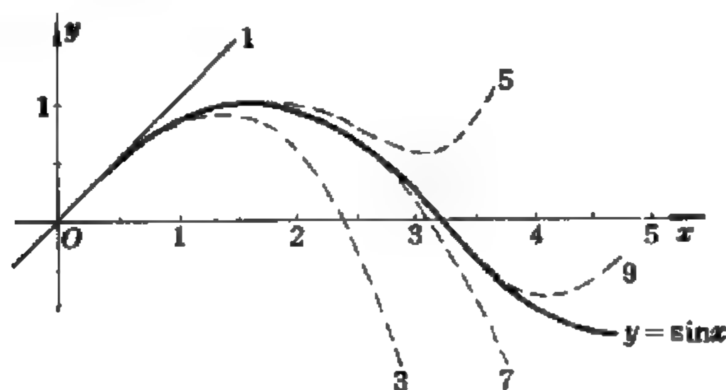


图 79

3) cos.

同样,由 $\cos^{(k)}x=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$, 在 § 3.1 定理 1 中取 $n=2m+1$, 可得 cos 的 Taylor 公式是

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x),\quad x\in R.$$

它的 Lagrange 余项是

$$R_{2m+1}(x)=(-1)^{m+1}(\cos\xi)\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

其中 ξ 位于 0 和 x 之间.

4) $f(x)=(1+x)^\alpha$, $x>-1$, $\alpha\in R$.

因为

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

所以

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1),\quad k=1,2,\cdots.$$

所以它的 Taylor 公式是

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x),\quad x>-1.$$

它的 Lagrange 余项是

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

其中 ξ 位于 0 和 x 之间. 它的 Cauchy 余项是

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}(x-\xi)^n x,$$

其中 ξ 位于 0 和 x 之间.

5) $f(x)=\ln(1+x),\quad x>-1.$

因为

$$f'(x)=(1+x)^{-1}, f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}, k>1.$$

所以

$$f'(0)=1,\quad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!,\quad k>1.$$

所以它的 Taylor 公式是

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x),\quad x>-1.$$

它的 Lagrange 余项是

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\xi)^{n+1}},$$

其中 ξ 位于 0 和 x 之间.

以上五个初等函数的 Taylor 公式是常用的, 应该记住.

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$的 Maclaurin 公式为何？相应的 Lagrange 余项为何？

(2) 当 $\alpha\in N$ 时$(1+x)^\alpha$的 Maclaurin 公式为何？

2. 试在 $x=0$ 的附近用二次抛物线代替曲线 $y=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$.

3. 按指定的次数写出下列函数 f 在 $x=0$ 的 Taylor 多项式，设

(1) $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$，写到 4 次.

(2) $f(x)=e^{2x-x^2}$，写到 5 次.

(3) $f(x)=\sin\sin x$，写到 3 次.

(4) $f(x)=\ln\cos x$，写到 6 次.

(5) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$，写到 4 次.

(6) $f(x)=\operatorname{tg}x$，写到 5 次.

(7) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，写到 6 次.

4. 按指定的次数写出下列函数 f 在指定点的 Taylor 多项式，设

(1) $f(x)=\sin x$，　在 $x=\dfrac{\pi}{2}$，写到 $2n$ 次.

(2) $f(x)=\cos x$，　在 $x=\pi$，　写到 $2n$ 次.

(3) $f(x)=e^x$，　　在 $x=1$，　写到 n 次.

(4) $f(x)=\ln x$，　在 $x=2$，　写到 n 次.

(5) $f(x)=x^5+x^3+x$，在 $x=0$，写到 4 次.

(6) $f(x)=x^5+x^3+x$，在 $x=1$，写到 4 次.

(7) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，　在 $x=0$，写到 n 次.

(8) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，　在 $x=0$，写到 $2n+1$次.

§ 3.3　Taylor 公式的一些应用

(一) 近似计算

例 1 计算数 e，要求误差不超过 10^{-5}.

解 在 §3.2,1)中取 $x=1$ 得到

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}, \tag{1}$$

其中 $\xi\in(0,1)$. 所以若用近似等式

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!} \tag{2}$$

来计算 e，误差是 $R_n(1)=\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}$. 现在根据所要求的精确度来确定需要的项数. 由于

$$R_n(1)<\frac{e}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!},$$

若取 $n=9$，则

$$R_9(1)<\frac{3}{10!}\approx 9\times 10^{-7}<10^{-5}.$$

因此我们在(2)式中取 $n=9$ 来近似计算 e. 在计算各项 $\dfrac{1}{k!}$ 时，算到 7 位小数，并四舍五入. 这样，总误差不超过

$$\frac{9}{10^7}+7\times\frac{1}{2\cdot 10^6}<10^{-5}.$$

详细计算如下：

$$2.000000$$

$$\frac{1}{2!}=0.500000$$

$$\frac{1}{3!}=0.166667-$$

$$\frac{1}{4!}=0.041667-$$

$$\frac{1}{5!}=0.008333+$$

$$\frac{1}{6!}=0.001389-$$

$$\frac{1}{7!}=0.000198+$$

$$\frac{1}{8!}=0.000025-$$

$$\frac{1}{9!}=0.000003-$$

$$+)\overline{\qquad e\approx 2.718282\qquad}$$ ▯

例 2 计算 $\sin 10°$，误差不超过 10^{-5}.

解 应用 sin 的 Mclaurin 公式(§ 3.2,2))来计算. 先估计应取多少项方能保证所要求的精确度. 由于

$$|R_{2m}(x)|=\left|(-1)^m\cos\xi\cdot\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right|<\frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

本题$x=\frac{\pi}{18}\approx 0.174533<0.2$，若取 $m=2$ 就有

$$|R_4(x)|<\frac{(0.2)^5}{5!}=\frac{4}{15}\times 10^{-5}<10^{-5}.$$

所以我们用

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{3!}$$

来计算 $\sin 10°$. 以 $x=0.174533$ 代入，计算到6位小数即得 $\sin 10°\approx 0.17365$. ▯

（二）求不定型的极限.

例 3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{\sin^3 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right]-x(1+x)}{[x+o(x^2)]^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x+x^2+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]-x(1+x)}{x^3+o(x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}=\frac{1}{3}. \quad \square$$

（三）不等式

例 4 证明当 $x>0$ 时

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x.$$

证明 任取 $x>0$. 由 § 3.2, 5), 有 $\xi_1\in(0,x)$ 使

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{(1+\xi_1)^2}<x.$$

又有 $\xi_2\in(0,x)$ 使

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{(1+\xi_2)^3}>x-\frac{x^2}{2}. \quad \square$$

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 关于 Taylor 公式, 我们讲了哪些应用? 如果不能估计其余项, 这些应用是否还能成立?

(2) 用 Taylor 公式计算不定型的极限, 第一章 § 3.3 习题 3 (“小 o”代数) 有无作用?

2. 近似等式 $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$ 对于怎样的 x 精确到 0.0001?

3. 用 Taylor 公式近似计算:

(1) $\sqrt[5]{4000}$, 精确到 10^{-4}.

(2) $\sqrt{e}$, 精确到 10^{-5}.

(3) $\ln 1.02$, 精确到 10^{-5}.

(4) $\sin 1^\circ$, 精确到 10^{-8}.

4. 选择数 a 和 b 使 $x-(a-b\cos x)\sin x$ 为 5 阶无穷小.

5. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

(3) $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

(4) $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

6. 求数列极限 $\lim\limits_{n \to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}e^{-n}$.

7. 证明当 $x>0$ 时有

(1) $\sum\limits_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}<\sin x<\sum\limits_{k=0}^{2n}(-1)^k\dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

(2) $\sum\limits_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}<\cos x<\sum\limits_{k=0}^{2n+2}(-1)^k\dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$.

8. 证明 e 是无理数.

9. 求下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n \to +\infty}\cos\dfrac{a}{n\sqrt{n}}\cos\dfrac{2a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\dfrac{na}{n\sqrt{n}}$.

第三章　一元函数的积分

第一节　不 定 积 分

§1.1　不定积分的概念

在第二章中我们研究了一元函数的求导和微分，它们实际上是同一种运算．现在我们要提出它们的逆运算问题．

在几何上，这就是已知定义在一个区间 I 上的函数 f，求一条曲线 $y=F(x)(x\in I)$，使得它在每一点 $x\in I$ 的斜率为 $F'(x)=f(x)$．这也就是已知函数 F 的导函数 f，求 F，是求导的逆运算．

再看一个物理问题．已知地球表面的重力加速度是一常数 $g=980$ 厘米/秒^2，设自由落体在任一时刻 t 的位置为 $x=f(t)$（图80），则有

$$x''=-g. \tag{1}$$

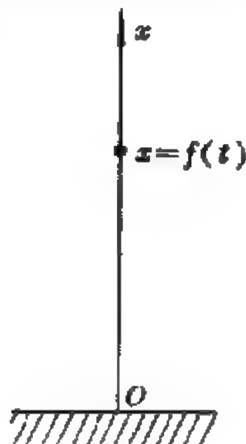


图　80

欲知物体的运动规律，就必须由上式求出 x'，再由 x' 求出 x．这就要求我们进行两次求导的逆运算．

为了解决求导和微分的逆运算问题，我们首先提出下述概念：

定义 1　设在区间 I 上函数 f 是函数 F 的导函数，即

$$F'(x)=f(x),\qquad x\in I,$$

也就是

$$dF(x)=f(x)dx,\qquad x\in I,$$

则 F 叫做 f 在 I 上的一个**原函数**．

例如，设

$$F(x)=\frac{x^3}{3},\quad f(x)=x^2,\quad x\in R.$$

则F是f的一个原函数. 但是，$F+1, F-2$等等也都是f的原函数，所以原函数的存在不是唯一的.

这样我们就有两个问题：第一，在什么条件下，一个函数有原函数？第二，既然原函数的存在非唯一的，一个函数的原函之间有没有关系？

第一个问题，即原函数的存在问题，是微积分学的基本理论问题，我们将在§2.4中予以讨论，这里先给出它的结论：若函数f在区间I上连续，则f在I上有原函数.

关于第二个问题，第二章§2.1定理3推论的注便是回答. 由此可得：

定理 1 如果函数f在区间I上有一个原函数F，则函数簇

$$\{F+C:\quad C\in R\} \tag{2}$$

就是f在I上的全部原函数.

为简单计，我们通常把函数簇(2)就记作

$$F+C, \tag{3}$$

其中C是"任意常数"，意即C可以是任何数. 当C"走遍"全R时便得函数簇(2).

由定义1，求导和微分的逆运算就是求一个函数的原函数. 下面给出这个逆运算的概念和符号：

定义 2 设函数f在区间I上有一个原函数F，则函数簇(2)，也就是(3)，叫做f在I上的**不定积分**，记为

$$\int f=F+C.$$

在演算时一般都写成

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \qquad x \in I,$$

其中 C 是任意常数.

显然，求一个基本初等函数的不定积分(即原函数簇)，只须将第二章§1.3中的"基本初等函数求导公式表"倒过来应用即可. 例如

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad x \in R.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \qquad |x| < 1.$$

$$\int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C, \qquad \mu \neq -1, x > 0.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad x \neq 0. \tag{4}$$

对上面最后一式是应加以说明的. 由于定理1只对区间成立, 因此不定积分的定义是局限在一个区间上的. 但是(4)式中的集合 $\{x \in R: x \neq 0\}$ 不是一个区间, 是两个区间: $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$. 因此(4)式应作特殊理解, 就是, 它表示两个不定积分: 一个定义在 $(0, +\infty)$ 上, 就是

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \qquad x > 0;$$

另一个定义在 $(-\infty, 0)$ 上, 就是

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C, \qquad x < 0.$$

今后凡遇多个区间时，均作此理解.

一个函数 f 的不定积分 $F+C$, 其几何图象是一簇"平行"曲线

$$y = F(x) + C.$$

这簇曲线可以由簇中任何一条曲线沿 y 轴方向平行移动而得(图81). 簇中曲线在同一点 x 上的切线都是平行的, 斜率都是 $f(x)$.

从不定积分的定义可以直接得到下列关系:

1° $\left(\int f\right)' = f$,

$d\int f(x)dx = f(x)dx$;

2° $\int F' = F + C$,

$\int dF(x) = F(x) + C$.

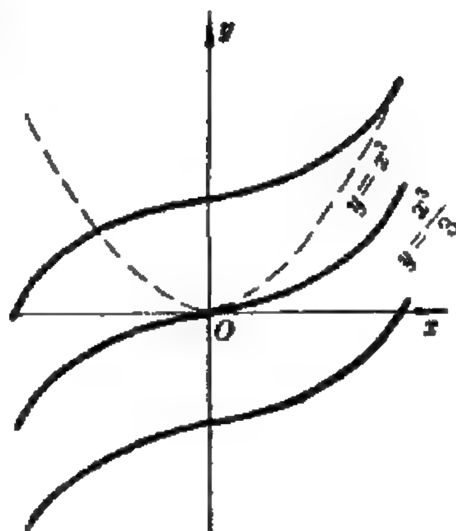


图 81

定理 2 设函数 f 和 g 在区间 I 上都有原函数,则在 I 上有

1° $\int(f+g) = \int f + \int g$;

2° $\int \alpha f = \alpha \int f$,

其中 α 是常数,且 $\alpha \neq 0$.

证明 1° 设 F 是 f 的一个原函数, G 是 g 的一个原函数, 则 $F+G$ 是 $f+g$ 的一个原函数. 于是由不定积分的定义便得

$$\int f + \int g = (F + C_1) + (G + C_2) = F + G + C = \int (f+g),$$

这是因为两个任意常数相加显然还是一个任意常数. 同样可以证明 2°. □

由此, 倒用“基本初等函数求导公式表”便可算得一些不定积分. 例如

$$\int\left(3x^2 + \frac{4}{x}\right)dx = \int 3x^2\,dx + \int \frac{4}{x}dx = 3\int x^2\,dx + 4\int \frac{dx}{x}$$

$$= 3\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + 4(\ln|x| + C_2)$$

$$= x^3 + 4\ln|x| + C.$$

$$\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{3/2}dx+\int x^{-1/2}dx=\frac{x^{1+3/2}}{1+\frac{3}{2}}+\frac{x^{1-1/2}}{1-\frac{1}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{5}x^{5/2}+2\sqrt{x}+C.$$

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int dx-\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=x-\operatorname{arc\,tg}x+C.$$

$$\int\operatorname{tg}^2 x dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx$$

$$=\operatorname{tg}x-x+C.$$

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}dx=\int(\cos x+\sin x)dx$$

$$=\int\cos x dx+\int\sin x dx=\sin x-\cos x+C.$$

有了以上的知识，我们就可以解决§1.1开始提出的两个问题.

例1 已知曲线 $y=F(x)$ 的切线斜率处处为 $F'(x)=2x$，求此曲线.

解 由题设有

$$F(x)=\int F'(x)dx=\int 2xdx=x^2+C,$$

这里第一个等号的意思是：F 可以是函数族 $\int F'$ 中的任何函数.故所求曲线是一簇抛物线

$$y=x^2+C. \qquad \square$$

例2 已知自由落体的运动方程为

$$x''=-g,$$

求运动规律 $x=f(t)$.

解 对运动方程积分得

$$x' = -gt + C_1,$$

再积分得

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2.$$

设时间是从 $t=0$ 开始，在以上二式中分别令 $t=0$ 得 $C_1 = f'(0)$，$C_2 = f(0)$. 所以 C_1 是物体的初始速度，C_2 是物体的初始位置. 自由落体当然可以有不同的初始位置和初始速度，因此这是两个任意常数. 一当给定了初始位置和初始速度后，运动规律即完全确定. 例如，若物体在高为 h 处自由落下，则 $C_2 = f(0) = h$，$C_1 = f'(0) = 0$，因此运动规律 $x = f(t)$ 便是

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + h. \quad \square$$

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) 何谓原函数？求导和微分的逆运算是求什么？

(2) 区间上的函数是否都有原函数？不连续函数能否有原函数？

(3) 为什么定理 1 只在区间上成立？

(4) 何谓不定积分？已知什么函数一定有不定积分？

(5) $\left(\int f\right)' = ?$　$d\int f(x)\,dx = ?$

$\int F' = ?$　　$\int dF(x) = ?$

2. 计算下列不定积分：

(1) $\int (2+x^5)^2\,dx$.　　　　(2) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$.

(3) $\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\,dx$.

(4) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.　　　　(5) $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}-2}}{x^3}\,dx$.

(6) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,dx$.

(7) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$.　　　　(8) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

3. 计算下列不定积分：

(1) $\int |x| dx$.　　　　(2) $\int e^{-|x|}dx$.

(3) $\int \max(1, x^2) dx$.　　　　(4) $\int \sqrt{1-\sin 2x}dx$, $0\leqslant x\leqslant \pi$.

4. 周期函数的原函数是否还是周期函数？设 f 是一周期为 T 的函数，F 是它的一个原函数，证明 F 有周期 T 的充分必要条件为 $F(T)=F(0)$.

§1.2 换元法

上面我们看到，利用不定积分的线性运算法则（§1.1 定理 2）和"基本初等函数求导公式表"，可以算出一些简单的不定积分。但这是非常有限的。例如

$$\int \sin^4 x dx, \int \ln x dx, \int \sqrt{1-x^2}\, dx,$$

这些简单的不定积分就不易用上面的方法算出。下面我们介绍两个基本的积分法——"换元法" 和 "部分积分法"。有了这两个方法，再通过"基本初等函数求导公式表"就可算出较多的不定积分。现在先介绍"换元法"。

所谓换元法，是一种与复合函数的求导或微分法相对应的积分法。

定理 1（换元法） 设函数 f 在区间 I 上连续，函数 φ 在区间 J 上可导，$\varphi(J)\subset I$，则

$$\int f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\, dt = \int f\circ\varphi(t)d\varphi(t) = \int f(x)dx, \tag{1}$$

其中 $x=\varphi(t)$, $t\in J$.

证明 由假设，f 在区间 I 上连续，因而有原函数，记为 F. 再由关于 φ 的假设和复合函数求导法则，

$$(F\circ\varphi)'(t)=F'\circ\varphi(t)\varphi'(t)=f\circ\varphi(t)\varphi'(t), \quad t\in J,$$

所以

$$\int f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\,dt=F\circ\varphi(t)+C$$

$$=F(x)+C=\int f(x)dx,$$

其中 $x=\varphi(t)$, $t\in J$. □

为了使用上的方便，我们还可以略为改变定理 1 的形式. 在(1)中记

$$g(t)=f\circ\varphi(t)\varphi'(t),\quad t\in J. \tag{2}$$

同样还令 $x=\varphi(t)$, $t\in J$. 则就有

$$g(t)\,dt=f(x)dx,\quad t\in J. \tag{3}$$

反之，若 $x=\varphi(t)$ ($t\in J$)使(3)式成立，则(2)式显然就成立。所以(2)和(3)是同一个式子. 因此，定理 1 可以改述如下:

定理 1′ 若 $x=\varphi(t)$ ($t\in J$)使得微分关系

$$f(x)dx=g(t)\,dt\qquad(t\in J) \tag{4}$$

成立，其中 φ 是区间 J 上的可微函数，f 是区间 $\varphi(J)$ 上的连续函数，则

$$\int f(x)dx=\int g(t)\,dt,\quad t\in J. \tag{5}$$

换元法(定理 1 或定理 1′)告诉我们，计算不定积分，就是变化积分号"$\int$"下的微分形式. 通过"换元"$x=\varphi(t)$ 可以把一个微分形式变成另一个微分形式，从而把一个积分变成另一个积分. 因此我们可以随时选择适当的换元，把一个较难的积分变成一个较易的积分，即能直接计算的积分. 那么，如何选择换元 $x=\varphi(t)$ 呢？这就要靠作题的熟练技巧和丰富的经验. 通常有两种方式.

第一种方式是"凑". 就是说，当我们计算一个积分 $\int g(t)\,dt$ 时，为了把它变成另一个积分，可以把微分形式 $g(t)dt$ 凑成

$f\circ\varphi(t)d\varphi(t)$，令$x=\varphi(t)$便得微分等式(4)，从而由(5)变成计算积分$\int f(x)dx$. 算出这个积分后，再以$x=\varphi(t)$代入即得要算的积分.

例 1 计算积分$\int te^{t^2}dt$.

解 因为

$$te^{t^2}dt=\frac{1}{2}e^{t^2}dt^2,$$

令 $x=t^2$ 即得

$$te^{t^2}dt=\frac{1}{2}e^x dx.$$

所以

$$\int te^{t^2}dt=\frac{1}{2}\int e^x dx=\frac{1}{2}e^x+C=\frac{1}{2}e^{t^2}+C. \quad \square$$

例 2 计算积分$\int\frac{dx}{ax+b}$, $a\neq 0$.

解 因为

$$\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\frac{d(ax+b)}{ax+b},$$

令 $u=ax+b$ 即得

$$\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\frac{du}{u},$$

所以

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{a}\ln|u|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C. \quad \square$$

在运算稍熟练以后，就不必写出微分等式，也可不写出换元$x=\varphi(t)$. 再看一些例子：

$$\int \operatorname{tg} t\,dt=-\int\frac{d\cos t}{\cos t}=-\ln|\cos t|+C,$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C.$$

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\sin\sqrt{x}\,d\sqrt{x}=-2\cos\sqrt{x}+C.$$

$$\int\cos^2 x dx=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4}\int\cos 2x d2x$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C. \tag{6}$$

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)dx=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{d(a+x)}{a+x}-\int\frac{d(a-x)}{a-x}\right)$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C. \tag{7}$$

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x dx}{\cos^2 x}=\int\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C.\quad (由(7)式)$$

应用换元法的另一种方式是，不凑微分，而是靠作题经验看出适当的换元 $x=\varphi(t)$ 以得微分等式(4)，从而由(5)式把一个积分变成另一个积分.

例 3 计算积分 $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$，$a>0$.

解 令 $x=a\sin t$，$|t|\leqslant\frac{\pi}{2}$，即得

$$\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\cos^2 t\,dt, \tag{8}$$

再由(5)和(6)便得

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\int\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.\quad\square$$

在此例的解题过程中，微分等式(8)可以省略.

例 4 计算$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

解 令$\sqrt{x+1}=t$，于是

$$x+1=t^2, \quad dx=2t\,dt.$$

所以

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=2\int \frac{t\,dt}{1+t}=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$
$$=2(t-\ln(1+t))+C$$
$$=2(\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1}))+C. \quad \square$$

例 5 计算$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

解 令 $x=a\operatorname{tg}t$，则 $dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}$. 所以

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}=\frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt$$

$$=\frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t)+C$$

$$=\frac{1}{2a^3}\left(t+\frac{\operatorname{tg}t}{1+\operatorname{tg}^2 t}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+\frac{1}{2a^2}\frac{x}{a^2+x^2}+C. \quad \square$$

例 6 计算$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

解 此题也可以采用例 5 中的换元. 但现在我们令$\sqrt{a^2+x^2}=t-x$. 于是

$$x=\frac{t^2-a^2}{2t}, \quad dx=\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt.$$

所以

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln t+C$$

$$=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C.$$

事实上，由第二章§1.4例2便立即可得这个积分. □

例 7 从物理实验知道，放射性元素在每一时刻的质量与该时刻的衰变速度成正比，求衰变规律.

解 设在时刻 t 放射性元素的质量为 $m=\varphi(t)$. 则由题意应有

$$m'=-km. \tag{9}$$

其中 $k>0$ 是常数，叫做"衰变系数". k 随放射性元素的种类而异，它的值可以用仪器测定. 由于 m 随时间 t 单调减，所以(9)式中有一负号. 将(9)式改写为

$$\frac{dm}{m}=-k\,dt.$$

设 $m=\varphi(t)$ 是这方程的一个解，即 $m=\varphi(t)$ 使这个微分等式成立，则由定理 1′ 就有

$$\int\frac{dm}{m}=-k\int dt.$$

所以

$$\ln m=-kt+\ln C,$$

即

$$m=Ce^{-kt}.$$

记 $m_0=\varphi(0)$ 为放射性元素的初始质量，在上式中令 $t=0$ 即得 $C=m_0$. 因此我们最后得

$$m=m_0e^{-kt}.$$

我们看到，放射性元素是以指数函数的数量级迅速衰变的物质. 当 $m=\frac{1}{2}m_0$ 时得相应的 t 值为 $T=\frac{\ln 2}{k}$，叫做放射性元素的"半生

期"．可见，通过 k 值便可求出半生期 T．例如，镭的半生期 $T=1600$ 年。就是说，1 克的镭经过 1600 年剩下 0.5 克．□

习　题

1. 计算下列不定积分：

(1) $\int xe^{-x^2}dx$.　　(2) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$.　　(4) $\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$.

(5) $\int\frac{xdx}{4+x^2}$.　　(6) $\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

(7) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.　　(8) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

(9) $\int\sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}$.　　(10) $\int\frac{(\operatorname{arctg}x)^2}{1+x^2}dx$.

(11) $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.　　(12) $\int\frac{dx}{\sin x}$.

(13) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.　　(14) $\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

(15) $\int\frac{dx}{x^2+x-2}$.　　(16) $\int\frac{dx}{(x-a)^2(x+b)^2}$.

(17) $\int\frac{dx}{a+bx^2}$, $ab\neq0$.　　(18) $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$.

(19) $\int\frac{x^5}{1+x}dx$.　　(20) $\int\sin 3x\sin 5x dx$.

(21) $\int\cos mx\sin nx dx$.　　(22) $\int\sin^2 x dx$.

(23) $\int\cos^5 x dx$.　　(24) $\int\sin^4 x dx$.

(25) $\int\frac{dx}{\sin x}$.　　(26) $\int\frac{dx}{\cos^3 x}$.

(27) $\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$.　　(28) $\int\frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$.

(29) $\int\frac{\sin x\cos x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx$.　　(30) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

(31) $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.　　(32) $\int \frac{dx}{a\sin x+b\cos x}$.

(33) $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.　　(34) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx$.

(35) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{(1+x^2)^3}}$.　　(36) $\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1-x^{n+2}}}dx$.

(37) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.　　(38) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2-x}}$.

(39) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\,dx$.　　(40) $\int x^5\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

(41) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$.　　(42) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

(43) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$.　　(44) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

(45) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.　　(46) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-2}}$.

(47) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.　提示：令 $x-a=(b-a)\sin^2 t$.

2. (1) 证明奇函数的原函数是偶函数.

(2) 偶函数的原函数是否都是奇函数？何时是奇函数？

3. 求出函数 f，设

(1) $f'(x^2)=\frac{1}{x}$，$x>0$.

(2) $f'(\sin^2 x)=\cos^2 x$.

(3) $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1,\\ x, & x>1;\end{cases}$　　$f(0)=0$.

§ 1.3　部分积分法

我们再来介绍"部分积分法"．这是与函数乘积的求导或微分法相对应的一种积分法．

定理 1（部分积分法）　设函数 f 和 g 在区间 I 上都有连续的导函数，则在 I 上有

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx.$$

此式又可写成

$$\int f(x)dg(x)=f(x)g(x)-\int g(x)df(x).$$

证明 因为当 $x\in I$ 时有

$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

所以

$$f(x)g'(x)=(fg)'(x)-f'(x)g(x),$$

而 fg' 和 $f'g$ 都在区间 I 上连续，所以有不定积分，因此

$$\int f(x)g'(x)dx=fg(x)-\int f'(x)g(x)dx.\ \square$$

对积分 $\int F(x)dx$ 应用部分积分法，就是要把 F 恰当地拆成函数 f 和 g' 的乘积或把 $F(x)dx$ 表示成 $f(x)dg(x)$.

例 1 计算 $\int \ln x dx$.

解 令 $f(x)=\ln x, g(x)=x$. 则由部分积分法得

$$\int \ln x dx=x\ln x-\int x d\ln x=x\ln x-\int dx$$

$$=x\ln x-x+C.\ \square$$

例 2 计算 $\int x^2e^xdx$.

解 两次部分积分得

$$\int x^2e^xdx=\int x^2de^x=x^2e^x-\int e^xdx^2$$

$$=x^2e^x-2\int xe^xdx$$

$$=x^2e^x-2\int xde^x$$

$$=x^2e^x-2xe^x+2\int e^x dx$$

$$=(x^2-2x+2)e^x+C. \quad \square$$

例 3 计算$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

解 $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$

$$=x\sqrt{a^2+x^2}-\int x d\sqrt{a^2+x^2}$$

$$=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

$$=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

移项,整理得

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

再由 §1.2 例 6 即得

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C. \quad \square$$

例 4 计算积分

$$\int e^x\sin x dx, \quad \int e^x\cos x dx.$$

解

$$\int e^x\sin x dx=\int\sin x de^x=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx,$$

$$\int e^x\cos x dx=\int\cos x de^x=e^x\cos x+\int e^x\sin x dx.$$

解此联立方程,并注意加上任意常数即得

$$\int e^x\cos x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C,$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C. \quad \square$$

例 5 计算积分$\int \sin^n x dx, n \geqslant 2$是自然数.

解

$$\int \sin^n x dx$$

$$= -\int \sin^{n-1} x d\cos x$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x dx$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int \sin^n x dx,$$

所以

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x - \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx. \tag{1}$$

同法可得

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx. \tag{2}$$

像(1) 和(2) 这样的在自然数集上循环的公式叫做“递推公式”. 反复应用递推公式(1)和(2), 一般就可以对一切自然数 n 算出积分$\int \sin^n x dx$和$\int \cos^n x dx$. 例如, 由(1)式可得

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x dx$$

$$= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos x + \frac{3}{8}x + C. \quad \square$$

习　　题

1. 计算下列不定积分:

(1) $\int \mathrm{arctg} x dx$.　　　　(2) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$.

(3) $\int \arcsin x dx$.　　(4) $\int x^a \ln x dx$.

(5) $\int x \operatorname{arctg} x dx$.　　(6) $\int x^2 \arccos x dx$.

(7) $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1}) dx$.　　(8) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x} dx$.

(9) $\int x^2 e^{-2x} dx$.　　(10) $\int x^2 \sin 2x dx$.

(11) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$.　　(12) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$.

(13) $\int e^{2x} \sin^2 x dx$.　　(14) $\int \sin \ln x dx$.

(15) $\int x^3 e^{-x^2} dx$.　　(16) $\int x^5 e^{x^2} dx$.

(17) $\int \frac{x \ln(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} dx$.　　(18) $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$.

(19) $\int x^2 \sqrt{a^2+x^2} dx$.　　(20) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$.

(21) $\int e^{\sqrt{x}} dx$.　　(22) $\int x \sin \sqrt{x} dx$.

(23) $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$.　　(24) $\int \sin x \ln \operatorname{tg} x dx$.

(25) $\int (\arcsin x)^2 dx$.　　(26) $\int x (\operatorname{arctg} x)^2 dx$.

(27) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$.　　(28) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx$.

2. 设 P 是一个 n 次多项式，试用 P 的各阶导数表示积分 $\int e^{ax} P(x) dx$.

3. 推导出下列不定积分的递推公式 $(m, n \in N)$:

(1) $\int \ln^n x dx$.　　(2) $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

4. 计算积分 $\int x f''(x) dx$.

§1.4　有理函数的不定积分

以上我们讲了计算不定积分的基本方法，下面再介绍几种特

殊类型的不定积分．现在讨论有理函数的不定积分．我们知道，所谓有理函数就是两个(实系数)多项式之商，若 R 是一有理函数，则

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}, \qquad (1)$$

其中 m, n 为非负整数．$n<m$ 时叫做"真分式"，$n\geqslant m$ 时叫做"假分式"．假分式总可以通过除法化为一个多项式与一个真分式之和．例如

$$\frac{x^5}{1-x^2}=-x^3-x+\frac{x}{1-x^2}.$$

多项式的不定积分当然是容易计算的，因此我们只须研究真分式的不定积分．对于一般的真分式有下述的代数学定理（证明见高等代数书）：

定理 1　设有真分式(1)．若将 Q 分解为

$$Q(x)=(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu}\cdots(x^2+rx+s)^{\nu},$$

其中 $a,\cdots,b,p,q,\cdots,r$, s 为实数；$p^2-4q<0,\cdots,r^2-4s<0$；$\alpha,\cdots,\beta,\mu,\cdots,\nu$ 为正整数；则

$$\begin{aligned}R(x)=&\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-a}+\cdots\\&+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_1}{x-b}\\&+\frac{K_\mu x+L_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}+\cdots+\frac{K_1x+L_1}{x^2+px+q}+\cdots\\&+\frac{M_\nu x+N_\nu}{(x^2+rx+s)^\nu}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+rx+s},\end{aligned}$$

其中诸 $A_i,\cdots,B_i,K_i,L_i,\cdots,M_i$, N_i 都是实数，并且这样分解时所有这些常数都是唯一确定的．

这个定理告诉我们，真分式总可以化为下列两类分式之和：

1) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$;

2) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, $\quad p^2-4q<0$;

其中 k 是自然数, A, B, a, p, q 都是实数. 我们称以上二类分式为“最简分式”.

例 1 分解 $\dfrac{x+1}{x^2-4x+3}$ 为最简分式之和.

解 因为

$$x^2-4x+3=(x-1)(x-3),$$

所以根据定理 1 有

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3},$$

其中 A, B 是“待定系数”. 通分得

$$\frac{x+1}{x^2-4x+3}=\frac{A(x-3)+B(x-1)}{(x-1)(x-3)}.$$

因此易知, 对一切 x 有

$$x+1=A(x-3)+B(x-1).$$

由此可得 $A=-1, B=2$. □

例 2 分解 $\dfrac{x}{x^3+x^2+3x+3}$ 为最简分式之和.

解 因为

$$x^3+x^2+3x+3=(x+1)(x^2+3),$$

所以

$$\frac{x}{x^3+x^2+3x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}.$$

通分后得

$$x=(A+B)x^2+(B+C)x+3A+C.$$

比较系数得

$$A+B=0,\quad B+C=1,\quad 3A+C=0.$$

解得 $A=-\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{4}$, $C=\frac{3}{4}$. □

例 3 分解$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$为最简分式.

解 因为

$$x^4-3x^3+3x^2-x=x(x-1)^3,$$

所以

$$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

通分后比较系数解得 $A=-1, B=2, C=1, D=2$. □

由于真分式可以分解为两类最简分式的和，而关于第 1)类分式的积分是容易计算的，因此我们只要研究第 2)类分式的积分. 对分母配方得

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4},$$

所以只要作换元

$$u=x+\frac{p}{2}.$$

同时注意到 $q-\frac{p^2}{4}>0$, 记 $a^2=q-\frac{p^2}{4}$ 便得

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=A\int\frac{udu}{(u^2+a^2)^k}+\left(B-\frac{1}{2}Ap\right)\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k}.$$

其中第一个积分是容易计算的，需要讨论的是积分

$$I_k=\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k},\quad k\in N.$$

对 I_k 进行部分积分：

$$I_k=\frac{u}{(u^2+a^2)^k}-\int ud\frac{1}{(u^2+a^2)^k}=\frac{u}{(u^2+a^2)^k}+2k\int\frac{u^2du}{(u^2+a^2)^{k+1}}$$

$$=\frac{u}{(u^2+a^2)^k}+2k\int\frac{du}{(u^2+a^2)^k}-2ka^2\int\frac{du}{(u^2+a^2)^{k+1}}$$

$$=\frac{u}{(u^2+a^2)^k}+2kI_k-2ka^2I_{k+1}.$$

因此我们得到 I_k 的递推公式:

$$I_{k+1}=\frac{1}{2ka^2}\frac{u}{(u^2+a^2)^k}+\frac{2k-1}{2ka^2}I_k,\quad k\in N. \tag{2}$$

应用这个递推公式,显然 I_k 最后归结为已知的积分

$$I_1=\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{a}+C.$$

例如

$$I_2=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{u}{u^2+a^2}+I_1\right),$$

$$I_3=\frac{1}{4a^2}\left[\frac{u}{(u^2+a^2)^2}+3I_2\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

这样我们就解决了有理函数的积分问题:把有理函数分解为多项式和真分式,再把真分式分解为最简分式.不难看出,有理函数的积分是有理函数、ln 和 arc tg 这三种函数的组合.

例 4 计算 $\int\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$.

解 由例 3 便得

$$\int\frac{x^3-1}{x^4-3x^3+3x^2-x}dx$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{x-1}$$

$$=\frac{-x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{|x|}+C.\ \square$$

例 5 计算 $\int\frac{5x+6}{x^2+x+1}dx$.

解 令 $u=x+\frac{1}{2}$得

$$\int\frac{5x+6}{x^2+x+1}dx=5\int\frac{udu}{u^2+\frac{3}{4}}+\frac{7}{2}\int\frac{du}{u^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{5}{2}\ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right)+\frac{7}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{2}{\sqrt{3}}u+C$$

$$=\frac{5}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{7}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.\quad\square$$

例 6 计算$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}dx$.

解 令 $u=x-1$,并应用递推公式(2)得

$$\int\frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}dx=5\int\frac{udu}{(u^2+4)^2}+8\int\frac{du}{(u^2+4)^2}$$

$$=-\frac{5}{2}\frac{1}{u^2+4}$$

$$+8\left(\frac{1}{8}\frac{u}{u^2+4}+\frac{1}{16}\text{arc tg}\frac{u}{2}\right)+C$$

$$=\frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)}+\frac{1}{2}\text{arc tg}\frac{x-1}{2}+C.\quad\square$$

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 最简分式有哪几种?如何计算其积分?

(2) 如何分解真分式为最简分式之和?

(3) 如何计算假分式的积分?

2. 计算下列积分:

(1) $\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

(2) $\int\frac{x-2}{x^2-3x+2}dx$.

(3) $\int\frac{xdx}{2x^2-3x-2}$.

(4) $\int\frac{2x^2+1}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$.

(5) $\int\frac{dx}{2x^3+3x^2+x}$.

(6) $\int\frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$.

(7) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$.　　(8) $\int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$.

(9) $\int \frac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^3}dx$.　　(10) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

(11) $\int \frac{xdx}{x^4+3x^2+2}$.　　(12) $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

(13) $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+3x^2+3x}$.　　(14) $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$.

(15) $\int \frac{xdx}{(x-2)^2(x^2-4x+5)}$.　　(16) $\int \frac{dx}{1+x^4}$.

(17) $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$.　　(18) $\int \frac{x^4+1}{x(x^2+1)^2}dx$.

(19) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.　　(20) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$.

(21) $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+2x+2)^2}$.

§1.5 可有理化的积分

某些三角函数的积分可以化为有理函数的积分．设

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}x^i y^j, \quad x, y \in R,$$

则 P 是一个"二元多项式"．若 R 是两个二元多项式之比，则 R 是一个"二元有理函数"．若 R 是一个二元有理函数，则积分

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{1}$$

通过所谓"万能"换元

$$u = \mathrm{tg}\frac{x}{2} \qquad (|x| < \pi) \tag{2}$$

一定可以化为有理函数的积分．事实上，

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2};$$

又 $x=2\operatorname{arc\,tg}u$，所以

$$dx=\frac{2du}{1+u^2}.$$

因此显见，积分(1)就化为有理函数的积分．但是，这个"万能"的换元并不一定都是必要的和方便的，积分(1)有时也可以通过换元 $u=\sin x$，$u=\cos x$ 和 $u=\operatorname{tg}x$ 来有理化．我们看几个具体例子．

例 1 计算 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$.

解 令 $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，即有

$$\int\frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}=\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}=\frac{1}{2}\int\left(u+\frac{1}{u}\right)du$$

$$=\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{2}\ln|u|+C$$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.\quad\square$$

例 2 计算 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}$.

解 $$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos x}=\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{du}{u^2(1-u^2)}$$

$$=\int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{1-u^2}\right)du=-\frac{1}{u}+\ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}+C$$

$$=-\frac{1}{\sin x}+\ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}+C.\quad\square$$

例 3 计算 $\displaystyle\int\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$.

解 $\displaystyle\int\frac{\sin^4x}{\cos^2x}dx=\int\sin^4x\,d\,\mathrm{tg}\,x=\int\frac{\sin^4x}{(\sin^2x+\cos^2x)^2}d\,\mathrm{tg}\,x$

$$=\int\frac{u^4}{(1+u^2)^2}du=\int\left[1-\frac{2}{1+u^2}+\frac{1}{(1+u^2)^2}\right]du$$

$$=u-\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}u+\frac{1}{2}\,\frac{u}{1+u^2}+C$$

$$=\mathrm{tg}\,x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.\quad\square$$

例 4 计算 Poisson 积分:

$$\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx,\quad 0<r<1,\quad |x|<\pi.$$

解 令 $u=\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}$, 则

$$\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx=2(1-r^2)\int\frac{du}{(1-r)^2+(1+r)^2u^2}$$

$$=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}u\right)+C$$

$$=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C.\quad\square$$

某些带根式的积分也可有理化. 主要有

$$\int R\left(x,\sqrt[r]{\frac{ax+b}{cx+d}},\cdots,\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,\tag{3}$$

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,\tag{4}$$

在(3)中 R 是多元有理函数, 根指数 $r,\cdots,\ s$ 是有理数. 在(4)中 R 是二元有理函数. 对于积分(3), 只要作换元

$$u=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},\tag{5}$$

其中 n 是 $r,\ \cdots,\ s$ 的公分母. 对于积分(4), 当 $a>0$ 时可以作换元

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=u-\sqrt{a}\,x;\tag{6}$$

当 $c>0$ 时可以作换元

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=ux+\sqrt{c}. \tag{7}$$

如果 $b^2-4ac>0$，则有

$$ax^2+bx+c=a(x-\lambda)(x-\mu),$$

这时也可以作换元

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=u(x-\lambda). \tag{8}$$

我们看两个例子:

例 5 计算 $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x}\,)}$.

解 令 $u=\sqrt[6]{x}$，则 $x=u^6$, $dx=6u^5du$. 于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x}\,)}=6\int\left(1-\frac{1}{1+u^2}\right)du$$

$$=6(\sqrt[6]{x}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x}\,)+C. \quad \square$$

例 6 计算 $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

解 作换元(6)，令 $\sqrt{x^2-x+1}=u-x$，则

$$x=\frac{u^2-1}{2u-1},\quad dx=2\frac{u^2-u+1}{(2u-1)^2}du,$$

于是

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=2\int\frac{u^2-u+1}{u(2u-1)^2}du.$$

右边是有理函数的积分，详细计算留给读者完成. $\square$

以上我们介绍了计算不定积分的基本方法和一些特殊类型的不定积分. 最后还应指出，虽然初等函数的导数仍是初等函数，但初等函数的原函数却不一定是初等函数. 诸如

$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int\sin x^2\,dx,\quad \int\cos x^2\,dx,$$

$$\int\frac{\sin x}{x}dx,\quad \int\frac{\cos x}{x}dx,\quad \int\frac{dx}{\ln x},$$

$$\int\sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx,\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$$

等均非初等函数，因此我们就不能用现在的方法通过有限次应用"基本初等函数求导公式表"来算出这些积分.

习　题

1. 回答下列问题：

(1) 有哪几种积分可以有理化？通过什么方法？

(2) 初等函数是否都有原函数？

(3) 初等函数的原函数是否还都是初等函数？

(4) 如果一个初等函数的原函数不是初等函数，为什么不能用现在的方法通过有限次应用"基本初等函数求导公式表"算出它的积分？

2. 计算下列积分：

(1) $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.　　(2) $\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx$.

(3) $\int\frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$.　　(4) $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

(5) $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.　　(6) $\int\frac{\sin x dx}{1+\cos x+\sin x}$.

(7) $\int\frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}dx$.　　(8) $\int\frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

(9) $\int\operatorname{ctg}^6 x dx$.　　(10) $\int\frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$.

(11) $\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $0<\varepsilon<1$.　　(12) $\int\frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $\varepsilon>1$.

(13) $\int\frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$.　　(14) $\int\frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

(15) $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.　　(16) $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$.

(17) $\int\frac{x dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.　　(18) $\int\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}dx$.

(19) $\int\sqrt{x^2-2x-1}dx$.　　(20) $\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

(21) $\int\sqrt{3x^2-3x+1}\,dx$.　　(22) $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

(23) $\int\frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}\,dx$.　　(24) $\int\frac{dx}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$.

(25) $\int\frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$.　　(26) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,dx$.

(27) $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}}\,dx$.　　(28) $\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$.

第二节　定　积　分

§2.1　引言

在第一章§2.1中我们已经指出，微积分学可以说基本上是由两类问题产生的：求瞬时速度和求曲边三角形的面积．在第二章§1.1中我们已经看到速度问题是如何产生导数概念的，现在我们要从平面图形的“面积”问题引出“定积分”的概念．

我们考虑比较一般的平面图形——由“平面曲线”围成的图形．对于这样的图形，我们用两组相互垂直的直线将其分块（图82），使得在边上的那些块都是如图83那样的“曲边梯形”，即是由直线$x=a$, $x=b$, $y=0$和一段曲线$y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$围成的图形，

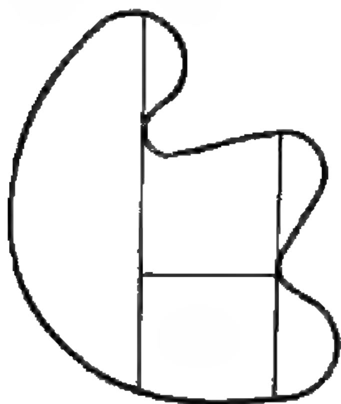


图　82

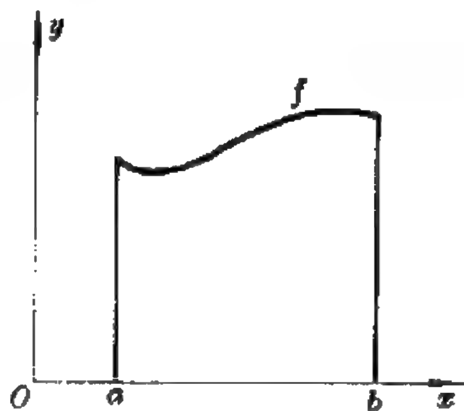


图　83

其中 $f(x)\geqslant 0(a\leqslant x\leqslant b)$. 因此我们的问题就成为如何计算这种曲边梯形的"面积"了. 我们仍采用第一章§2.1中计算曲边三角形面积的方法,即古希腊人的穷竭法. 简单说来,就是先在小范围内"以直代曲",求出曲边梯形"面积"的近似值,再取极限得到要算的"面积". 为此,我们将区间$[a,b]$分成 n 等分. 分点在 x 轴上的坐标记为

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b. \tag{1}$$

在这些分点上竖起 y 轴的平行线, 将整个曲边梯形分成 n 个细条曲边梯形(图84). 每个细条曲边梯形都相应有一细条矩形: 第 i 个细条曲边梯形相应的细条矩形是图中带阴影的矩形, 它的面积是$f(x_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{1}{n}(b-a)$是小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度.

如果分得很细,即 n 很大,每个细条曲边梯形的"面积"就与相应的细条矩形的面积近似,于是 n 个细条矩形面积之和

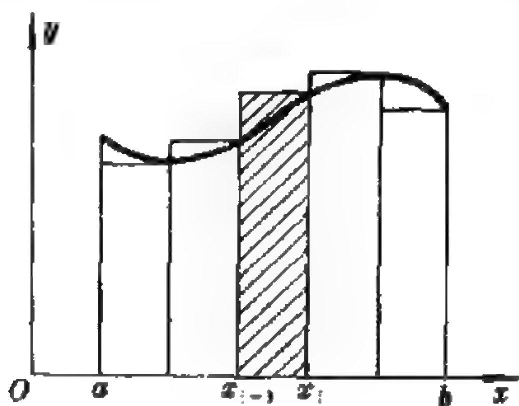


图 84

$$P_n=f(x_1)\Delta x_1+f(x_2)\Delta x_2+\cdots+f(x_n)\Delta x_n \tag{2}$$

便是要算的曲边梯形"面积"的近似值. 分之越细, P_n 就越接近曲边梯形的"面积". 无限细分, 即令 $n\to+\infty$, 则 P_n 的极限**应可视**为曲边梯形的"面积" S, 即

$$S=\lim_{n\to+\infty}P_n. \tag{3}$$

同法可以讨论一个物理问题——功. 我们知道, 一个方向不

变、大小为常数 F 的力，使一物体沿力的方向移动距离 d 所作之功为 Fd. 这是功的定义. 在这个基础上，如果力的方向不变，大小是随位置变化的，则应如何定义其所作之"功"呢？取坐标轴与力的方向一致，物体在力的作用下由 a 点移动到 b 点(图 85). 设在位置为 x 时力的大小为 $f(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$. 同"以直代曲"计算面积一样，我们用"匀代不匀"的办法来定义力 f 所作之"功". 将区间$[a, b]$用分点(1)等分为小区间. 当 n 很大时小区间都很小，在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上力 f 就可近似地视为匀力 $f(x_i)$，力 f 在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上所作之"功"就可近似地视为 $f(x_i)\Delta x_i$. 于是(2)就可近似地视为力 f 在区间$[a, b]$上所作之"功"，(3)就可定义为 f 在$[a, b]$上所作之"功".

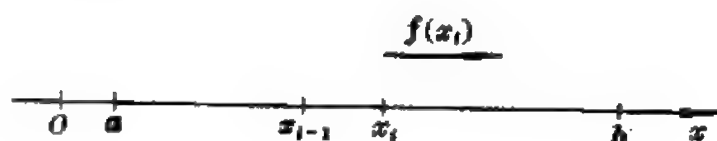


图 85

通过以上两个问题的讨论，我们看到，虽然它们的内容完全不同，但是解决的方法确是相同的，都是计算和式(2)的极限(3). 这可以说是一种"化整为零"的求和思想：为了计算一个量，先把它化小. 以后我们逐渐会看到，不能用普通加法计算的量都须这样去"求和". 因此，研究这种求和法的一般理论和计算方法就成为很重要的问题了. 这种求和法就是"定积分"的概念，简单地说，极限(3)就是函数 f 在区间$[a, b]$上的定积分.

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) 质点作直线运动，已知其在每一时刻 t 的速度为 $v(t)\geqslant 0$. 不通过求原函数，如何计算质点由时刻 $t=0$ 到 $t=T$ 走过的距离？

(2) 在区间$[a, b]$上分布着质量，总和为m，已知在每一点$x\in[a, b]$的线密度为$p(x)$. 不通过求原函数，如何计算m？

§2.2 定积分的概念

在§2.1中我们提出了一个"求和"法，并把它叫做"定积分". 现在我们要进一步给出定积分的严格定义.

设函数f在闭区间$[a, b]$上有定义. 任取一有限个分点组(图86)

$$\pi:\quad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

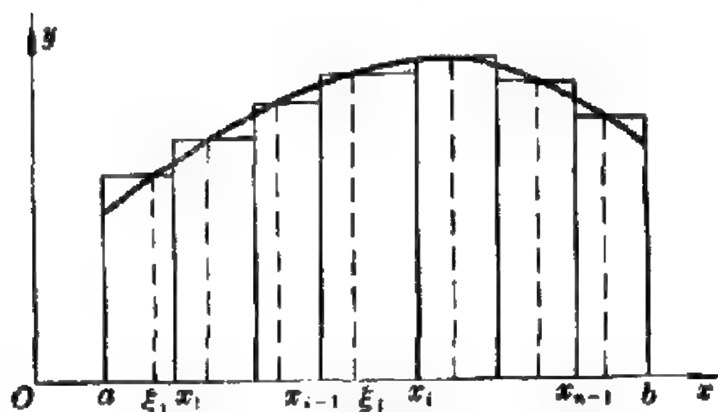


图 86

把$[a, b]$分成n个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n].$$

分点组π叫做$[a, b]$的一个"分割". 每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$的长度记为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 再在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点ξ_i, $i=1, \cdots, n$. 作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=f(\xi_1)\Delta x_1+\cdots+f(\xi_n)\Delta x_n, \tag{1}$$

叫做f在$[a, b]$上的"Riemann 和". 记$\|\pi\|$为诸小区间长度之最大者:

$$\|\pi\|=\max(\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n).$$

定义 1 如果有一数 I, 使得对于任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_\varepsilon>0$, 不管分割 π 为何, 只要 $\|\pi\|<\delta_\varepsilon$, 就有

$$|I-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i|<\varepsilon$$

对一切 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,\cdots,n)$ 成立, 则称 I 为和式(1)当 $\|\pi\|\to 0$ 时的极限:

$$I=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i; \tag{2}$$

并称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上为(Riemann) 可积; I 叫做 f 在 $[a,b]$ 上的(Riemann)**积分**或**定积分**. 记为

$$I=\int_a^b f=\int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

其中 a 和 b 分别叫做积分的**下限**和**上限**, $[a,b]$ 叫做**积分区间**, f 叫做**被积函数**.

(3)中的 x 叫做"积分变量", "$\int$"或"$\int\cdot dx$"是积分符号, 是相应于"Σ"或"$\Sigma\cdot\Delta x_i$"产生出来的符号.

由此定义可知, 一个定积分 $\int_a^b f$ 是一个数, 它只依赖于被积函数 f 和积分限 a,b, 随此三者而异. 当 a,b 固定时 $\int_a^b$ 是一个运算, 它把区间 $[a,b]$ 上的每一个可积函数 f 变成一个数 $\int_a^b f$; $\int_a^b$ 也是一个函数, 它的定义域是 $[a,b]$ 上的全体可积函数.

特别指出, (3)中的积分变量 x 只是一个形式符号, 对积分的值是没有影响的, 不论用什么符号去表示积分变量, (3)中右端都表示同一个积分, 即

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f.$$

这就好比

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

一样. 所以积分变量又别称"哑元". 那么为何要写出这个哑元呢? 以后我们会看到, 它在计算时是要起作用的, 并且在某些场合还能起区分作用.

根据 § 2.1中的分析, 定积分(3)应可视为曲边梯形的"面积", 它的一个曲边是 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 其中 f 是非负函数. 例如, 在第一章 § 2.1 中我们计算了从前 Archimedes 算过的曲边三角形面积, 其值是$\frac{1}{3}$, 因此应有

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}. \tag{4}$$

下面我们就会知道, 这个等式是对的. 同样, 如果力 f 的方向不变, 则沿力的方向由 a 至 b 所作之"功"应定义为

$$W = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{5}$$

既然已经建立了定积分的概念, 我们就有三个问题要解决:

1. 函数可积的条件为何?

2. 定积分有些什么性质?

3. 如何计算定积分?

关于第一个问题, 它与实数连续性密切相关, 我们现在先作回答, 证明留待第四章.

定理 1 若函数 f 在区间$[a, b]$上满足下列三个条件之一, 则 f 在$[a, b]$上可积:

1) 单调. 2) 连续. 3) 有界, 且只有有限个间断点.

例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则函数 f 在区间 $[0,1]$ 上是可积的，因为它符合定理中的第 3) 个条件. 再如，设 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数(图 87)，则函数 $[\cdot]$ 在任何有界区间上都是可积的.

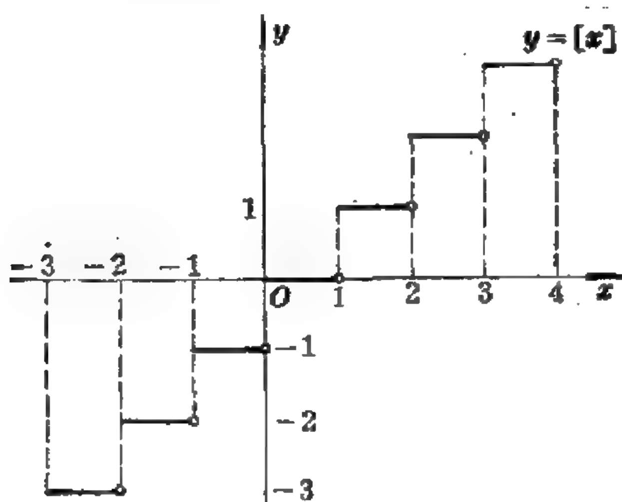


图 87

下面我们再给出一个关于可积的必要条件的重要定理.

定理 2 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证明 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积. 记 I 为 f 在 $[a,b]$ 上的积分. 在定积分定义中，取 $\varepsilon=1$，则存在 $\delta>0$，不管怎样的分割 π，只要 $\|\pi\|<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<1 \tag{6}$$

对一切 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 成立. 现在取定一个分割 π：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

且 $\|\pi\|<\delta$.

(反证)设 f 在 $[a,b]$ 上无界. 则在区间 $[x_0,x_1]$，$[x_1,x_2]$，$\cdots$，

$[x_{n-1}, x_n]$中至少有一个区间，记为$[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$，f 在此区间上无界. 不妨设无上界. 在(6)式中特别取 $\xi_i = x_i (i \neq i_0)$，就得

$$f(\xi)\Delta x_{i_0} + \sum_{i \neq i_0} f(x_i)\Delta x_i - I < 1$$

对一切 $\xi \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$成立，即对一切 $\xi \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$有

$$f(\xi) < \frac{1}{\Delta x_{i_0}}[1 + I - \sum_{i \neq i_0} f(x_i)\Delta x_i].$$

这就是说 f 在$[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$上有上界，矛盾. □

例如，设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则函数 f 在其定义区间上不可积，因为它无界.

但是，有界不是可积的充分条件. 下面即是一个反例.

例 1 Dirichlet 函数 D（第一章 § 1.4）在区间[0, 1]上不可积.

证明 对区间[0, 1]的任一分割 π 有

$$\sum_{i=1}^{n} D(\xi_i)\Delta x_i = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0, & \xi_i \text{ 为有理点}, \\ \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1, & \xi_i \text{ 为无理点}. \end{cases}$$

不管怎样的分割 π，在其每一个小区间$[x_{i-1}, x_i]$中既有有理点，也有无理点，所以和式总能取到 0 和 1 两个数. 由“Riemann 和”极限的定义，显见它不能有极限，所以 D 在[0, 1]上不可积. □

从积分的定义(ξ_i 的任意性)和以上的讨论，我们可以看到，函数的可积性和连续性有着密切的联系. 以后我们在第二册（第七章)中还会进一步看到这种联系. 例如 Dirichlet 函数，这是非

常简单的函数，因为它只有两个函数值，然而它竟是不可积的，它太不连续了．关于上面所提的第一个问题，我们就先谈到这里．

我们把第二个问题暂时搁下，再谈第三个问题．如果我们已知一个函数是可积的，则由定义容易明白，计算它的积分时就可取特殊的分割，再在小区间上取特殊的点ξ_i，例如，等分区间取端点，使得Riemann和的极限比较容易算出来．假定函数f在区间$[a,b]$上是可积的，将$[a,\ b]$分成n等分，再取$\xi_i=x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$，则就有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f. \tag{7}$$

例1 计算定积分$\int_a^b x dx$.

解 这就是计算图88中阴影梯形面积．显然被积函数是连续的，因此是可积的，所以我们可用(7)式来计算，得到

$$\begin{aligned}\int_a^b x dx&=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\\&=a(b-a)+\lim\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\\&=a(b-a)+\lim\frac{(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\\&=(b-a)\frac{b+a}{2}.\end{aligned}$$

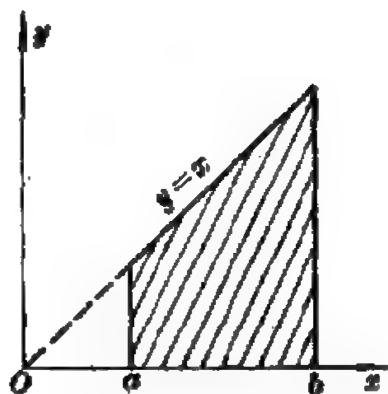


图 88

这和梯形面积公式是一致的． □

例2 计算$\int_a^b \sin x dx$.

解 用(7)式来计算，记$h_n=\frac{b-a}{n}$，则

$$\int_a^b \sin x dx = \lim_{n\to+\infty} h_n \sum_{i=1}^{n} \sin(a+ih_n)$$

$$=\lim \frac{h_n}{2\sin\frac{h_n}{2}} \sum_{i=1}^{n} 2\sin\frac{h_n}{2}\sin(a+ih_n)$$

$$=\lim \sum_{i=1}^{n}\left[\cos\left(a+\frac{2i-1}{2}h_n\right)-\cos\left(a+\frac{2i+1}{2}h_n\right)\right]$$

$$=\lim\left[\cos\left(a+\frac{h_n}{2}\right)-\cos\left(a+\frac{2n+1}{2}h_n\right)\right]$$

$$=\cos a-\cos b.$$

同样我们可以用(7)式去计算(4)式中的积分，而这就是第一章§2.1中的算法，那时算得的值为$\frac{1}{3}$，所以(4)式正确．

以上几个定积分实例，是从定义来计算的．这并没有解决定积分的计算方法问题，它仍是古希腊人的穷竭法．要解决定积分的计算问题，我们还得借助于其性质和理论，即上面提出的第二个问题．这个问题将在下面§2.3及§2.4讨论．

习　　题

1．回答下列问题：

(1) 什么是Riemann和？Riemann和的极限是什么意思？函数可积是什么意思？

(2) Riemann和的极限有没有唯一性？

(3) 一个定积分$\int_a^b f(x)dx$依赖于哪些因素？

(4) 试将积分定义同时用于$\int_a^b f(x)dx$和$\int_a^b f(t)dt$，二者有没有差别？

(5) 定积分的几何意义是什么？有什么例子可以说明定积分的物理意义？

(6) 函数在一个区间上可积的必要条件是什么?

(7) 有界函数是否一定可积? 有什么反例?

(8) 我们知道哪几种函数可积?

(9) 已知一个函数是可积的, 可怎样从定义来计算其定积分?

2. 下列函数 f 在其定义区间上是否可积? 为什么? 设

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

(3) $f(x)=x-[x],\ 0\leqslant x\leqslant 10.$

(4) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{n}{nx-1}, & \dfrac{1}{n+1}<x<\dfrac{1}{n},\ n=1,2,\cdots,99,\\ 0, & x=\dfrac{1}{n},\ n=1,2,\cdots,100.\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3. 由定义计算下列定积分:

(1) $\int_a^b 0.$ (2) $\int_a^b 1.$

(3) $\int_0^1 x^3dx.$ (4) $\int_0^a 2^x dx.$

(5) $\int_a^b \dfrac{dx}{x^2},\quad a>0.$

提示: 取 $\xi_i=\sqrt{x_{i-1}x_i}$.

(6) $\int_1^2 x^m dx,\ m\neq -1.$

提示: 取分点为一等比数列.

§2.3 定积分的性质

现在我们讨论定积分运算的一些基本性质. 显然, 函数 0 和 1 在任何区间上都是可积的, 且

$$\int_a^b 0=0,\quad \int_a^b 1=\int_a^b dx=b-a.$$

定理 1　如果函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上可积，c 是常数，则函数 cf 和 $f+g$ 也在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f,$$

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

证明　显然，

$$\int_a^b cf = \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n cf(\xi_i)\Delta x = c\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = c\int_a^b f,$$

因为 f 在 $[a,b]$ 上可积，所以上式中第二个和式极限存在，因而第一个和式极限也存在，所以 cf 在 $[a,b]$ 上可积，且定理中的第一个等式成立．同样，

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g) &= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n (f+g)(\xi_i)\Delta x_i\\ &= \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i\\ &= \int_a^b f + \int_a^b g,\end{aligned}$$

因为 f 和 g 都在 $[a,b]$ 上可积，所以上式中第二个和第三个和式的极限存在，因而第一个和式的极限也存在，所以 $f+g$ 在 $[a,b]$ 上可积，且定理中的第二个等式成立．□

定理 2　如果函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上都可积，且当 $x\in[a,b]$ 时 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

特别，当 g 为非负函数时有 $\int_a^b g\geqslant 0$.

证明　由所设有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$$

对一切分割 π 和 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 成立，令 $\|\pi\| \to 0$ 即得证. □

根据这个性质，可以不通过计算来比较两个积分的大小. 例如，

$$\int_0^1 x^3 dx \leqslant \int_0^1 x^2 dx, \qquad \int_1^2 x^2 dx \leqslant \int_1^2 x^3 dx.$$

在定积分的定义中，下限是小于上限的. 为了运算上的需要，我们定义

$$\int_a^b f = \begin{cases} -\int_b^a f, & \text{若 } a > b; \\ 0, & \text{若 } a = b. \end{cases} \tag{1}$$

这样，在 $a \gtreqless b$ 三种情况下，定积分 $\int_a^b f$ 就都有意义了.

以后，从第四章 § 2.3 可积性理论易知，若函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积，则在一切子区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 上也可积.

定理 3 设函数 f 在区间 I 上可积，$a, b, c \in I$. 则

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f. \tag{2}$$

证明 1) 设 $a < b < c$. 作 $[a, c]$ 的分割

$$\pi: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c,$$

并使 b 保持是 π 的一个分点：$x_{i_b} = b$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_b} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=i_b+1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

由所设，f 在 $[a, b]$，$[b, c]$ 和 $[a, c]$ 上都可积，在上式中令 $\|\pi\| \to 0$ 便得证.

2) 设 $a < c < b$. 则由 1) 中证得的便有

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

移项，并注意 $-\int_c^b f=\int_b^c f$，即得(2)式。

3) 设 $a=b<c$. 则由(1)式，

$$\int_a^c f=\int_b^c f=\int_a^b f+\int_b^c f.$$

同样可证其它情形. □

定理 4 设区间 $[a, b]$ 上的函数 f 连续、非负，且 $\int_a^b f=0$. 则 $f=0$.

证明 (反证)设 f 为非零函数，则有 $x_0\in[a, b]$ 使 $f(x_0)>0$. 因为 f 连续，显见有区间 $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$，当 $x\in[\alpha, \beta]$ 时 $f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$. 于是由定理 2 和定理 3,

$$\int_a^b f=\int_a^\alpha f+\int_\alpha^\beta f+\int_\beta^b f\geqslant\int_\alpha^\beta f$$

$$\geqslant\frac{1}{2}f(x_0)(\beta-\alpha)>0.$$

这与假设矛盾. □

例 1 设函数 f 和 g 在区间 $[a, b]$ 上连续，证明 Schwarz 不等式

$$\left(\int_a^b fg\right)^2\leqslant\int_a^b f^2\int_a^b g^2,$$

其中等号当且只当 f 和 g 在 $[a, b]$ 上成比例时成立.

证明 对一切 $t\in R$ 有

$$0\leqslant\int_a^b(tf+g)^2=t^2\int_a^b f^2+2t\int_a^b fg+\int_a^b g^2. \tag{3}$$

若 $\int_a^b f^2=0$，则因 f 连续，由定理 4，f 在 $[a, b]$ 上是零函数，所证不

等式显然成立. 若$\int_a^b f^2>0$, 令

$$t_0=-\int_a^b fg\Big/\int_a^b f^2.$$

在(3)式中令 $t=t_0$ 得

$$0\leqslant-\frac{\left(\int_a^b fg\right)^2}{\int_a^b f^2}+\int_a^b g^2, \tag{4}$$

便得所证不等式.

若 f 和 g 成比例, 显然 Schwarz 不等式成为等式. 反之, 若不等式成为等式, 则(4)中等号成立, 因此(3)式当 $t=t_0$ 时等号成立. 而 t_0f+g 是连续函数, 由定理 4, t_0f+g 是零函数, 即 f 和 g 成比例. □

定理 5 (积分平均值定理) 设函数 f 和 g 在区间$[a, b]$上连续, g 在$[a,b]$上不改变符号, 则有 $\xi\in[a,b]$使

$$\int_a^b fg=f(\xi)\int_a^b g.$$

证明 不妨假定当 $x\in[a,b]$ 时 $g(x)\geqslant0$. 因为 f 在$[a,b]$上连续, 它在$[a,b]$上有最小值 m 和最大值 M. 于是

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

所以

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

根据定理 2 即得

$$m\int_a^b g\leqslant\int_a^b fg\leqslant M\int_a^b g.$$

依假定有$\int_a^b g\geqslant0$. 如果$\int_a^b g=0$, 则由上式得$\int_a^b fg=0$, 定理显然成立. 如果$\int_a^b g>0$, 则由上式有

$$m\leqslant\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}\leqslant M.$$

再从介值定理(第一章 § 4.2 定理 2)知道,存在 $\xi\in[a,b]$使

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}.$$

这便是所证. □

推论 设函数 f 在区间$[a,b]$上连续,则有 $\xi\in[a,b]$使

$$\int_a^b f=f(\xi)(b-a).$$

证明 在定理 5 中取 $g=1$ 则得证. □

从几何上看, 如果 $f\geqslant 0$, 则推论中等式左端表示一个曲边梯形的面积,右端是一个矩形面积. 这个推论告诉我们,一定存在一点 ξ 使得图 89 中两块阴影面积相等.

这个定理为什么叫做积分平均值定理呢? 设函数 f 和 g 在区间$[a,b]$上连续, g 非负. 我们记

$$E(f)=\frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g},\tag{5}$$

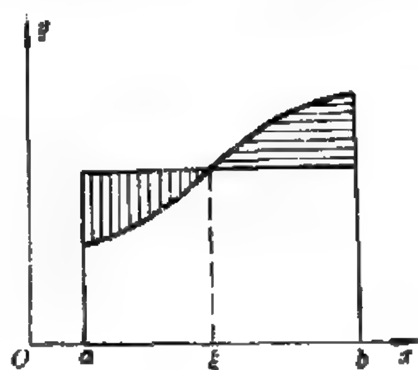


图 89

叫做 f 在$[a,b]$上关于"权" g 的"积分平均值". 如果 $g=1$, 则积分平均值就成为

$$E(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

我们知道,

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

是 n 个数 $a_1,\cdots,a_n$ 的算术平均值. 如果 $m_i\geqslant 0$ $(i=1,\cdots,n)$, 则

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i m_i}{\sum m_i} \tag{6}$$

就是 $a_1,\cdots,a_n$ 的加权平均值, $m_1,\cdots,m_n$ 叫做"权". 如果 $m_1=\cdots=m_n$, 则加权平均就是算术平均. 考虑在水平横轴上放置 n 个质点, 第 i 个质点的坐标为 a_i, 质量为 m_i $(i=1,\cdots,n)$, 则此 n 个质点的重心坐标就是全部质点坐标 $a_1,\cdots,a_n$ 的加权平均(6). 我们再回到积分平均(5). 将区间 $[a,b]$ 分成 n 等分, 分点坐标记为 $x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$, $i=0,1,\cdots,n$, 则由 §2.2(7)式就有

$$E(f)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}f(x_i)g(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}g(x_i)}.$$

与(6)式比较, 我们自然也把 $E(f)$ 看作"平均值", 称它为"积分平均值". 事实上, 在 §2.6 中, 我们还要继续说明, 积分平均值与(6)式一样也能表达重心位置, 表达以 g 为密度函数的细杆的重心位置.

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积, g 在 $[a,b]$ 上不可积, 则 $f+g$ 和 fg 在 $[a,b]$ 上是否可积?

(2) 若函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上都不可积, 则 $f+g$ 和 fg 在 $[a,b]$ 上是否也不可积?

(3) 若函数 f 在 $[a,b]$ 上非负, 可积, 且 $\int_a^b f=0$, 则 f 在 $[a,b]$ 上是否为零?

(4) 若函数 f 在$[a, b]$上连续，且$\int_a^b fg=0$ 对$[a, b]$ 上的一切连续函数 g 成立，则 f 如何？

(5) 若函数 f 和 g 均在$[a, b]$上连续，且当 $x\in[a, b]$时 $f(x)\leqslant g(x)$，又$\int_a^b f=\int_a^b g$，则 f 与 g 如何？

2. 确定下列积分的正负：

(1) $\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx$.　　(2) $\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{x^2}\ln^3 x dx$.

(3) $\int_0^1 x^t(1-x)^{1-t}dx$.

3. 比较下列积分的大小：

(1) $\int_{-1}^0 e^{-x^2}dx$ 和 $\int_{-1}^{1/2} e^{-x^2}dx$.

(2) $\int_0^1 e^x dx$和$\int_0^1 e^{x^2}dx$.

(3) $\int_0^1 e^{-x}dx$ 和 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

(4) $\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x}dx$和$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2}dx$.

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$和$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

4. 证明：

(1) $\int_0^{10}\frac{xdx}{x^3+16}\leqslant\frac{5}{6}$.　　(2) $\frac{2}{\sqrt[4]{e}}\leqslant\int_0^2 e^{x^2-x}dx\leqslant 2e^2$.

(3) $\int_0^{2\pi}|a\sin x+b\cos x|dx\leqslant 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$.

(4) $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx\leqslant\frac{m^m n^n}{(m-n)^{m+n}}$，$m, n>0$.

5. 设函数 f 在区间$[a, b]$上连续，若$\int_a^b fg=0$ 对$[a, b]$上一切满足条件 $g(a)=g(b)=0$ 的连续函数 g 成立，则 f 在$[a, b]$上为零.

6. (1) 设函数 f 在区间$[a, b]$上除有限个点外处处为零，则$\int_a^b f=0$.

(2) 设函数 f 在区间$[a, b]$上可积，函数 g 在$[a, b]$上除有限个点外处处

与 f 相等，则 g 在$[a, b]$上也可积，且$\int_a^b f=\int_a^b g$。

7. 设 $p>0$，证明：

(1) $\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{n^p}\leqslant\int_1^m\frac{dx}{x^p}\leqslant\sum_{n=1}^{m-1}\frac{1}{n^p}$.

(2) 若 $a_n\geqslant 0$, $s_n=a_1+\cdots+a_n$, $n=1, 2, \cdots$, 则

$$\sum_{n=2}^{m}\frac{a_n}{s_n^p}\leqslant\int_{s_1}^{s_m}\frac{dx}{x^p}\leqslant\sum_{n=1}^{m-1}\frac{a_{n+1}}{s_n^p}.$$

8. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b e^{-nx^2}dx$, $0<a<b$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_n^{n+p}\frac{\cos x}{x}dx$, $p>0$.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$.

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\pi^{\frac{n}{2}}}\sin\left(\sqrt[n]{x}\,\frac{\pi}{2}\right)dx$.

9. 设函数 f 在闭区间 I 上可积，证明有常数M，当 $a, b\in I$ 时

$$\left|\int_a^b f\right|\leqslant M|a-b|.$$

10. (1) 设 φ 是区间 I 上的凸函数， f 是区间$[a, b]$上的连续函数，且 $f([a, b])\subset I$. 试由积分定义证明(B. Jensen)

$$\varphi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\varphi\circ f.$$

(2) 若 f 是$[a, b]$上的连续正值函数，则

$$e^{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln\circ f}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

(3) 试用第二章§2.4 习题7 的(5)证明本题(1)中的不等式。

提示：取

$$c=\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

若 c 在 I 的端点上，则结论显然. 若 c 不在 I 的端点上，则以 $f(x)$ 代入不等式

$$\varphi(x)\geqslant\alpha(x-c)+\varphi(c).$$

11. 设函数 f 在区间$[0, +\infty)$上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=a.$$

12. 设 f 和 g 都是区间$[a,b]$上的连续函数，$0<p<1$. 证明

$$\int_a^b|f+g|^p\leqslant\int_a^b|f|^p+\int_a^b|g|^p.$$

13. 设函数 f 在区间$[a,b]$上非负、连续，$M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$. 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

§ 2.4 微积分基本公式

现在我们再来研究定积分的计算问题，即 § 2.2 中提出的第三个问题. 我们将发现，计算定积分实际上就是求原函数，即计算不定积分，也就是求导(微分)的逆运算.

设函数 f 在区间$[a,b]$上可积. 当 $x\in[a,b]$时我们令

$$\Phi(x)=\int_a^x f, \qquad (1)$$

则Φ是定义在$[a,b]$上的一个函数. 如果 f 非负，则Φ的几何意义如图 90 所示，$\Phi(x)$是区间$[a,x]$上方曲边梯形的面积.

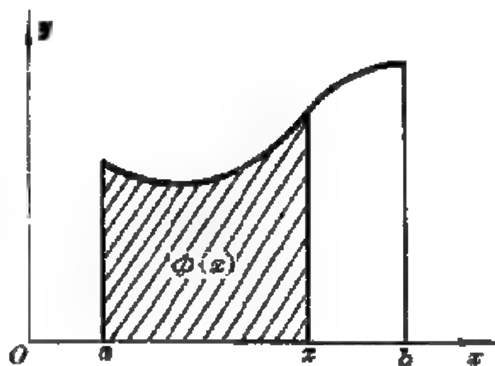


图 90

定理 1 设函数 f 在区间$[a,b]$上可积，且在一点 $x_0\in[a,b]$连续，则(1)式定义的函数Φ在 x_0 可导，且 $\Phi'(x_0)=f(x_0)$.

证明 设 $x_0+h\in[a,b]$，则由 § 2.3 定理 3，

$$\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)=\int_a^{x_0+h}f-\int_a^{x_0}f=\int_{x_0}^{x_0+h}f.$$

任给 $\varepsilon>0$. 因为 f 在 x_0 连续，所以有 $\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$，且 $x\in[a,b]$时

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

因此易见，当 $0<|h|<\delta$，且 $x_0+h\in[a,b]$时

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant\frac{\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)}{h}\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

由导数定义，这就是说Φ在 x_0可导，导数是 $f(x_0)$. □

注 在定理 1 中如果令

$$\Psi(x)=\int_b^x f,\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

则由 §2.3 定理 3,

$$\Phi(x)-\Psi(x)=\int_a^b f,\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

可见在 f 的连续点 x_0上同样有$\Psi'(x_0)=f(x_0)$.

由定理 1，我们便立即可以回答 §1.1 中提出的原函数存在问题:

推论 如果函数 f 在区间$[a,b]$上连续，则

$$\Phi'(x)=f(x)$$

对一切 $x\in[a,b]$成立，即 f 在$[a,b]$上有原函数Φ.

例 1 设

$$\Phi(x)=\int_0^x \sin^4 t\,dt,\ x\in R.$$

求Φ在 $x=0$ 和$x=\frac{\pi}{2}$处的导数.

解 因为被积函数sin是连续的，所以由定理 1，

$$\Phi'(0)=\sin^4 0=0,\quad \Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin^4\frac{\pi}{2}=1.\ \square$$

例 2 设

$$f(x)=\int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt,\ x\in R.$$

求 f'.

解 因为

$$f(x)=-\int_0^x\sqrt{1+t^4}\,dt,\quad x\in R.$$

由定理1和它的注便知，对一切 $x\in R$ 有

$$f'(x)=-\sqrt{1+x^4}.$$

例3 设

$$f(x)=\int_0^{x^2}e^{t^2}dt,\quad x\in R,$$

求 f'.

解 设

$$F(u)=\int_0^u e^{t^2}dt,\quad u\in R.$$

令 $u=x^2$，则

$$f'(x)=F'(u)u'=e^{x^2}\cdot 2x=2xe^{x^4},\quad x\in R.$$

定理2（微积分基本公式） 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积，函数 F 在 $[a,b]$ 上连续，且

$$F'(x)=f(x) \tag{2}$$

在 $[a,b]$ 上最多除有限个点以外成立. 则

$$\int_a^b f=F(b)-F(a). \tag{3}$$

证明 作 $[a,b]$ 的分割

$$\pi:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

且使 $\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 中包含全部不使(2)式成立的点. 于是在每一个区间 (x_{i-1},x_i) 上(2)式成立. 由假设，F 在每一个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上连续. 因此由微分平均值定理，存在 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$ 使

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=f(\xi_i)\Delta x_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

相加得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^n[F(x_i)-F(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

而 f 在$[a,b]$上是可积的,因此令$\|\pi\|\to 0$ 即得证. [

综合上面两条定理,我们要说明以下几点:

1) 如果函数 f 在区间$[a,b]$上可积且有原函数F, 则F当然是连续函数, 因此微积分基本公式(3)成立. 显然这时(3)式也可表示为

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)dx \Big|_a^b, \tag{4}$$

右端表示不定积分 $\int f(x)dx$ 在 b 点的值减去在 a 点的值. 所以计算定积分实际上是求原函数, 即计算不定积分. 这样就可以算出很多初等函数的定积分, 使得我们在定积分计算问题上大大地前进了一步.

特别,如果 f 是连续函数,则由定理 1 的推论, f 有原函数,因此就有(3)式和(4)式的成立.

2) 如果函数 f 在区间$[a,b]$ 上连续,则由(4)式,定积分符号 $\int_a^b f(x)dx$就有双重含义: 一是如前述,是 Riemann 和的极限; 一是导数为 f 或微分为 $f(x)dx$ 的函数在 a,b 两点之差,所以定积分符号中的 $f(x)dx$ 含有微分的意思. 这两种含义对定积分的应用都很有用.

3) 微积分基本公式不仅有计算上的意义,它在理论上把导数(微分)和积分联系在一起, 是(一元)微积分的核心, 是极为重要的.

例 4 计算定积分:

$$\int_0^1 x^2 dx, \qquad \int_a^b \sin x dx.$$

解 前面我们曾用定积分的定义计算过这些积分,非常费力. 现在由微积分基本公式(3)计算就十分简单:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b. \square$$

例 5 证明当 m, n 为整数时

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n. \end{cases}$$

证 当 $m \neq n$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-n)x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m+n)x dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \cos(m-n)x dx - \int \cos(m+n)x dx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

当 $m = n$ 时,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi - \frac{1}{2n}\sin 2nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \pi. \square$$

同理还有

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n, \\ \pi, & \text{若 } m = n; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0,$$

其中 m 和 n 都是整数.

例 6 计算 $\int_0^3 |x-2| dx$.

解 由 §2.3 定理 3,

$$\int_0^3 |x-2| dx = \int_0^2 (2-x) dx + \int_2^3 (x-2) dx = \frac{5}{2}. \square$$

例 7 设

$$f(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ x-1, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

求$\int_0^2 f$.

解 因为当 $x\in[1,2]$ 时 $f(x)=x-1$ 除一个点外成立，所以(§2.3 习题 6(2))

$$\int_0^2 f=\int_0^1 f+\int_1^2 f=-\int_0^1 x dx+\int_1^2 (x-1)dx=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0. \quad \square$$

例 8 设

$$\Phi(x)=\int_{-1}^x \operatorname{sgn} t dt, \qquad x\in R.$$

试求出Φ.

解 由第二章§1.2 例 2 知道,

$$|x|'=\operatorname{sgn} x$$

除 $x=0$ 外成立，而 $|\cdot|$ 是连续函数，因此由微积分基本公式(3)得

$$\Phi(x)=\int_{-1}^x \operatorname{sgn} t dt=|x|-1, \quad x\in R. \quad \square$$

这题也可以像例 7 那样计算得到Φ. 我们注意到，$\Phi'(x)=\operatorname{sgn} x$ 只在被积函数sgn 的连续点上成立.

例 9 计算由曲线 $x=y^2$ 和 $y=x^2$ 围成的面积 A.

解 由题意就是计算由曲线 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=x^2$ 围成的面积. 从图 91 可知

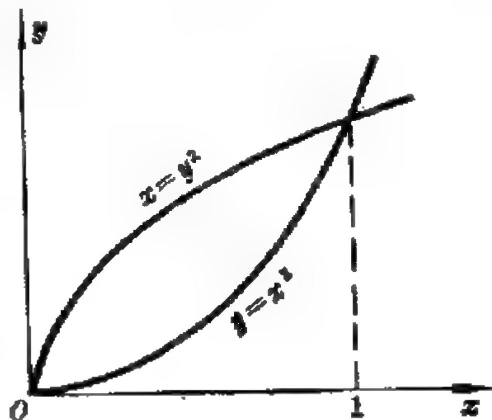


图 91

$$A=\int_0^1 \sqrt{x} dx-\int_0^1 x^2 dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}. \quad \square$$

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 设 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$, $a\leqslant x\leqslant b$. 在什么点 x 上有 $\Phi'(x)=f(x)$ 成立?

(2) 在什么条件下有

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

成立?

(3) 因为 $\operatorname{sgn}' x=0$ 除 $x=0$ 以外成立, 所以由微积分基本公式有

$$0=\int_{-1}^{1} 0=\operatorname{sgn} x\Big|_{-1}^{1}=2.$$

错在何处?

(4) 为什么说区间上的连续函数有原函数?

(5) 在什么条件下有

$$\int_a^b f(x)dx=\int f(x)dx\Big|_a^b$$

成立?

2. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 (x^n-4e^{-2x})dx$.　　(2) $\int_{-1}^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx$.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}dx$.　　(4) $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

(5) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-2x\cos\alpha+1}$, $0<\alpha<\pi$.

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\varepsilon\cos x}$, $0\leqslant\varepsilon<1$.

(7) $\int_0^1 |1-2x|dx$.　　(8) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(\sin x)dx$.

3. 计算下列曲线围成的面积:

(1) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

(2) $y=x^3$, $y=\sqrt[3]{x}$.

(3) $y=x+[x]$, $x=3$, x 轴.

(4) $x=y^2$, $3y-2x+2=0$.

(5) $y=x^2$, $y=x^3-x$.

4. 求 F', 设

(1) $F(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^2 dt$. (2) $F(x)=\int_{x^3}^{2x^3}\frac{\sin x}{x}dx$.

(3) $F(x)=\int_0^{\int_0^x e^{t^2}dt}(1+e^{t^2})dt$. (4) $F(x)=\int_0^{x^2}\left(\int_0^y\sqrt{2-\sin^2 t}\,dt\right)dy$.

(5) $F(x)=\left[1+\int_0^{\sin^2 x}\sin\sqrt{t}\,dt\right]^2$.

5. 求 $(f^{-1})'(0)$, 设

(1) $f(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$. (2) $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt$.

6. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\operatorname{arctg}^2 t\,dt$. (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\int_0^x e^{t^2}dt}{e^{x^2}}$.

7. 设

$$F(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt,\ x\in R.$$

证明函数 F 在 $x=\pi$ 达到最大值.

8. 求下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, $p>0$.

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$.

(5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

9. 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin x}dx \begin{cases} <\dfrac{\pi}{2R}(1-e^{-R}), & R>0, \\ >\dfrac{\pi}{2R}(1-e^{-R}), & R<0, \\ =\dfrac{\pi}{2}, & R=0. \end{cases}$$

10. 设函数 f 在区间$[0, \pi]$上连续，$n\in N$，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx.$$

11. 用三角函数恒等式将下列被积函数表示为余弦之和，证明Dirichlet积分

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}dx=\pi,\quad n=0, 1, \cdots.$$

12. 将下列被积函数表示为上题的被积函数之和，证明 Fejér 积分

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 dx=n\pi,\quad n=0, 1, \cdots.$$

§2.5 定积分的换元和分部积分

微积分基本公式（§2.4(3)）告诉我们，当被积函数为连续时，计算定积分实际上就是求原函数，即计算不定积分．但是另一方面，公式还告诉我们，计算一个特定的定积分，只要求知道原函数在积分区间端点上的值，并不要求知道整个原函数．因此通过求原函数即计算不定积分去计算定积分，有时会多费力气，甚至行不通（参见下面例5），因为计算不定积分往往是比较困难的．定积分的换元法和部分积分法不要求完全求出原函数，因此在一定程度上克服了这个缺点．

定理1（定积分换元） 设函数 f 在区间 I 上连续，函数 φ 在区间$[\alpha, \beta]$上有连续导函数．又

1° $\varphi([\alpha,\beta])\subset I$;

2° $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$.

则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt. \tag{1}$$

证明 由 § 2.4 定理 1 的推论，f 在 I 上有原函数，记为 F，则当 $t\in[\alpha,\beta]$ 时

$$(F\circ\varphi)'(t)=F'\circ\varphi(t)\varphi'(t)=f\circ\varphi(t)\varphi'(t).$$

根据假设，f 在 I 上连续，$(f\circ\varphi)\varphi'$ 也在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，而 F 和 $F\circ\varphi$ 分别是它们的原函数，因此我们可以应用微积分基本公式得

$$\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt=F\circ\varphi(\beta)-F\circ\varphi(\alpha)=F(b)-F(a)$$

$$=\int_a^b f(x)dx.\quad \square$$

在定理 1 中令 $x=\varphi(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，则就有

$$f(x)dx=f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt,\quad t\in[\alpha,\beta].$$

因此和不定积分换元一样，记 $g=f\circ\varphi\cdot\varphi'$，则定理 1 可以改写成下面的形式：

定理 1' 在定理 1 的假设下，如果 $x=\varphi(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 使得微分关系

$$f(x)dx=g(t)dt\qquad(\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \tag{2}$$

成立，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta g(t)dt. \tag{3}$$

和不定积分换元一样，使用定积分换元法也有两种方式．一种方式是“凑”．就是说，当我们要计算一个积分 $\int_\alpha^\beta g(t)dt$ 时，可以变化微分形式 $g(t)dt$，把它凑成 $f\circ\varphi(t)d\varphi(t)$，令 $x=\varphi(t)$ 即

得微分等式(2)，由(3)就变成计算积分$\int_a^b f(x)dx$. 另一种方式是凭经验直接看出适当的换元 $x=\varphi(t)$得微分等式(2)，再应用(3)式.

例 1 计算积分$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

解 这实际上就是计算半径为1的四分之一圆面积. 若由微积分基本公式，用§1.2例3中算出的原函数，代入上下限可得

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\left(\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

我们现在再用定积分的换元法来计算这个积分. 令 $x=\sin t$，则当 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时 $x\in[0,1]$；且当 $t=0$ 时 $x=0$，当 $t=\frac{\pi}{2}$时 $x=1$. 又

$$\sqrt{1-x^2}\,dx=\cos^2 t\,dt,\quad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

由定理 1′ 就有

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.\quad\square$$

比较上例两种计算方法我们看到，用定积分换元计算时，最后不必再用换元 $x=\sin t$ 代回，但必须注意积分限的变化. 这是定积分换元和不定积分换元不同的地方.

例 2 计算$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}$.

解

$$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\pi/4}\frac{\cos x\,dx}{\cos^2 x}=\int_0^{\pi/4}\frac{d\sin x}{1-\sin^2 x}$$

$$=\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{dt}{1+t}+\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{dt}{1-t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\Bigg|_0^{1/\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.\quad\square$$

例 3 求摆线的一拱与 x 轴围成的面积.

解 所谓"摆线"是一个圆沿 x 轴滚动时圆周上一个定点的轨迹. 设圆半径为 a, 圆周上定点为M, 起始时M与原点重合. 这时圆沿 x 轴滚动时M的轨迹为

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\tag{4}$$

其中 t 为圆心角 (图 92). 这是摆线的参数方程. 当 t 由 0 增至 2π时得摆线的第一拱. 设第一拱的方程为 $y=f(x)(0\leqslant x\leqslant 2\pi a)$, 则所求面积为

$$\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi a} f(x)\,dx.$$

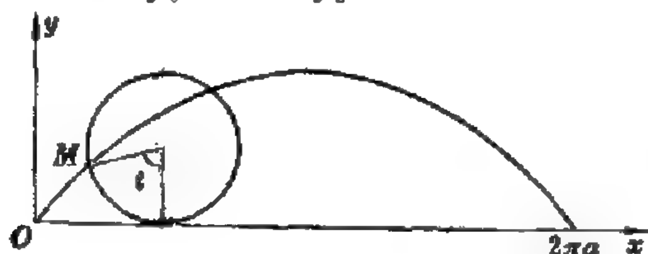


图 92

作换元 $x=a(t-\sin t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$, 由摆线的参数方程(4)得

$$\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\,da(t-\sin t)=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt$$

$$=3\pi a^2.\quad\square$$

例 4 设 f 是以 l 为周期的连续函数(第一章 §1. 4), 即对于一切 $x\in R$ 有 $f(x+l)=f(x)$. 证明对于一切数 a 有

$$\int_a^{a+l} f=\int_0^l f.$$

证明 因为

$$\int_a^{a+l} f=\int_a^0 f+\int_0^l f+\int_l^{l+a} f.\tag{5}$$

对右端第三个积分作换元 $x=t+l$ 得

$$\int_l^{l+a} f(x)dx=\int_0^a f(t+l)dt=\int_0^a f(t)dt.$$

由于(5)式右端第一个和第三个积分相消，故得证. □

定理 2（分部积分） 设函数 f 和 g 在区间$[a, b]$ 上有连续导函数，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

此式也可写成

$$\int_a^b f(x)dg(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)df(x).$$

证明 由 §2.4(4)式和不定积分的分部积分法，

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)dx&=\int f(x)g'(x)\,dx\Big|_a^b\\&=\left[f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx\right]_a^b\\&=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx.\end{aligned}$$ □

例 5 设 m 为非负整数，计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x dx,\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x dx.$$

解 这两个积分是相等的：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$ 即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m t dt.$$

记这两个积分为 I_m. 设 $m\geqslant 2$，应用分部积分法得

$$\begin{aligned}I_m&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}x d\cos x\\&=-\sin^{m-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\cos^2 x dx\end{aligned}$$

$$=(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}x\,dx-(m-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx.$$

这就是说，

$$I_m=(m-1)I_{m-2}-(m-1)I_m,$$

所以

$$I_m=\frac{m-1}{m}I_{m-2},\quad m=2,3,\cdots.$$

这是 I_m 的递推公式．由此递推公式，我们只要知道 I_0 和 I_1 的值，就可算出 I_m 的值．事实上，分别令 m 取偶数和奇数即得两串等式:

$$I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}I_{2k-2},\quad I_{2k+1}=\frac{2k}{2k+1}I_{2k-1},$$

$$I_{2k-2}=\frac{2k-3}{2k-2}I_{2k-4},\quad I_{2k-1}=\frac{2k-2}{2k-1}I_{2k-3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_4=\frac{3}{4}I_2,\qquad I_5=\frac{4}{5}I_3,$$

$$I_2=\frac{1}{2}I_0.\qquad I_3=\frac{2}{3}I_1.$$

两串等式分别自乘即得

$$I_{2k}=\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots3\cdot1}{2k(2k-2)\cdots4\cdot2}I_0,$$

$$I_{2k+1}=\frac{2k(2k-2)\cdots4\cdot2}{(2k+1)(2k-1)\cdots5\cdot3}I_1.$$

而

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1,\quad I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}.$$

因此我们最后得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \dfrac{\pi}{2}, & m = 2k, \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & m = 2k+1, \end{cases}$$

$k=1, 2, \cdots$. 这个公式叫做“Wallis 公式”。 □

在第二章 § 3.1 中我们介绍了 Taylor 公式，并应用微分平均值定理推出两个余项形式．如果应用微积分基本公式，就可得到 Taylor 公式的另一种形式的余项，叫做“积分余项”．这只要对微积分基本公式进行多次分部积分就行了．

定理 3（积分余项） 设函数 f 在区间 I 上有 $n+1$ 阶连续导函数，$a \in I$，则 Taylor 公式（第二章 § 3.1(6)式）的余项 R_n 可以表示为

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt, \quad x \in I. \tag{6}$$

证明 由微积分基本公式，如果函数 f 在 I 上有一阶连续导函数，则

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt, \quad x \in I.$$

这就是说，定理当 $n=0$ 时是成立的．现在假设定理当 $n=k$ 时成立，要证明它当 $n=k+1$ 时也成立．因此我们设 f 在 I 上有 $(k+1)+1=k+2$ 阶连续导函数，对归纳假设应用分部积分得到当 $x \in I$ 时有

$$\begin{aligned} f(x) &= P_k(x) + \frac{1}{k!}\int_a^x (x-t)^k f^{(k+1)}(t)dt \\ &= P_k(x) - \frac{1}{(k+1)!}\int_a^x f^{(k+1)}(t)d(x-t)^{k+1} \\ &= P_k(x) + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a)(x-a)^{k+1} \\ &\qquad + \frac{1}{(k+1)!}\int_a^x (x-t)^{k+1} df^{(k+1)}(t) \end{aligned}$$

$$=P_{k+1}(x)+\frac{1}{(k+1)!}\int_a^x (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)\,dt,$$

即定理当 $n=k+1$ 时成立. 所以定理对一切自然数 n 成立. □

注 显然, 对积分余项 (6) 式应用积分平均值定理就可得 Lagrange 余项(第二章 § 3.1(8)). 但要假设 f 有 $n+1$ 阶连续导函数, 比第二章 § 3.1(8)式的假设略强.

习 题

1. 下列计算是否正确?

(1) $\int_{-1}^{1} dx$, 令 $x=\sqrt{t}$.

(2) 令 $\operatorname{tg} x=t$, 则 $\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx=\int_0^0\frac{dt}{(1+t^2)^2}=0$.

(3) $\int_{-a}^{a}\frac{\sin x}{x}dx=\int_{-a}^{a}\frac{d\cos x}{x}=\cdots$.

(4) 令 $t=\sin x$, 则 $\int_0^{\pi}\cos x\,dx=\int_0^0 dt=0$.

(5) 令 $x=\sin t$, 则 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=\cdots$.

2. 计算下列定积分:

(1) $\int_0^{\ln 2} xe^{-2x}dx$.

(2) $\int_0^1 \arccos x\,dx$.

(3) $\int_0^{\sqrt{3}} x\,\operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

(4) $\int_0^1 x^n\ln x\,dx$, $n\in N$.

(5) $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$.

(6) $\int_0^5 [x]\sin\frac{\pi x}{5}dx$.

(7) $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$.

(8) $\int_0^{\pi} x\sin^2 x\,dx$.

(9) $\int_{-1}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{5-4x}}$.

(10) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

(11) $\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

(12) $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

(13) $\int_{-1}^{9} x^3\sqrt{1-x}\,dx$.

(14) $\int_0^{\pi} e^x\cos^2 x\,dx$.

(15) $\int_0^a \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})dx$.　　(16) $\int_0^1 \frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^2}dx$.

(17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$.　　(18) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}dx$, $ab\neq 0$.

(19) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$.　　(20) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

(21) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.　　(22) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

(23) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.　　(24) $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3}dx$.

(25) $\int_0^1 x^n e^x dx$, $n\in N$.　　(26) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, $n\in N$.

(27) $\int_0^1 x^m \ln^n x\,dx$, $m, n\in N$.　　(28) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$, $m, n\in N$.

3. 证明

(1) $$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\frac{\sin y}{y}dy\right)dx=0;$$

(2) $$\int_0^a\left(\int_0^x f(y)dy\right)dx=\int_0^a f(x)(a-x)dx,$$

其中 f 是连续函数.

4. 将积分 $\int_a^b f(x)dx$ 变成区间 $[0,1]$ 上的积分.

5. 设 f 为连续函数, 证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$, 并应用于积分 $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

6. 设函数 f 在区间 I 上连续, $a, b\in I^{\circ}$. 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b [f(x+h)-f(x)]dx=f(b)-f(a).$$

7. 设函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上非减, 且

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad x\geqslant 0.$$

证明 φ 为凸函数.

8. 证明

$$\pi=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

提示：应用 Wallis 公式(例 5)，只须证明

$$1\leqslant\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x dx}\leqslant\frac{2n+1}{2n}.$$

9. Hölder 不等式和 Minkowski 不等式.

(1) 设函数 φ 在区间 $[0,+\infty)$ 上严格增，有连续导函数，$\varphi(0)=0$. 证明当 $a, b\geqslant 0$ 时有

$$ab\leqslant\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\varphi^{-1}(y)dy,$$

等号当且只当 $b=\varphi(a)$ 时成立. 试从几何图形上解释这个不等式.

(2) 设 $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明当 $a, b\geqslant 0$ 时有

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},$$

等号当且只当 $a^p=b^q$ 时成立.

(3) 设函数 f 和 g 在区间 $[a, b]$ 上连续，$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明 Hölder 不等式：

$$\int_a^b|fg|\leqslant\left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

等号当且只当 $A|f|^p=B|g|^q$ 时成立.

提示：应用(2)，令

$$a=\frac{|f|}{\left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}},\qquad b=\frac{|g|}{\left(\int_a^b|g|^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

(4) 函数 f 和 g 在 $[a, b]$ 上连续，$p\geqslant 1$. 证明 Minkowski 不等式：

$$\left(\int_a^b|f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b|f|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|g|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

提示：

$$\int_a^b|f+g|^p\leqslant\int_a^b|f+g|^{p-1}|f|+\int_a^b|f+g|^{p-1}|g|,$$

再应用习题(3).

10. 计算下列曲线围成的面积:

(1) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $a,b>0$. (椭圆).

(2) $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, $a,b>0$. (星形线).

(3) $x=2t-t^2$, $y=2t^2-t^3$, $0\leqslant t\leqslant 2$.

11. 设函数 f 在区间 $[-1,1]$ 上连续, 证明

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\,dx=\pi f(0).$$

提示:
$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}dx=\pi.$$

12. 设函数 f 有周期 l, 在区间 $[0,l]$ 上可积. 试从积分定义证明例 4 中的等式成立.

§2.6 定积分在物理上应用举例

定积分的物理应用一般有两个方面: 解"微分方程"的"初值问题"和"微元求和". 前者来源于定积分是求导(或微分)的逆运算, 即微积分基本公式的应用; 后者来源于定积分的定义, 即定积分定义的应用.

§1.1 例 2 和 §1.2 例 7 都是简单"微分方程"的例子. 我们再看一个"初值问题"的例子.

例 1 有一物体在 40 分钟内温度由 200°C 降为 100°C, 周围介质保持恒温 0°C. 求物体的温度变化规律.

解 设物体在任一时刻 t 的温度为 $y=\varphi(t)$. 根据牛顿冷却定律, 物体冷却速度 y' 与物体和介质的温差 $y-0=y$ 成比例, 所以得方程

$$y'=-ky.$$

这是与 §1.2 例 7 相同的"微分方程". 由所设, $\varphi(0)=200$, $\varphi(40)=100$. 根据定积分换元(§2.5 定理 1′),

$$\int_{200}^{100}\frac{dy}{y}=-k\int_{0}^{40}dt,$$

所以

$$\ln\frac{1}{2}=-k40,$$

故得

$$k=\frac{\ln 2}{40}.$$

因此，我们的问题就是要解微分方程：

$$\begin{cases} y'=-\dfrac{\ln 2}{40}y, \\ y|_{t=0}=200. \end{cases}$$

这样的问题叫做“初值问题”，就是说，求解 y 满足“初始条件” $y|_{t=0}=200$. 同样应用定积分换元得

$$\int_{200}^{y}\frac{dy}{y}=-\frac{\ln 2}{40}\int_{0}^{t}dt,$$

所以

$$\ln\frac{y}{200}=-\frac{\ln 2}{40}t,$$

即

$$y=\frac{200}{2^{\frac{t}{40}}}.\quad \square$$

我们在 § 2.1 中所做的介绍正就是定积分定义的应用. 那就是，为了计算一个连续而不均匀地分布在区间 $[a, b]$ 上的量 Q，我们采取“化整为零”的求和法，先将 $[a, b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$，$i=1, \cdots, n$，在每一个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上以“匀代不匀”作出 Q 在小区间上的近似值 $f(\xi_i)\Delta x_i$；再把它们相加起来得到 Q 的近似值 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$；然后将 $[a, b]$ 无限细分，便得 Q 是这个和的极限，即定积分：

$$Q=\lim\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx.$$

但是，这段话太长了，套用起来很不方便. 因此我们凡须套用这段话时，都采用物理中的习惯语言，简化如下：

定积分定义	简化语言
分成小区间 $[x_{i-1},x_i]=[x_{i-1},x_{i-1}+\Delta x_i]$ $f(\xi_i)\Delta x_i$	取一小段 $[x,x+dx]$ $f(x)dx$
$Q=\lim\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$	在 $[a,b]$ 上"相加"得 $Q=\int_a^b f(x)dx$

所谓"微元求和"，就是指的这套简化语言.

例 2 在长为 l，质量为 M 的均匀细棒 AB 的延长线上有一质点 C，其质量为 m，已知 $CA=a$，求棒和质点之间的引力.

解 我们把坐标原点取在 C 点，于是 A 点的坐标为 a，B 点的坐标为 $a-l$（图 93）. 在棒上取一小段 $[x,x+dx]$，这一小段的质量便是 $\frac{M}{l}dx$. 如果把它看作一个质点，坐标为 x，则这一小段与 C 点之间的引力为

$$k\frac{m\frac{M}{l}dx}{x^2}=\frac{kmM}{l}\frac{dx}{x^2},$$

C A x x+dx B
O a a+l x

图 93

其中 k 是引力常数. 在 AB 上"相加"便得棒和质点之间的引力

$$F=\frac{kmM}{l}\int_a^{a+l}\frac{dx}{x^2}=\frac{kmM}{a(a+l)}.\quad \square$$

例 3 已知一公斤的力能使弹簧伸长 1 厘米，求使弹簧伸长 10 厘米所作之功.

解 弹簧在伸长过程中，力与伸长 x 成正比，即力 $F(x)=kx$. 由于 1 公斤的力能使弹簧伸长 1 厘米 $=0.01$ 米，所以

$$1\text{公斤}=k\times 0.01\text{米},$$

故得 $k=100$ 公斤/米. 因此，伸长 x 米所需力 $F(x)=100x$ 公斤. 设 dx 很小，则弹簧由 x 米伸长到 $x+dx$ 米所作之功为 $100xdx$ 公斤米. "相加"便得弹簧伸长 10 厘米所作之功

$$W=\int_0^{0.1}100xdx=0.5\text{公斤米}.$$

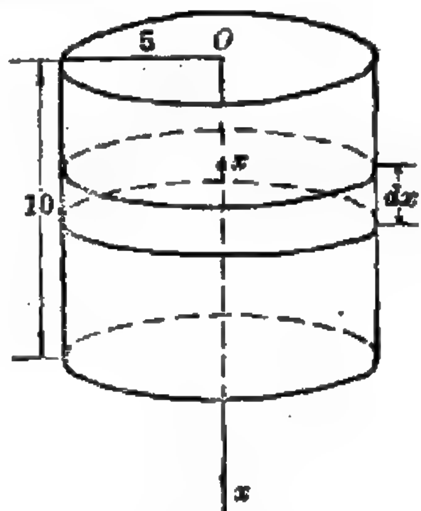


图 94

例 4 有一盛满水的底半径为 5 米，高为 10 米的圆柱形水桶，计算排完桶中之水所作的功.

解 如图 94 选取坐标系. 图中深为 x 米，厚为 dx 米的薄片体积为 $25\pi dx$ 米^3. 水的比重是 1 吨/米^3，因此薄片重为 $25\pi dx$ 吨. 这一薄片移到桶外所作之功是 $25\pi xdx$ 吨米，所以排完桶中水所作之功

$$W=25\pi\int_0^{10}xdx=1250\pi\text{吨米}\approx 3927\text{吨米}. \ \square$$

最后，我们再讨论一个物理问题——重心. 设有一水平细杆，表示为区间 $[a,b]$. 记 $m(x)$ 为一段杆子 $[a,x]$ 的质量，$a\leqslant x\leqslant b$. 假定 m 可导，则 $\rho=m'$ 就是杆子的线密度(第二章 § 1.2). 于是

$$\int_a^b\rho(x)dx=m(b),$$

这就是全杆的质量总和. 设密度 ρ 为已知，要计算杆子的重心位置. 为此，将杆子分成小段 $[x_i,x_i+\Delta x_i]$，$i=0,1,\cdots,n$，将每一小段 $[x_i,x_i+\Delta x_i]$ 近似地视为一个质点，坐标为 x_i，质量为 $\rho(x_i)\Delta x_i$，则得一质点系. 按 § 2.3(6)式，其重心位置是

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \rho(x_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i) \Delta x_i}$$

因此，杆子的重心位置

$$\bar{x} = \lim \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \rho(x_i) \Delta x_i}{\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i) \Delta x_i} = \frac{\int_a^b x \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx}.$$

即杆子的重心是坐标 x 关于密度 ρ 的（加权）积分平均值.

习 题

1. 质点作直线运动，已知速度 v，如何表达其由时刻 t_0 到 T 产生的位移？

2. 一物体以初速 1960（厘米/秒）垂直上抛，不计空气阻力，求物体到达的最大高度和回到地面的时间.

3. 一族细菌，其增长速度与总体大小成正比．如果一小时后总体增大一倍，问 2 小时后总体大小为何？

4. 一温度计从 75°F 的室内移至室外．5 分钟后降至 65°F，再过 5 分钟又降至 60°F．求室外温度.

5. 若空气中自由落体的速度为 v，则空气阻力为 kv，常数 k 随物体而异．设初速为 0，求速度 v 的变化规律，并说明当时间 t 很大时物体运动的近似状态.

6. 2 公斤的力能使弹簧伸长 1 厘米，问伸长 1 米时所作之功为何？

7. 每米重 2 公斤的链条前端系一重 150 公斤的物体，自高为 100 米的建筑物下垂 10 米．解下列问题：

(1) 链条下移至离地 10 米时，重力作功为何？

(2) 若链条全长为 60 米，物体下落至地面时重力作功为何？

8. 水滴自由落下，同时等速蒸发．假定其初始质量为 M，每秒蒸发的质

量为 m，蒸发完毕时重力作功为何？

9. 一金字塔的底为正方形，边长 200 米，高为 140 米. 所用石料的比重为 2.5 克/(厘米)^3. 建筑时克服重力作功为何？

10. 一比重为0.1，边长为 l 的正立方体浮于水面，将其全部压入水中所作之功为何？

11. 一长为 a 的细杆，表示为区间[0, a]，在点 x 处的线密度为 $\rho(x)=x$，$x\in[0, a]$. 求其重心位置. 再在与 $x=0$ 的一端垂直距离为 a 处置一单位质量的质点，求质点对杆子的引力.

第三节　广 义 积 分

§3.1　无穷积分

我们已经看到，在定积分的定义中，积分区间是有界的. §2.2 定理 1 又告诉我们，要函数可积，函数在积分区间上必须有界. 但在一些问题中，应用定积分时，还要求我们克服这些限制，将定积分概念加以推广，考虑无穷区间上的积分和无界函数的积分.

无穷区间上的积分叫做"无穷积分". 我们先看一个例子. 考虑曲线 $y=\frac{1}{x^2}(x\geqslant 1)$和直线 $x=1, y=0$ 围成的开口曲边梯形的"面积"(图 95). 从形式上看，这块"面积"应等于无穷积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}.$$

但到目前为止，我们尚未规定过这种积分的意义. 为了能合理地定义这种积分，我们先设法计算上述那块开口曲边梯形的"面积".

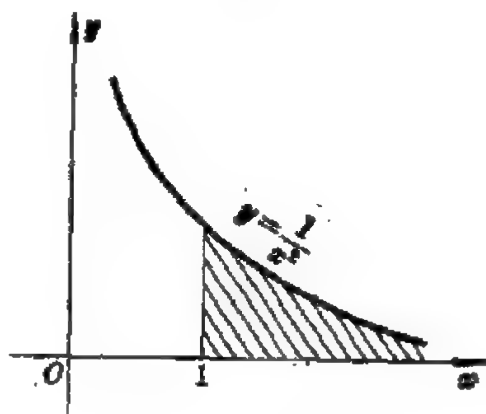


图 95

作直线 $x=b>1$. 夹在直线 $x=1$ 和 $x=b$ 之间的那块曲边梯形的面积等于

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = 1-\frac{1}{b}$$

(图 96). 当 $b\to+\infty$ 时这一面积的极限应可视为整个开口曲边梯形的"面积". 因此, 我们很自然地定义

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^2}=1.$$

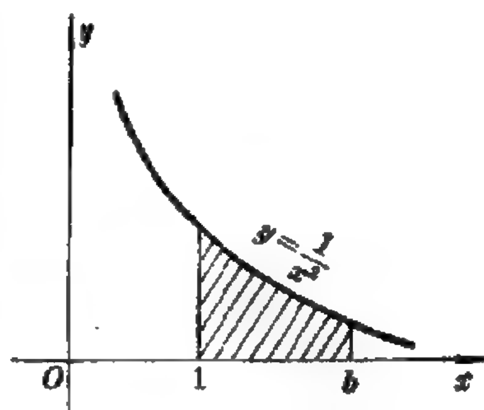


图 96

一般地, 我们定义如下:

定义 1 假定对于一切 $b>a$ 函数 f 在区间 $[a,b]$ 上都可积. 如果极限

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f$$

存在并且有限, 则说**无穷积分**

$$\int_a^{+\infty} f=\int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{1}$$

是**收敛**的, f 在无穷区间 $[a,+\infty)$ 上(广义)**可积**, 并把上述极限定义为这个无穷积分的值, 即

$$\int_a^{+\infty} f=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f.$$

反之, 则说无穷积分(1)是**发散**的. 同样定义无穷积分

$$\int_{-\infty}^b f=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f.$$

例 1 设 $a>0$. 证明积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散.

证明 当 $p>1$ 时 $1-p<0$, 所以

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-p}(b^{1-p}-a^{1-p})=-\frac{a^{1-p}}{1-p},$$

故积分收敛. 当 $p<1$ 时 $1-p>0$, 上一极限为 $+\infty$, 故积分发散.

当 $p=1$时，

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b\frac{dx}{x}=\lim_{b\to+\infty}(\ln b-\ln a)=+\infty,$$

故积分也发散. □

定义 2　设函数 f 在任何有界区间上可积，则定义无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f=\int_{-\infty}^{a}f+\int_{a}^{+\infty}f,$$

其中 a 是任意选择的. 如果右端的两个无穷积分都收敛，则说左端的无穷积分收敛，f 在 $R=(-\infty,\ +\infty)$上可积. 反之则说发散.

容易验证，定义 2 与 a 的选择是无关的.

§2.4 中的微积分基本公式对无穷积分也成立，叙述如下:

定理 1　设函数 f 在任何有界区间上可积，且有原函数 F. 则

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=F(+\infty)-F(a),$$

$$\int_{-\infty}^{a}f(x)dx=F(a)-F(-\infty),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=F(+\infty)-F(-\infty).$$

证明　定理结论都是显然的. 例如第一式:

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}f(x)dx&=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx\\&=\lim_{b\to+\infty}[F(b)-F(a)]=F(+\infty)-F(a).\ \Box\end{aligned}$$

容易明白，关于定积分的运算性质和计算方法也都可相应地推广到无穷积分. 这里就不一一细述.

例 2　计算积分$\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos x dx$.

解　分部积分得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = e^{-x}\sin x\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$$

$$= -e^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx.$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x dx = \frac{1}{2}. \quad \square$$

例 3 计算$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$.

解 令 $x=a\operatorname{tg}t$. 当 $x=0$ 时 $t=0$; 当 $x\to+\infty$ 时 $t\to\frac{\pi}{2}$. 所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\, dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{a^2}. \quad \square$$

上例本是一个无穷积分，经过换元变成了通常的定积分. 同样,通常的定积分经过换元也会变成无穷积分.

例 4 计算 Poisson 积分(参见 § 1.5 例 4)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx, \quad 0<r<1.$$

解 令 $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, 便得

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx = 2(1-r^2)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{(1-r)^2+(1+r)^2u^2}$$

$$= 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1+r}{1-r}u\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi. \quad \square$$

例 5 计算将质量为 m 的物体由距地心为 h 处移至无穷远处所作之功.

解 物体在距地心 x 处所受地球引力

$$F(x)=k\frac{mM}{x^2},$$

其中 k 为引力常数, M 为地球质量. 应用 § 2.2(5)式, 所求之功

$$W_h=\int_h^{+\infty}k\frac{mM}{x^2}dx=\frac{kmM}{h}.\qquad \square$$

例 6 将一物体由地面垂直向空中发射, 欲使物体脱离地球引力, 问初速 v_0 为何?

解 这是一个减速运动. 如果物体不会中途减速为 0, 则物体便能脱离地球引力. 如果物体无限制远离地球时, 速度的极限值 $v_\infty=0$, 则物体刚好能脱离地球引力. 如图 97 选取坐标系. 以 m 和 M 分别表示物体和地球的质量, k 为引力常数. 以 x 表示物体的位置坐标, 则物体的运动方程为

$$mx_t''=-k\frac{mM}{x^2}.\qquad (2)$$

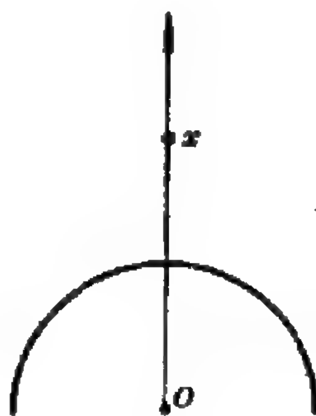


图 97

令 $v=x_t'=\frac{dx}{dt}$, 则

$$x_t''=v_t'=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}.$$

代入(2)式得

$$v\frac{dv}{dx}=-k\frac{M}{x^2}.$$

所以

$$vdv=-kM\frac{dx}{x^2}.$$

积分这个方程, 根据上面的解释应有

$$\int_{v_0}^{0}vdv=-kM\int_R^{+\infty}\frac{dx}{x^2},$$

其中 R 是地球半径. 因此得

$$v_0=\sqrt{\frac{2kM}{R}}.$$

由于重力加速度 $g=\frac{kM}{R^2}$，所以得

$$v_0=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\times980\times10^{-5}\times6371}\approx11.2\ 公里/秒.$$

这个速度，即物体刚好能脱离地球引力的速度，叫做“第二宇宙速度”.]

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) 积分 $\int_a^{+\infty}f$ 是什么意思？函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上可积是什么意思？

(2) 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f$ 是什么意思？函数 f 在 R 上可积是什么意思？

(3) 为什么说定义 2 与 a 的选择无关？

(4) 为什么换元法和分部积分法同样适用于无穷积分？

2. 计算下列无穷积分：

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$，$p>1$.

(2) $\int_0^{+\infty}e^{-\sqrt{x}}dx$.

(3) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$.

(4) $\int_0^{+\infty}x^5e^{-x^2}dx$.

(5) $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$，$a>0$.

(6) $\int_2^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1-x^2)^2}dx$.

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$. 提示：令 $x-\frac{1}{x}=t$.

(8) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x}$.

(9) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.

(10) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$.

(11) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.

(12) $\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$，$n\in N$.

(13) $\int_0^{+\infty}x^{2n+1}e^{-x^2}dx$，$n=0,1,\cdots$.

(14) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$，$n\in N$.

3. 证明：若积分 $\int_a^{+\infty}f$ 收敛，则 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_A^{+\infty}f=0$.

4. 设函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上非负，且在一切有界区间 $[a,b]$ 上可积，

证明积分$\int_a^{+\infty} f$或为收敛，或为$+\infty$.

5. 设函数f在区间$[a, +\infty)$上连续、非负，且$\int_a^{+\infty} f=0$，证明$f=0$.

6. 设函数f和g对一切$b>a$在$[a, b]$上可积，且$0\leqslant f\leqslant g$. 证明:

(1) $\int_a^{+\infty} f\leqslant\int_a^{+\infty} g$.

(2) 判别下列积分的敛散性:

a. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt[3]{x+1}}$.　　　　b. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$.

c. $\int_1^{+\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^7+1}}dx$.　　　　d. $\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^6+1}}dx$.

7. 设函数f在区间$[a, +\infty)$上单调、可积，证明当$x\to+\infty$时

$$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right).$$

8. 证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

提示：应用习题2(14)和§2.5习题2(26)及习题8以及不等式

$$1-x^2\leqslant e^{-x^2},\qquad 0\leqslant x\leqslant 1;$$

$$e^{-x^2}\leqslant\frac{1}{1+x^2},\qquad x\geqslant 0.$$

9. 有一无限长的均匀细棒，密度为ρ. 在距棒为a处置一单位质量的质点，计算棒对质点的引力.

§3.2 瑕积分

我们再来考虑无界函数的积分. 看一个具体例子. 积分

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

按通常定积分定义是没有意义的，因为它的被积函数无界：当$x\to 0^+$时$\frac{1}{\sqrt{x}}\to+\infty$. 但对一切$0<\varepsilon<1$，积分$\int_\varepsilon^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$是有意义的. 我们把$x=0$这样的点叫做积分(1)的“瑕点”，有瑕点的积分

叫做"瑕积分".

从形式上看,瑕积分(1)应能表示曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$和直线 $x=0$, $x=1$, $y=0$ 围成的开口曲边梯形的"面积"(图 98). 怎样计算这块"面积"呢? 我们先看曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$和直线 $x=\varepsilon$, $x=1$, $y=0$ 围成的面积(图 99):

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2(1-\sqrt{\varepsilon}),$$

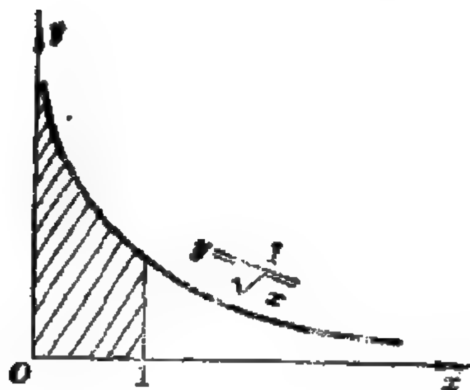


图 98

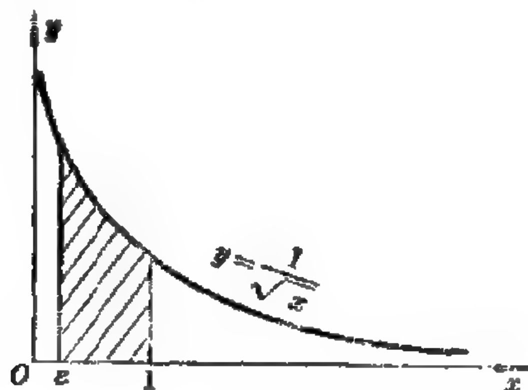


图 99

所以

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2.$$

这应就是我们要计算的"面积". 因此我们自然地定义

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

一般地, 我们定义如下:

定义 1 设函数 f 对一切 $\varepsilon>0$ 在区间$[a+\varepsilon, b]$上可积, 如果极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^{b}f \tag{2}$$

存在并且有限, 则称瑕积分

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx \tag{2}$$

收敛. f 在区间$[a,b]$上(广义)**可积**, 并把上述极限定义为瑕积分(2)的值, 即

$$\int_a^b f = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f.$$

反之, 则说瑕积分(2)**发散**. a 叫做瑕积分(2)的**瑕点**.

同样定义其它各种情况的瑕积分:

若函数 f 对一切 $\varepsilon>0$ 在区间$[a,b-\varepsilon]$上可积, 则定义瑕积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

这时 b 是积分的瑕点. 若函数 f 对一切 $\varepsilon>0$ 在区间$[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$上可积, 则定义瑕积分

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f, \tag{3}$$

其中 c 是$(a,\ b)$中任意一点. 这时当且只当右端两个瑕积分都收敛时, 左端的瑕积分才是收敛的.

注 上述定义 1 中, 如果 f 在$[a,b]$上是通常意义下可积的, 则易知瑕积分(2)就是通常的积分. 这时 a 并非瑕点, 而是"假"的瑕点.

显然, 和无穷积分一样, 微积分基本公式以及定积分的计算方法也都适用于瑕积分. 例如, 若 F 是 f 在$(a,b]$上的原函数, a 是瑕点, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a+0).$$

例 1 证明瑕积分$\int_0^a \frac{dx}{x^p}$当 $p<1$ 时收敛; 当 $p\geqslant 1$ 发散.

证明 $x=0$ 是瑕点. 当 $p\neq 1$ 时

$$\int_0^a \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_{0^+}^a.$$

若 $p<1$，则 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1-p} = 0$，所以

$$\int_0^a \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} a^{1-p},$$

积分收敛．若 $p>1$，则 $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1-p} = +\infty$，所以积分发散．当 $p=1$ 时

$$\int_0^a \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{0^+}^a = +\infty,$$

所以积分也发散．□

例 2　计算 $\int_0^1 \ln x dx$．

解　$x=0$ 是瑕点．用分部积分法，

$$\int_0^1 \ln x dx = x \ln x \Big|_{0^+}^1 - \int_0^1 dx = -1.\quad □$$

例 3　计算 $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}}$．

解　$x=1$ 是瑕点．分成两个瑕积分：

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} + \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

$$= -2(1-x)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{1-0} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} \Big|_{1+0}^2 = 4.\quad □$$

例 4　计算 $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$．

解　令 $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$ 即得所给积分等于 $2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$．□

这个例子把瑕积分变成了普通定积分．

无穷积分和瑕积分通称**广义积分**，而普通定积分则相对地称为"常义积分"．一个广义积分也可以是带瑕点的无穷积分，例如

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x e^x}}.$$

它既是无穷积分，又是瑕积分，0 是瑕点．这种广义积分的定义和计算当然已无须再述。

习　　题

1．何谓瑕积分？瑕点是什么意思？在定义 1 中，如果 f 在$[a,b]$上常义可积，则瑕积分(2)为何？

2．计算下列积分：

(1) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.　　(2) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

(3) $\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$.　　(4) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

(5) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.　　(6) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

(7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $ab \neq 0$.　　(8) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

(9) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} dx$.　　(10) $\int_0^1 \ln^n x dx$, $n \in N$.

(11) $\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{\sqrt{x}} dx$, $n \in N$.

3．应用§3.1习题 6 中的方法判别下列积分的敛散性：

(1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.　　(2) $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$.

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^{4/3}} dx$.　　(4) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x e^x}}$.

4．设 $\varphi(x) = -\int_0^x \ln\cos t\, dt$，$|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$．证明

$$\varphi(x) = -x\ln 2 + 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right);$$

并计算 $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)$，再计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx$.　　　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{ctg} x dx$.

(3) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

5. 有一直径为 1 米，高为 2 米的直立圆柱桶盛满了水．桶底有一个直径为 1 厘米的小孔．水从小孔流出的速度为$v=0.6\sqrt{2gh}$，h 是瞬时水深，g 为重力加速度，问水全部流完需时若何？

第四章　实数连续性·函数的连续性和可积性

第一节　实数连续性各等价命题

§1.1　确界

在第一章§1.1中我们讲了直线的连续性，并指出实数应有相应的连续性. 同一章§2.4 中又提出了实数连续性的一个等价命题——单调有界的数列收敛. 同时又指出，所谓实数连续性，表现为一连串等价命题，它们是分析学的基础. 现在我们要不依赖于直线，而从实数自身来发现这些命题.

定义 1　设有数集 A，如果有一数 M，对于一切 $x\in A$ 都有 $x\leqslant M$ $(x\geqslant M)$，则说 M 是 A 的一个**上界**(**下界**). 如果 A 既有上界又有下界，则说 A 为**有界**的.

显然，A 为有界当且只当有一数 M 使得对于一切 $x\in A$ 有 $|x|\leqslant M$.

例如，自然数集 N 有下界 1，无上界. 一切不大于 1 的数都是它的下界，1 是它的最大的下界. 区间$[0,\ 1)$显然是一个有界数集，1 是它的最小上界，0 是它的最大下界.

那么，是否一切有上界（下界）的数集都有最小上界(最大下界)呢？回答是肯定的. 这是实数连续性命题之一. 我们先建立一个极为重要的概念.

定义 2　数集 A 的最小上界(最大下界)叫做 A 的**上确界**(**下确界**)，记为 $\sup A$($\inf A$).

例如，

$$\inf N=1, \qquad \sup(0,1)=1;$$

$$\sup\left\{\sin x:\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}=1;$$

$$\sup\{\operatorname{arctg}x:\ x\in R\}=\frac{\pi}{2};$$

$$\inf\{\operatorname{arctg}x:\ x\in R\}=-\frac{\pi}{2};$$

$$\inf\left\{\frac{1}{n}:\ n\in N\right\}=0.$$

显然，若数集A中有最大(最小)的数a，则$a=\sup A(\inf A)$。

定理 1(实数连续性命题之一) 有上(下)界的非空数集有上(下)确界.

证明 设数集A非空有上界. 不失一般性，我们可以假定A中至少有一个正数. 考虑A中各数的整数部分，设最大的整数部分为a_0. 由于A有上界，这最大的整数部分显然是存在的. 又由于A中有正数，所以$a_0\geqslant 0$. 记

$$A_0=\{x\in A:\ [x]=a_0\},$$

其中$[x]$表示数x的整数部分，则$A_0\neq\varnothing$. 若$x\in A$而$x\overline{\in}A_0$，则$x<a_0$；若$x\in A_0$，则$a_0\leqslant x<a_0+1$. 再考虑A_0中各数的第一位小数，设最大的第一位小数为a_1. 记

$$A_1=\{x\in A_0:\ x\text{ 的第一位小数为 }a_1\},$$

则$A_1\neq\varnothing$. 若$x\in A_0$而$x\overline{\in}A_1$，则$x<a_0.a_1$；若$x\in A_1$，则$a_0.a_1\leqslant x<a_0.a_1+\frac{1}{10}$. 再考虑$A_1$中各数的第二位小数，设其最大者为$a_2$. 记

$$A_2=\{x\in A_1:\ x\text{ 的第二位小数为 }a_2\},$$

则$A_2\neq\varnothing$. 若$x\in A_1$而$x\overline{\in}A_2$，则$x<a_0.a_1a_2$；若$x\in A_2$，则$a_0.a_1a_2$

$\leqslant x < a_0.a_1a_2 + \frac{1}{10^2}$. 如此下去，我们便得一串非空数集

$$A \supset A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots;$$

同时又得一串有理数

$$a_0,\quad a_0.a_1,\quad a_0.a_1a_2,\quad a_0.a_1a_2a_3,\quad \cdots.$$

于是我们又得一数

$$a = a_0.a_1a_2\cdots = \lim_{n\to+\infty} a_0.a_1a_2\cdots a_n. \tag{1}$$

下面先证，a 是 A 的上界．事实上，若 $x\in A$ 而 $x\overline{\in} A_0$，则

$$x < a_0 \leqslant a.$$

若 $x\in A_n$ 而 $x\overline{\in} A_{n+1}$ 对某一个 $n=0, 1, 2, \cdots$成立，则

$$x < a_0.a_1\cdots a_{n+1} \leqslant a.$$

若 $x\in A_n$ 对一切 $n=0, 1, 2, \cdots$成立，则

$$a_0.a_1\cdots a_n \leqslant x < a_0.a_1\cdots a_n + \frac{1}{10^n},\quad n=0, 1, 2, \cdots,$$

令 $n\to+\infty$，由(1)式得

$$x = a.$$

所以 a 是 A 的上界．

再证 $a=\sup A$. 事实上，任取 $b<a$. 由(1)式，则有自然数 n_0，

$$b < a_0.a_1\cdots a_{n_0} \leqslant a.$$

因此当 $x\in A_{n_0}$(它是非空的)时，

$$x \geqslant a_0.a_1\cdots a_{n_0} > b.$$

所以 b 不是 A 的上界．而 b 是任意的，所以 a 是 A 的最小上界．□

我们注意到，这一命题的证明是不依赖于直线连续性的．

为方便起见，我们补充下述定义：

定义 3 如果非空数集 A 无上界(下界)，则定义 A 的上确界(下确界)为$+\infty(-\infty)$：$\sup A=+\infty(\inf A=-\infty)$．

例如，

$$\sup N=+\infty,\ \inf\left\{\operatorname{tg}x:x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\right\}=-\infty.$$

这样，一切非空数集都有上确界和下确界．有上界(下界)的数集有有限的上确界(下确界).

设 f 是一函数，我们也常常把数集 $f(A)$ 的上、下确界分别记为 $\sup\limits_{x\in A}f(x)$ 和 $\inf\limits_{x\in A}f(x)$:

$$\sup_{x\in A}f(x)=\sup f(A)=\sup\{f(x):x\in A\},$$

$$\inf_{x\in A}f(x)=\inf f(A)=\inf\{f(x):x\in A\}.$$

它们分别叫做函数 f 在集合 A 上的上确界和下确界.

定理 2 设函数 f 和 g 在集合 A 上有定义，c 是常数．则

1° 下面二式当两头有意义时成立:

$$\inf_{x\in A}f(x)+\inf_{x\in A}g(x)\leqslant\inf_{x\in A}(f+g)(x)\leqslant\inf_{x\in A}f(x)+\sup_{x\in A}g(x);$$

$$\inf_{x\in A}f(x)+\sup_{x\in A}g(x)\leqslant\sup_{x\in A}(f+g)(x)\leqslant\sup_{x\in A}f(x)+\sup_{x\in A}g(x).$$

2° $\inf\limits_{x\in A}[f(x)+c]=\inf\limits_{x\in A}f(x)+c;$

$\sup\limits_{x\in A}[f(x)+c]=\sup\limits_{x\in A}f(x)+c.$

3° $\inf\limits_{x\in A}(-f)(x)=-\sup\limits_{x\in A}f(x);$

$\sup\limits_{x\in A}(-f)(x)=-\inf\limits_{x\in A}f(x).$

4° 若 f 和 g 在 A 上非负，则下面二式当两头有意义时成立:

$$\inf_{x\in A}f(x)\cdot\inf_{x\in A}g(x)\leqslant\inf_{x\in A}(fg)(x)\leqslant\inf_{x\in A}f(x)\cdot\sup_{x\in A}g(x);$$

$$\inf_{x\in A}f(x)\cdot\sup_{x\in A}g(x)\leqslant\sup_{x\in A}(fg)(x)\leqslant\sup_{x\in A}f(x)\cdot\sup_{x\in A}g(x).$$

5° 若 $c\geqslant0$，则

$\inf\limits_{x\in A}(cf)(x)=c\inf\limits_{x\in A}f(x);$

$\sup\limits_{x\in A}(cf)(x)=c\sup\limits_{x\in A}f(x).$

证明 在证明以前我们先要作一说明．由定义 3 知道，确界可以取$\pm\infty$，因此在 1° 的某端可能会出现$+\infty-\infty$，这就没有意义，这时 1° 自然不成立．同样在 4° 的某端可能会出现 $0\cdot(\pm\infty)$，这也是无意义的，这时 4° 自然也不成立．除此以外，1° 和 4° 都是成立的，但必须认为 $+\infty+(+\infty)=+\infty$，$-\infty+(-\infty)=-\infty$，$a+(\pm\infty)=\pm\infty$；当$a>0$时$a\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$，当$a<0$ 时 $a\cdot(\pm\infty)=\mp\infty$．在本书中，除涉及确界的四则运算外，概不谈$\infty$的四则运算．下面我们来证明本定理．对于各款只证一个式子．

1° 我们证明 1° 的第二式．显然，对于一切 $x\in A$有

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\leqslant\sup_{x\in A}f(x)+\sup_{x\in A}g(x),$$

所以

$$\sup_{x\in A}(f+g)(x)\leqslant\sup_{x\in A}f(x)+\sup_{x\in A}g(x).$$

另一方面，任取 $y<\sup\limits_{x\in A}g(x)$(注意$-\infty<\sup\limits_{x\in A}g(x)\leqslant+\infty$)，则 y 不是 $g(A)$的上界，因此存在 $x_0\in A$使 $y<g(x_0)$．于是

$$\inf_{x\in A}f(x)+y<f(x_0)+g(x_0)\leqslant\sup_{x\in A}(f+g)(x).$$

由于 y 是任意的，令 $y\to\sup\limits_{x\in A}g(x)$即得

$$\inf_{x\in A}f(x)+\sup_{x\in A}g(x)\leqslant\sup_{x\in A}(f+g)(x).$$

结合前面的不等式，1° 的第二式即可得证．

2° 在 1° 的第一式中令 $g=c$ 即得 2° 的第一式．

3° 当 $x\in A$ 时 $f(x)\leqslant\sup\limits_{x\in A}f(x)$，故$-f(x)\geqslant-\sup\limits_{x\in A}f(x)$，所以

$$\inf_{x\in A}(-f)(x)\geqslant-\sup_{x\in A}f(x).$$

另一方面，任取 $y>-\sup\limits_{x\in A}f(x)$，则$-y<\sup\limits_{x\in A}f(x)$．因此存在 $x\in A$ 使$-y<f(x)$．于是

$$y>-f(x)\geqslant\inf_{x\in A}(-f(x)).$$

令 $y\to -\sup\limits_{x\in A}f(x)$即得

$$-\sup_{x\in A}f(x)\geqslant\inf_{x\in A}(-f)(x).$$

和前面不等式比较就证明了 3° 的第一式.

4° 该款的证明同 1°. 5° 的证明与 3° 相似(习题 3). □

例 1 求数列$\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$的上确界.

解 由定理 2 的 2°,

$$\sup_{n\in N}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1+\sup_{n\in N}\left(-\frac{1}{n}\right)=1-\inf_{n\in N}\frac{1}{n}=1.$$

事实上, 数列$\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$非减, 极限为 1, 从而易知 1 是它的上确界. □

例 2 求函数sin + arctg在 R 上的上确界.

解 对于一切 $x\in R$ 有

$$\sin x+\operatorname{arctg}x<1+\frac{\pi}{2},$$

所以 $1+\dfrac{\pi}{2}$是函数的一个上界. 另一方面,

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi+\operatorname{arctg}\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]=1+\frac{\pi}{2},$$

从而易知 $1+\dfrac{\pi}{2}$是最小的上界. 故所求上确界是$1+\dfrac{\pi}{2}$. □

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 何谓数集的上(下)确界?

(2) 有界数集是否都有最大(最小)的数? 数集的最大(最小)数与确界有何关系?

(3) 确界反映的实数连续性命题是什么?

(4) 我们对确界的概念又作了怎样的推广？确界的概念经推广以后，任何非空数集是否都有确界？

(5) 用确界如何表达一个数集有上(下)界和无上(下)界？

(6) 若 a 是数集 A 的上(下)确界，则 a 与 A 中的数有何关系？

(7) 若 a 是数集 A 的确界，则 A 中是否有单调数列 $x_n\to a$？反之，若 a 是 A 的上(下)界，且 A 中有数列 $x_n\to a$，则 a 是否一定是 A 的上(下)确界？

(8) 若函数 f 在区间 I 上连续，则 f 在 I 上的上、下确界为何？

(9) 函数确界在运算上有哪些基本性质？

2. 指出下列数集的确界，并指出确界是否是最大或最小数：

(1) $\{-1, 3, 8, 9, 20\}$.

(2) $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

(3) $\{$有理数 x: $x^2<3\}$.

(4) $\left\{x:\ \sin\frac{\pi}{x}=0, x>0\right\}$.

(5) $\{x:\ \ln x<0\}$.

(6) $\{x:\ \operatorname{tg}x>1\}$.

(7) $\{x:\ |\ln x|<1\}$.

(8) $\{x:\ x^2-2x-3<0\}$.

(9) $\left\{\sin\frac{\pi}{n}:\ n\in N\right\}$.

(10) $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n:\ n\in N\right\}$.

(11) $\{\sqrt[n]{n}:\ n\in N\}$.

(12) $\{\arcsin x: 0<x<1\}$.

(13) $\{e^x:\ x\in R\}$.

(14) $\left\{x:\ x<\frac{1}{n},\ n\in N\right\}$.

(15) $\left\{x:\ x>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n\in N\right\}$.

3. 证明定理 2 的 4° 和 5°.

4. 证明实数连续性命题之一(定理 1)与下述命题等价：(实数的连通性)若将全体实数 R 分成两个非空数集 A 和 B，则或者 A 中有数列收敛于 B 中的数，或者 B 中有数列收敛于 A 中的数.

5. 设函数 f 在集合 A 上有界，证明

$$\sup_{x,y\in A}|f(x)-f(y)|=\sup_{x\in A}f(x)-\inf_{x\in A}f(x).$$

6. 设函数 f 在一点 x 附近有定义，$I_x=(x-r, x+r)$. 记

$$\omega_f(x, r)=\sup f(I_x)-\inf f(I_x),$$

$$\omega_f(x)=\lim_{r\to 0}\omega_f(x, r).$$

$\omega_f(x)$ 叫做 f 在点 x 上的"振幅". 证明 f 在 x 连续的充分必要条件是 $\omega_f(x)=0$.

7. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续. 记

$$m(x)=\inf_{a\leqslant t\leqslant x} f(t),\quad M(x)=\sup_{a\leqslant t\leqslant x} f(t),\quad x\in[a,b].$$

证明 m 和 M 也在 $[a,b]$ 上连续.

8. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有界. 记

$$m(x)=\inf_{a\leqslant t<x} f(t),\qquad M(x)=\sup_{a\leqslant t<x} f(t),\qquad x\in[a,b].$$

证明 m 和 M 在 $[a,b]$ 上左连续.

9. 设函数 f 在 R 上二次可导, 且 $M_k=\sup\limits_{x\in R}|f^{(k)}(x)|<+\infty$, $k=0,1,2$. 证明

$$2M_1^2\leqslant M_0M_2.$$

提示: 应用第二章 §2.1 习题 25.

§1.2 有界闭区间的紧致性和列紧性

在第一章 §2.4 中, 我们已经指出单调有界数列收敛, 但未证明; 现在我们可以由 §1.1 定理 1 来证明这个命题. 这是极为简单的.

定理 1 (实数连续性命题之二) 单调有界数列收敛.

证明 设数列 (a_n) 非减有上界, 对于非增有下界情形证明类似. 由 §1.1 定理 1, 它有有限的上确界

$$a=\sup_{n\in N} a_n<+\infty.$$

任给 $\varepsilon>0$, 则 $a-\varepsilon<a$, 故 $a-\varepsilon$ 不是 (a_n) 的上界. 因此有自然数 n_ε 使 $a_{n_\varepsilon}>a-\varepsilon$. 而 (a_n) 非减, 所以当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$a-\varepsilon<a_{n_\varepsilon}\leqslant a_n\leqslant a.$$

所以

$$\lim a_n=a<+\infty.$$

故 (a_n) 收敛. □

定理 2 单调数列有极限. 若 (a_n) 非减, 则

$$\lim a_n=\sup_{n\in N} a_n;$$

若(a_n)非增，则

$$\lim a_n=\inf_{n\in N} a_n.$$

证明 我们只证(a_n)非减的情形. 若(a_n)有上界，则由定理 1 的证明可知此定理成立. 若(a_n)无上界，由 § 1.1定义 3，$\sup_{n\in N} a_n = +\infty$. 再由第一章 § 2.4定理 2，

$$\lim a_n=+\infty=\sup_{n\in N} a_n. \quad \square$$

定理 3（实数连续性命题之三，区间套原理，G. Cantor）设有"非增"的闭区间序列:

$$[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots,$$

如果其长度趋向于 0：

$$\lim(b_n-a_n)=0, \tag{1}$$

则此区间序列有唯一的公共点.

证明 由假设，我们得到两个单调有界数列:

$$b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant a_1,$$

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant b_1.$$

由定理 1，数列(a_n)和(b_n)都收敛. 又由假设，

$$\lim b_n-\lim a_n=\lim(b_n-a_n)=0,$$

即(a_n)和(b_n)收敛于同一数，记为 x_0. 则由定理 2，

$$\sup_{n\in N} a_n=x_0=\inf_{n\in N} b_n.$$

所以

$$a_n\leqslant x_0\leqslant b_n$$

对一切 $n\in N$ 成立，因此 x_0 是区间序列$[a_n, b_n]$($n\in N$) 的公共点.

如果这个区间序列又有公共点 x_1，则

$$|x_0-x_1|\leqslant b_n-a_n$$

对一切 $n\in N$ 成立. 在此式中令 $n\to+\infty$，由(1)式即知 $x_1=x_0$. 所以 x_0 是唯一的公共点. $\square$

注 定理 3 对于开的或半开半闭的区间序列显然不成立. 还应特别注意到, 这一实数连续性命题是直接与第一章 § 1.1 中提出的直线连续性相一致的. 实数既能正好舗满整个直线, 理应有这一连续性, 否则也就不能舗满整个直线了. 实数之所以能舗满直线, 正是因为它具备这种连续性.

定理 4 (实数连续性命题之四, 有界闭区间 $[a, b]$ 的紧致性, Heine-Borel) 设 $\mathscr{S}$ 是一个由一组开区间所成的"集合族". 如果 $\mathscr{S}$ 能覆盖有界闭区间 $[a, b]$, 就是说, 对于每一个 $x\in[a, b]$, 一定存在一个开区间 $I\in\mathscr{S}$ 使 $x\in I$, 则在 $\mathscr{S}$ 中必有有限个开区间 $\{I_1, \cdots, I_n\}$ 同样覆盖住 $[a, b]$.

证明 (反证)假设区间 $[a, b]$ 不能被 $\mathscr{S}$ 中有限多个区间覆盖. 将 $[a, b]$ 等分为两个闭区间 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, 则此两个区间中必有一个不能被 $\mathscr{S}$ 中有限多个区间覆盖, 记此区间为 $[a_1, b_1]$. 再将 $[a_1, b_1]$ 等分为二, 二者又必有一不能被 $\mathscr{S}$ 中有限多个区间覆盖, 记此区间为 $[a_2, b_2]$. 如此下去, 我们便得一非增区间序列

$$[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots, \tag{2}$$

其中每一个都不能被 $\mathscr{S}$ 中有限多个区间覆盖, 且长度

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0.$$

因此, 由定理 3, 区间序列(2)有唯一的公共点 $x_0\in[a, b]$. 由于 $\mathscr{S}$ 能覆盖 $[a, b]$, 故必有一个区间 $I_0\in\mathscr{S}$ 使 $x_0\in I_0$. 但 I_0 是开的, 显然, 当 n 充分大时应有

$$x_0\in[a_n, b_n]\subset I_0.$$

于是区间 $[a_n, b_n]$ 被 $\mathscr{S}$ 中的一个(当然是有限多个)区间 I_0 覆盖. 这就产生矛盾. □

注 定理 4 对于不闭的区间和无穷区间都是不成立的. 例如, 开区间序列

$$\mathscr{I}=\left\{\left(\frac{1}{n},1\right):\quad n=2,3,\cdots\right\}$$

覆盖了区间$(0,1)$，显然，$\mathscr{I}$中不存在有限个区间覆盖$(0,1)$.

定理 5（实数连续性命题之五，有界闭区间$[a,b]$的列紧性，Bolzano-Weierstrass） 有界数列有收敛子列.

证明 设数列(a_n)有界：$a\leqslant a_n\leqslant b(n\in N)$.（反证）假设$(a_n)$无收敛子列．则对于每一个$x\in[a,b]$，在$(a_n)$中一定没有收敛于$x$的子列，因此必存在一个开区间$I_x$，$x\in I_x$，在$I_x$中最多只有$(a_n)$的有限多项．这样我们便得一由无穷多个开区间所成之集合族

$$\mathscr{I}=\{I_x:\quad x\in[a,b]\}.$$

显然，$\mathscr{I}$覆盖住$[a,b]$．由定理 4，$\mathscr{I}$中有有限个区间$\{I_{x_1},\cdots,I_{x_n}\}$覆盖住$[a,b]$，因此也覆盖住数列$(a_n)$．但是每一个$I_{x_i}$至多只含$(a_n)$的有限多项，因此$\{I_{x_1},\cdots,I_{x_n}\}$至多只能覆盖$(a_n)$的有限多项，不能覆盖住整个数列$(a_n)$．这是矛盾．□

注 定理 5 对于无界数列当然不能成立．因此，在各种形式的区间中，有界闭区间$[a,b]$具有这样的性质：$[a,b]$中的任何数列有收敛子列，并且（显然）此收敛子列的极限仍在$[a,b]$之中．这样的性质叫做$[a,b]$的"列紧性".

习 题

1．回答下列问题：

(1) 哪一个实数连续性命题是直接与直线连续性相一致的？

(2) 区间套原理对非闭区间的序列能否成立？在定理 3 中，如果没有条件$\lim(b_n-a_n)=0$，则结论如何？

(3) 何谓有界闭区间$[a,b]$的紧致性？非闭区间和无穷区间有没有紧致性？在定理 4 中，如果$\mathscr{I}$内边的区间非开，则结论能否成立？

(4) 何谓有界闭区间$[a,b]$的列紧性？是否一切数列都有收敛子列？

2．设$a_n\in[a,b](n\in N)$．如果(a_n)发散，则(a_n)必有两个子列收敛于不同

的数.

3. 试用有界闭区间的紧致性证明实数的连通性(§1.1 习题 4).

4. 试用区间套原理证明有界闭区间的列紧性.

5. 设开区间族 $\mathscr{I}$ 覆盖有界闭区间 $[a, b]$, 证明必有一数 $\lambda>0$, 当 $A\subset[a, b]$, 且 A 的"直径"

$$d(A)=\sup\{|x-y|:\ x, y\in A\}<\lambda$$

时, 则有 $\mathscr{I}$ 中的区间 $I\supset A$. λ 叫做 $\mathscr{I}$ 的一个"Lebesgue 数".

6. 设数 t_1 和 t_2 之比是一无理数. 证明: 若有界数列 (x_n) 使 $(e^{it_1x_n})$ 和 $(e^{it_2x_n})$ 都收敛, 则 (x_n) 也收敛. 其中 $i=\sqrt{-1}$, $e^{ix}=\cos x+i\sin x$.

§1.3 R 的完备性·实数公理

直到现在为止, 我们只讲了单调有界数列是收敛的. 下面再讲一个关于数列收敛的充分必要条件. 其充分性也是一个实数连续性命题.

定义 1 设有数列 (a_n). 如果对于每一个正数 ε, 都相应有自然数 n_ε, 当 $m, n>n_\varepsilon$ 时

$$|a_m-a_n|<\varepsilon,$$

则称 (a_n) 为一个 Cauchy 数列或基本数列.

注 在此定义中, 由于自然数 m 和 n 一般说来不相等, 不妨设 $m>n$, 则 $m=n+p$, $p\in N$. 因此定义 1 又可表述为: (a_n) 为 Cauchy 序列, 就是任给 $\varepsilon>0$, 存在自然数 n_ε, 当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$$

对一切 $p\in N$ 成立.

特别, 如果

$$|a_{n+p}-a_n|\leqslant\alpha_n \tag{1}$$

对一切 $n, p\in N$ 成立, 且 $\alpha_n\to0$, 则 (a_n) 显然是一 Cauchy 数列. 但要注意, 在(1)式中 α_n 只依赖于 n, 不依赖于 p.

例 1 证明 $a_n=\dfrac{1}{n}$ $(n\in N)$ 是 Cauchy 数列.

证明 因为

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}$$

对一切 $n, p\in N$ 成立，而$\frac{1}{n}\to 0$ 故得证。□

例 2 证明 $a_n=(-1)^n$ $(n\in N)$不是 Cauchy 数列。

证明 因为

$$|a_{n+p}-a_n|=|(-1)^{n+p}-(-1)^n|=1-(-1)^p$$

$$=\begin{cases}0, & p=2, 4, \cdots,\\ 2, & p=1, 3, \cdots.\end{cases}$$

显然，只要取 $\varepsilon=1$，就不存在符合定义所要求的 n_ε。□

例 3 设

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha},\quad n\in N.$$

证明数列(a_n)当 $\alpha\geqslant 2$ 时是 Cauchy 数列，当 $\alpha\leqslant 1$ 时不是 Cauchy 数列。

证明 当 $\alpha\geqslant 2$ 时

$$\begin{aligned}|a_{n+p}-a_n|&=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}\\&\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\\&\leqslant\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\\&\quad+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}\\&=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)\\&=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}\end{aligned}$$

对一切 $n,p\in N$ 成立，而 $\frac{1}{n}\to 0$，所以 (a_n) 当 $\alpha\geqslant 2$ 时是 Cauchy 数列.

当 $\alpha\leqslant 1$ 时

$$|a_{n+p}-a_n|=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^\alpha}$$

$$\geqslant\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}\geqslant\frac{p}{n+p}.$$

特别取 $p=n$ 得

$$|a_{2n}-a_n|\geqslant\frac{1}{2}.$$

显然，取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 就不存在符合定义所要求的 n_ε，所以 (a_n) 当 $\alpha\leqslant 1$ 时不是 Cauchy 数列.

定理 I 数列 (a_n) 收敛的充分必要条件为 (a_n) 是一 Cauchy 数列.

证明 （必要性） 设 (a_n) 收敛于 a. 这就是说任给 $\varepsilon>0$，则有自然数 n_ε，当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，当 $n,m>n_\varepsilon$ 时

$$|a_m-a_n|\leqslant|a_m-a|+|a-a_n|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以 (a_n) 是 Cauchy 数列.

（充分性）（实数连续性命题之六，R 的完备性，A. Cauchy）设 (a_n) 是一 Cauchy 数列，要证 (a_n) 收敛. 先证 (a_n) 有界. 取 $\varepsilon=1$，由定义有自然数 n_1，当 $m,n>n_1$ 时

$$|a_m-a_n|<1.$$

所以当 $n>n_1$ 时

$$|a_{n_1+1}-a_n|<1,$$

于是

$$|a_n|<|a_{n_1+1}|+1.$$

因此对一切 $n\in N$ 有

$$|a_n|\leqslant\max(|a_1|,\cdots,|a_{n_1}|,|a_{n_1+1}|+1),$$

即(a_n)有界.

既然(a_n)有界，由 §1.2 定理 5，(a_n)有收敛子列(a_{n_k}). 设$a_{n_k}\to a$. 亦即任给 $\varepsilon>0$，则有自然数 k_ε，当 $k>k_\varepsilon$ 时

$$|a_{n_k}-a|<\varepsilon/2.$$

又因(a_n)是 Cauchy 数列，故又有自然数 n_ε，当 $m,n>n_\varepsilon$ 时

$$|a_m-a_n|<\varepsilon/2.$$

任取一自然数 $k>\max(k_\varepsilon,n_\varepsilon)$，则 $n_k\geqslant k>n_\varepsilon$. 于是当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$|a_n-a|\leqslant|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-a|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以(a_n)收敛. □

例如，由定理 1 和例 3 知道，数列

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha},\quad n\in N,$$

当 $\alpha\leqslant1$ 时发散，当$\alpha\geqslant2$ 时收敛.

以上我们共讲了六个实数连续性命题. 我们证明的路线是:

命题之一⇒之二⇒…⇒之六.

要知道这些命题是等价的，只须再证明:

命题之六⇒之一.

定理 2 实数连续性的六个命题是等价的.

证明 只须证: R的完备性⇒有上(下)界的非空数集有上(下)确界.

设数集 A 有上界M(对于有下界的情形证明类似). 若$M\in A$，则显然$M=\sup A$. 因此设 $M\notin A$. 在 A 中任取一数 m，则闭区间$[m,$

$M]$有 A 中之数. 将$[m,M]$等分为二: $\left[m,\ \frac{m+M}{2}\right]$, $\left[\frac{m+M}{2}, M\right]$. 若$\left[\frac{m+M}{2}, M\right]$有 A 中之数, 取 $a_1=\frac{m+M}{2}$, $b_1=M$; 反之取 $a_1=m$, $b_1=\frac{m+M}{2}$. 则 b_1 是 A 的上界, $[a_1,b_1]$有 A 中之数. 再将$[a_1, b_1]$等分为二: $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. 若$\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ 有 A 中之数, 取 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, $b_2=b_1$; 反之, 取 $a_2=a_1$, $b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$. 则b_2是 A 的上界, $[a_2,\ b_2]$有 A 中之数. 如此下去, 得两个数列(a_n)和(b_n):

1. b_n $(n\in N)$都有 A 的上界;
2. $[a_n, b_n]$ $(n\in N)$都有 A 中之数;
3. $b_n-a_n=\frac{M-m}{2^n}$, $n\in N$;
4. $|a_n-a_{n+1}|\leqslant\frac{M-m}{2^{n+1}}$, $|b_n-b_{n+1}|\leqslant\frac{M-m}{2^{n+1}}$, $n\in N$.

(a_n)和(b_n)都是基本数列. 事实上

$$\begin{aligned}|a_n-a_{n+p}|&\leqslant|a_n-a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p-1}-a_{n+p}|\\&\leqslant\frac{M-m}{2^{n+1}}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)\\&=\frac{M-m}{2^n}\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\\&<\frac{M-m}{2^n}\to 0\qquad(n\to+\infty).\end{aligned}$$

对(b_n)也推得上述结果.

已知 R 是完备的, 因此(a_n)和(b_n)都收敛. 由 3 知, (a_n) 和 (b_n) 都收敛于同一数 a. 又由 1 可知, a 是 A 的上界. 因此区间$(a, b_n]$$(n\in N)$皆无 A 中之数. 根据 2, 区间$[a_n,\ a]$$(n\in N)$都有 A

中之数．而 $a_n \to a$，故知 a 是 A 的上确界．$\square$

我们一再指出，上述各等价命题是分析学的基础．分析学中的许多重要命题都是依据它们得到证明的．特别是完备性定理，它对分析学的发展起着重要的作用．

我们在第一章伊始就构造了无尽小数，叫做实数．现在我们已从实数自身发现了它的各种形式的连续性．其中连续性命题之三是直接与直线连续性相一致的．由于等价性，我们又可以说，实数的连续性命题都是与直线连续性相一致的．因此，不管用什么方法构造实数，它都必须具备连续性，否则它就不能完全地反映直线．

实数除了连续性以外，还有其它已为大家熟知的性质，这就是我们并未论及的四则运算和大小关系．由于无尽小数太不简洁，讨论起来比较麻烦，因而没有进一步去研究．19世纪一些数学家，不用无尽小数的办法而用其它方法来表示实数．这些方法虽无实用价值，但便于讨论实数的基本性质．在致力构造实数的基础上，人们的思想又有了新的发展，他们对实数的性质作一些归纳，反过来用归纳出来的性质定义实数，把全体实数所成的"实数空间" R 定义为具有某些性质的集合．即所谓公理化方法．下面就是实数的公理化定义．

所谓实数，其全体构成"实数空间" R，是具有下列性质的任一集合：

1） R 是一个"域"．意思是说，对 R 中的元素可以作四则运算．也就是说，首先有加法和乘法，并且满足：

1° 若 $a, b \in R$，则 $a+b \in R, ab \in R$．且有

$$a+b=b+a, \quad ab=ba; \qquad \text{（交换律）}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c), \quad (ab)c=a(bc); \qquad \text{（结合律）}$$

$$a(b+c)=ab+ac. \qquad \text{（分配律）}$$

2° R中有一个元素“0”，对一切$a\in R$有$a+0=0$；又有一个元素“1”，对一切$a\in R$有$1a=a$.

3° 对R中每一个元素a，相应有一个元素（记为）$-a$使得$a+(-a)=0$. 如果$a\neq 0$，则又相应有一个元素（记为）a^{-1}使得$aa^{-1}=1$.

设$a,b\in R$. 则减法就是$a-b=a+(-b)$. 如果$b\neq 0$，则除法就是$\frac{a}{b}=ab^{-1}$. 这样在R中就有了全部四则运算.

2) R是一个“序域”. 意思是说，R除满足1)外，它分为三个互不相交的部分：第一个部分记做P，其中的元素叫做“正数”. 第二个部分只有一个元素“0”. 第三个部分是

$$-P=\{x:\ -x\in P\},$$

其中的元素叫做“负数”. 但要求P满足条件：

$$a,b\in P\Rightarrow a+b\in P,\ ab\in P. \tag{2}$$

这样，我们就可以在R中定义大小次序：如果$a-b\in P$，则说$a>b$. 特别，若$x\in P$，则$x>0$；反之亦然. 有了正、负数以后，于是就可以定义“绝对值”：

$$|x|=\begin{cases} x, & 若\ x\in P, \\ 0, & 若\ x=0, \\ -x, & 若\ x\in -P. \end{cases}$$

对一切$x\neq 0$，我们有$x^2=xx>0$. 事实上，如果$x\in P$，则由P所满足的条件(2)式，$x^2=xx\in P$. 如果$x\in -P$，则同样由(2)式，$x^2=xx=(-x)(-x)\in P$. 特别$1=1^2>0$. 我们记

$$1,\ 1+1=2,\ 1+1+1=3,\ \cdots$$

叫做“自然数”，它们全体记为N.

3) R是一个“Archimedes序域”. 意思是说，R除满足条件1)和2)以外，还满足：

$$a \in P, b \in R \Rightarrow \text{存在 } n \in N \text{ 使 } na > b. \tag{3}$$

这个条件的作用在于，如果$a<b$，则可证明一定存在"有理数" $\frac{p}{q}$ (p, q 为整数，$q \neq 0$) 使 $a<\frac{p}{q}<b$. 就是说，任意两个"实数"之间均有有理数. 由于我们只要求知道实数公理的大意，对此不作详细证明.

4) R 有连续性. 就是说，R除了满足1), 2)和3)以外，还要求连续性命题成立. 一般要求R有完备性，即 Cauchy 数列收敛. 由于等价性，自然其余的连续性命题也都成立.

以上四条叫做实数公理，实数是由这四条公理定义的. 实数的一切性质，都可以从这四条公理推导出来. 这四条公理可以综合为一句话:

实数公理 "实数空间" R 是一个完备的 Archimedes 序域.

任意一个集合 R，只要满足这一实数公理，则R是一实数空间，其中的元素就是"实数". 前面我们讨论的无尽小数，可以证明它满足实数公理，所以无尽小数是实数公理的一个具体实现. 实数公理还有其它较为容易的实现方法，那就是十九世纪数学家构造实数所用的方法. 这就是具体构造一个集合，使之满足实数公理；也就是实现实数公理；亦即证明实数公理是可以实现的. 我们在数学理论中应用实数，就是应用由实数公理产生的实数性质.

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 何谓实数的完备性?

(2) 若$|a_{n+p}-a_n| \leqslant \frac{p}{n^2}$对一切 n, $p \in N$ 成立. 则(a_n)是不是一 Cauchy 数列?

(3) 为什么实数的六个"连续性命题"可以统称为实数的"连续性"?

(4) 什么样的区间也有完备性?

(5) 实数的公理化定义为何?

(6) 在实数的公理化定义中,实数的次序关系是怎样定义的?自然数和有理数又是怎样定义的?

(7) 你能否从所给实数公理出发,证明两个实数之间一定有有理数?

(8) 实数公理是否可以实现?在实用中是用什么实现实数公理的?

2. 证明下列数列收敛:

(1) $a_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n (n \in N)$, 其中$(a_k)$是一有界数列, $|q|<1$.

(2) $a_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$, $n \in N$.

(3) $a_n = 1 + \frac{\sin x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{n^2}$, $n \in N$, $x \in R$.

(4) $a_n = \frac{\sin 2x}{2(2+\sin 2x)} + \frac{\sin 3x}{3(3+\sin 3x)} + \cdots + \frac{\sin nx}{n(n+\sin nx)}$, $n \in N$, $x \in R$.

3. 证明: 若数列$(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)_{n=1}^{\infty}$收敛,则数列$(a_1+a_2+\cdots+a_n)$也收敛.

4. 设数列$(|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|)$有界,证明数列 (a_n) 收敛.

5. (不动点原理)设函数f的定义域为R,且有一数$q \in (0,1)$使得

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant q|x'-x''|$$

对一切$x', x'' \in R$成立. 任取$x_0 \in R$,令

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in N$$

(即所谓迭代法). 证明:

(1) 数列(x_n)收敛.

(2) 记$x^* = \lim x_n$,则$x^* = f(x^*)$. 这样的x^*叫做f的"不动点".

(3) 方程$x = f(x)$的解是唯一的,即f只有一个不动点.

(4) 设$e \in (0,1)$,证明 Kepler 方程

$$x + e\sin x = b$$

有唯一解,且可用上面逐次"迭代"的办法得到解的近似值.

6. 设函数f在一点x_0附近有定义. 证明f在x_0有有限极限的充分必要条件为: 任给$\varepsilon>0$,存在$\delta_\varepsilon>0$,当$0<|x_1-x_0|<\delta_\varepsilon$, $0<|x_2-x_0|<\delta_\varepsilon$时

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

试再将 x_0 换成 $\pm\infty$, ∞, 叙述上述命题.

7. 证明无穷积分 $\int_a^{+\infty} f$ 收敛的充分必要条件是: 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\Delta_\varepsilon>0$, 当 $A_1, A_2>\Delta_\varepsilon$ 时

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f\right|<\varepsilon.$$

由此证明积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ 收敛. 再用部分积分法证明 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛.

§1.4 上极限和下极限

上面我们讲了实数连续性的诸等价命题, 在此基础上, 我们再进一步地讨论极限的概念.

考虑一个数列 (a_n) (不论有界或无界). 如果它有极限, 那么它只有一个极限. 这时一切子列都有相同的极限. 如果它没有极限, 那么容易明白, 它必有有极限的子列. 事实上, 如果它有界, 则就有收敛的子列(§1.2 定理 5); 如果它无界, 则就有以 $+\infty$ 或 $-\infty$ 为极限的子列. 这种有极限的子列可以有很多个, 而且极限各不相同. 因而它就有很多个"极限"——子列的极限. 记 L 为 (a_n) 的所有这种"极限"的全体, 即

$$L=\{x:\quad (a_n)\text{有子列 } a_{n_k}\to x\}.$$

我们注意到, L 中可以有 $\pm\infty$, 即 $L\subset[-\infty, +\infty]$. 记 L 的上确界为 β, 下确界为 α. 易见 $\alpha, \beta\in L$. 于是 α 为 L 的最小者: $\alpha=\min L$; β 为 L 的最大者: $\beta=\max L$. (a_n) 的这种最小的"极限" α 叫做 (a_n) 的"下极限"; 最大的"极限" β 叫做 (a_n) 的"上极限". 显然, (a_n) 有极限的充分必要条件是 $\alpha=\beta$. 这样定义上、下极限虽甚自然, 并且常常有利于分析问题, 但不便于运算. 因此, 下面我们给出另一种形式的定义.

定义 1 设有数列 (a_n). 对每一个 $n\in N$ 令

$$\alpha_n=\inf_{k\geqslant n}a_k,\qquad \beta_n=\sup_{k\geqslant n}a_k.$$

则(α_n)非减，(β_n)非增．我们把

$$\alpha=\lim\alpha_n=\sup_{n\in N}\inf_{k\geqslant n}a_k$$

叫做(a_n)的**下极限**，记为$\liminf\limits_{n\to+\infty}a_n$或$\varliminf\limits_{n\to+\infty}a_n$:

$$\alpha=\liminf_{n\to+\infty}a_n=\varliminf_{n\to+\infty}a_n=\sup_{n\in N}\inf_{k\geqslant n}a_k.$$

又把

$$\beta=\lim\beta_n=\inf_{n\in N}\sup_{k\geqslant n}a_k$$

叫做(a_n)的**上极限**，记为$\limsup\limits_{n\to+\infty}a_n$或$\varlimsup\limits_{n\to+\infty}a_n$:

$$\beta=\limsup_{n\to+\infty}a_n=\varlimsup_{n\to+\infty}a_n=\inf_{n\in N}\sup_{k\geqslant n}a_k.$$

定理 1

1° $\liminf a_n\leqslant\limsup a_n$.

2° $\lim a_n=a\Longleftrightarrow\liminf a_n=\limsup a_n=a$.

3° $a_n\leqslant b_n\ (n\in N)\Rightarrow$

$\liminf a_n\leqslant\liminf b_n$, $\limsup a_n\leqslant\limsup b_n$.

证明 1°和3°显然．

2° 我们就a为有限的情形来证明，关于$a=\pm\infty$的情形证明类似．

(⇒) 设$\lim a_n=a$. 任给$\varepsilon>0$，则有$n_\varepsilon\in N$，当$k>n_\varepsilon$时

$$a-\varepsilon<a_k<a+\varepsilon.$$

因此当$n>n_\varepsilon$时

$$a-\varepsilon\leqslant\inf_{k\geqslant n}a_k\leqslant\sup_{k\geqslant n}a_k\leqslant a+\varepsilon.$$

令$n\to+\infty$，再令$\varepsilon\to0$即得证．

(⇐) 设$\liminf a_n=\limsup a_n=a$. 任给$\varepsilon>0$. 由上、下极限的定义便知有自然数$n_\varepsilon$，当$n>n_\varepsilon$时

$$a-\varepsilon<\inf_{k\geq n} a_k\leq\sup_{k\geq n} a_k<a+\varepsilon.$$

因此当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$a-\varepsilon<\inf_{k\geq n} a_k\leq a_n\leq\sup_{k\geq n} a_k<a+\varepsilon.$$

所以

$$\lim a_n=a. \quad \square$$

从上、下极限的定义看到，下面要讲的上、下极限四则运算的定理是与确界的四则运算有着密切联系的，因而对§1.1定理2涉及到$\pm\infty$的四则运算的规定自然对下述定理也适用.

定理2 1° 下面二式当两头有意义时成立:

$$\liminf a_n+\liminf b_n\leq\liminf(a_n+b_n)\leq\liminf a_n+\limsup b_n;$$

$$\limsup a_n+\liminf b_n\leq\limsup(a_n+b_n)\leq\limsup a_n+\limsup b_n.$$

2° 若 $\lim b_n=b$，则下面二式当右端有意义时成立:

$$\liminf(a_n+b_n)=\liminf a_n+b;$$

$$\limsup(a_n+b_n)=\limsup a_n+b.$$

3° $\liminf(-a_n)=-\limsup a_n$; $\limsup(-a_n)=-\liminf a_n$.

4° 若(a_n)和(b_n)均为非负数列，则下面二式当两头均有意义时成立:

$$\liminf a_n\cdot\liminf b_n\leq\liminf a_nb_n\leq\liminf a_n\cdot\limsup b_n;$$

$$\limsup a_n\cdot\liminf b_n\leq\limsup a_nb_n\leq\limsup a_n\cdot\limsup b_n.$$

5° 若(b_n)非负，且 $\lim b_n=b$，则下面二式当右端有意义时成立:

$$\liminf a_nb_n=b\liminf a_n;\quad \limsup a_nb_n=b\limsup a_n.$$

证明 由§1.1定理2中1°的第一式得

$$\inf_{k\geq n} a_k+\inf_{k\geq n} b_k\leq\inf_{k\geq n}(a_k+b_k)\leq\inf_{k\geq n} a_k+\sup_{k\geq n} b_k;$$

令 $n\to+\infty$ 便得定理中1°的第一式. 同理可证第二式. 用同样的

方法，由§1.1定理2的3°和4°可得本定理的3°和4°．由1°又立即得2°．下面证明5°．

因为

$$b_n \inf_{k\geq n} a_k \leqslant a_n b_n, \quad n\in N,$$

令$n\to+\infty$，由定理1的2°和3°即得

$$b \liminf a_n \leqslant \liminf a_n b_n.$$

另一方面，若$\liminf a_n < +\infty$，任取

$$y > \liminf a_n = \sup_{n\in N} \inf_{k\geq n} a_k,$$

则

$$y > \inf_{k\geq n} a_k$$

对一切$n\in N$成立．因此对每一个$n\in N$，存在$k_n\geqslant n$使

$$y > a_{k_n}.$$

所以

$$b_{k_n} y \geqslant a_{k_n} b_{k_n} \geqslant \inf_{k\geq n} a_k b_k.$$

令$n\to+\infty$得

$$by \geqslant \liminf a_n b_n.$$

再令$y\to\lim\inf a_n$便得

$$b \liminf a_n \geqslant \liminf a_n b_n.$$

若$\lim\inf a_n=+\infty$，则由假设应有$b\neq 0$，于是又有

$$b \lim\inf a_n = +\infty \geqslant \lim\inf a_n b_n.$$

所以5°的第一式成立．同样可证第二式．□

上、下极限本是可以避免的运算，但应用它们可以收到缩减“ε-n_ε”语言之利，因此它们一直被广泛地使用．上、下极限有一个极大的优点，就是它们对一切数列都是存在的．

例1 设$\lim a_n = a$，证明

$$\lim\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a.$$

证明 设 a 为有限数. 任给 $\varepsilon>0$, 则有 $n_\varepsilon\in N$, 当 $n>n_\varepsilon$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$. 因此当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|=\left|\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_{n_\varepsilon}-a)}{n}\right.$$

$$\left.+\frac{(a_{n_\varepsilon+1}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{n_\varepsilon}-a|}{n}+\left(1-\frac{n_\varepsilon}{n}\right)\varepsilon.$$

令 $n\to+\infty$, 由定理 1 得

$$\lim\sup\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|\leqslant\varepsilon.$$

再令 $\varepsilon\to0$ 即得

$$\lim\sup\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|=0.$$

由定理 1 的2°便知

$$\lim\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|=0.\ \square$$

例 2 再证 R 的完备性.

证明 设(a_n)是Cauchy 数列. 任给 $\varepsilon>0$, 于是有 $n_\varepsilon\in N$, 当 $m,n>n_\varepsilon$ 时

$$a_m-\varepsilon<a_n<a_m+\varepsilon. \tag{1}$$

令 $m\to+\infty$, 由定理 2 的2°得

$$a_n\leqslant\lim_{m\to+\infty}\inf(a_m+\varepsilon)=\lim_{m\to+\infty}\inf a_m+\varepsilon$$

对一切 $n>n_\varepsilon$ 成立. 再令 $n\to+\infty$ 又得

$$\lim_{n\to+\infty}\sup a_n\leqslant\lim_{m\to+\infty}\inf a_m+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0$ 便得

$$\lim_{n\to+\infty}\sup a_n\leqslant\lim_{m\to+\infty}\inf a_m.$$

由定理 1 的 2°，(a_n)的极限存在．然(1)式说明(a_n)是有界的，因此它的极限只能是有限数，所以收敛．□

例 3 假设对于一切 $m, n\in N$ 有

$$a_n\geqslant 0, \qquad a_{m+n}\leqslant a_m+a_n.$$

证明数列$\left(\frac{a_n}{n}\right)$收敛．

证明 任取 $k\in N$．则一切不小于 k 的自然数 n 可以表示为

$$n=mk+l, \quad l=0,1,\cdots,k-1, \quad m\in N.$$

所以

$$\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{a_{mk}}{n}+\frac{a_l}{n}\leqslant\frac{ma_k}{n}+\frac{a_l}{n}\leqslant\frac{a_k}{k}+\frac{a_l}{n}.$$

令 $n\to+\infty$ 即得

$$\limsup\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{a_k}{k}.$$

再令 $k\to+\infty$ 便得

$$\limsup\frac{a_n}{n}\leqslant\liminf\frac{a_k}{k}.$$

所以$\left(\frac{a_n}{n}\right)$有极限．又因对一切 $n\in N$ 有 $0\leqslant\frac{a_n}{n}\leqslant a_1$，所以 $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ 收敛．□

定理 3 设有数列(a_n)．令

$$L=\{x:\ (a_n)\text{有子列 } a_{n_k}\to x\}.$$

则

$$\liminf a_n=\min L, \quad \limsup a_n=\max L.$$

证明 第一式与第二式证明方法相似，我们只证明第二式．先看 $\limsup a_n<+\infty$ 的情形．设(a_{n_i})为(a_n)的任一有极限的子列．任取 $n\in N$，则当 $i\geqslant n$ 时 $n_i\geqslant i\geqslant n$，所以

$$a_{n_i}\leqslant\sup_{k\geqslant n}a_k,$$

因此

$$\lim_{i\to+\infty} a_{n_i} \leqslant \sup_{k\geqslant n} a_k,$$

于是

$$\lim_{i\to+\infty} a_{n_i} \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sup a_n.$$

这就是说

$$\max L \leqslant \lim\sup a_n.$$

另一方面，任取 $y > \max L$. 易见在区间 $[y, +\infty)$ 中最多只有 (a_n) 的有限多项，因此当 k 充分大时应有 $a_k < y$，所以当 n 充分大时则有

$$\sup_{k\geqslant n} a_k \leqslant y.$$

所以

$$\lim\sup a_n \leqslant y.$$

令 $y \to \max L$ 便得

$$\lim\sup a_n \leqslant \max L.$$

所以

$$\lim\sup a_n = \max L.$$

再看 $\lim\sup a_n = +\infty$ 的情形. 由于 $\sup\limits_{k\geqslant n} a_k$ 当 n 增加时非增，所以 $\sup\limits_{k\geqslant n} a_k = +\infty$ 对一切 $n\in N$ 成立. 因此不难明白，我们可以取 $k_1\in N$ 使得 $a_{k_1} > 1$，又可以取 $k_2\in N, k_2 > k_1$ 使得 $a_{k_2} > 2, \cdots$. 于是得 $a_{k_i} \to +\infty$. 所以 $+\infty \in L$. 因此

$$\max L = +\infty = \lim\sup a_n. \quad \square$$

定义 2 设函数 f 在一点 x_0 附近除 x_0 外有定义. 令

$$\varphi(\delta) = \inf\{f(x):\quad 0 < |x - x_0| < \delta\},$$

$$\psi(\delta) = \sup\{f(x):\quad 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

则 φ 和 ψ 均是单调函数. 我们把 $\alpha = \lim\limits_{\delta\to 0} \varphi(\delta)$ 叫做 f 在 x_0 的下极

限，把 $\beta=\lim_{\delta\to 0}\psi(\delta)$ 叫做 f 在 x_0 的上极限。记为

$$\alpha=\lim_{x\to x_0}\inf f(x)=\underline{\lim}_{x\to x_0} f(x),$$

$$\beta=\lim_{x\to x_0}\sup f(x)=\overline{\lim}_{x\to x_0} f(x).$$

同样可以定义

$$\lim_{x\to+\infty}\sup f(x),\qquad \lim_{x\to x_0+0}\sup f(x)$$

等等.

有了上述定义，容易看出，定理 1 和定理 2 对于函数的情形也同样成立.

定理 4 函数 f 在一点 x_0 的下极限（上极限）是一切数列极限 $\lim f(x_n)$（其中 $0<|x_n-x_0|\to 0$）中之最小（最大）者.

证明留作习题.

例 4 设 $\lim_{x\to+\infty} f'(x)=0$，证明 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

证明 任给 $\varepsilon>0$. 由所设存在 $\Delta>0$，当 $x>\Delta$ 时 $|f'(x)|<\varepsilon$. 因此当 $x, a>\Delta$ 时由微分平均值定理有

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|<\varepsilon,$$

所以

$$|f(x)|<\varepsilon|x-a|+|f(a)|,$$

以 $|x|$ 除上式，

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\varepsilon\left|1-\frac{a}{x}\right|+\left|\frac{f(a)}{x}\right|,$$

由此

$$\lim_{x\to+\infty}\sup\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$ 便得

$$\lim_{x\to+\infty}\sup\left|\frac{f(x)}{x}\right|=0.$$

即得证. □

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 为什么说任一数列都有有极限的子列?

(2) 为什么说任一数列的子列极限中有最大的和最小的?

(3) 何谓数列的上、下极限? 它们与子列极限有何关系?

(4) 用上、下极限如何表达数列有极限的充分必要条件?

(5) 上、下极限在运算上有些什么性质?

(6) 上、下极限与实数连续性有何关系?

(7) 何谓函数在一点的上、下极限?

2. 求 $\liminf a_n$ 和 $\limsup a_n$. 设 $(n\in N)$

(1) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$.　　(2) $a_n=n^{(-1)^n}$.

(3) $a_n=\operatorname{arctg} n^{(-1)^n}$.　　(4) $a_n=\sqrt[n]{1+2^{(-1)^n n}}$.

(5) $a_n=\begin{cases}0, & n=2k,\\ \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, & n=2k-1,\end{cases}\quad k\in N.$

(6) $a_n=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ \sqrt[n]{1+2^{(-1)^n n}}, & n=2k,\end{cases}\quad k\in N.$

(7) $a_n=1+n\sin\frac{n\pi}{2}$.　　(8) $a_n=\frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2\pi n}{3}$.

3. 证明: $\limsup a_n=a$(有限)的充分必要条件是, 任给 $\varepsilon>0$, $(a-\varepsilon,+\infty)$ 中有 (a_n) 的无限多项, 而 $(a+\varepsilon,+\infty)$ 中最多只有 (a_n) 的有限多项.

4. 设 $a_n>0(n\in N)$, 且

$$(\limsup a_n)\limsup\frac{1}{a_n}=1.$$

证明 (a_n) 收敛.

5. 设 $a_n\geqslant 0$, $a_{n+m}\leqslant a_n a_m$, $n,m\in N$. 证明数列 $(\sqrt[n]{a_n})$ 收敛.

6. 试用上、下极限证明 §1.3 习题 6 中的充分性.

7. 试用上、下极限简化第二章 §2.6 定理 3 的证明.

8. 设 $a_n>0(n\in N)$, 证明

$$\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\liminf\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup\sqrt[n]{a_n}\leqslant\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

第二节 函数的连续性和可积性

§2.1 连续函数性质的证明

在第一章§4.2中我们用几何直观介绍了连续函数的一些性质，在前面两章的学习中我们已经看到这些性质的重要作用．这些性质正是分析学中离开实数连续性不能得到证明的典型例子．现在我们来对它们补充严格的分析证明．

1) 零值定理(第一章§4.2定理1)的证明：

不妨设 $f(a)<0, f(b)>0$．(反证)假设当 $x\in(a,b)$ 时 $f(x)\neq 0$．考虑区间 $[a,b]$ 的中点 $\frac{a+b}{2}$．若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$，取 $a_1=\frac{a+b}{2}$，$b_1=b$；若 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$，取 $a_1=a, b_1=\frac{a+b}{2}$．则 $f(a_1)<0, f(b_1)>0$．再考虑区间 $[a_1, b_1]$ 的中点．若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<0$，取 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=b_1$；若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)>0$，取 $a_2=a_1$，$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$．则 $f(a_2)<0$，$f(b_2)>0$．如此下去，得一非增区间序列

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots,$$

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\to 0.$$

由§1.2定理3便得一公共点 $x_0\in[a,b]$，且

$$\lim a_n=\lim b_n=x_0. \tag{1}$$

并且对一切 $n\in N$ 有

$$f(a_n)<0, f(b_n)>0. \tag{2}$$

然而 f 在 $[a,b]$ 上是连续的，由(1)和(2)即得 $f(x_0)=0$，与假设矛

盾.□

2）第一章§4.2定理3的证明：

设f是有界闭区间$[a,b]$上的连续函数. 记$M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$（§1.1定理1和定义3），则$M>-\infty$. 任取一数列$(\alpha_n)$使$\alpha_n<M$ $(n\in N)$，且$\alpha_n\to M$. 则每一个α_n都不是f的上界，因此对每一个$n\in N$有$x_n\in[a,b]$使

$$\alpha_n<f(x_n)\leqslant M. \tag{3}$$

(x_n)是一有界数列，由§1.2定理5，(x_n)有收敛子列(x_{n_k}). 设$x_{n_k}\to x_0$，则$x_0\in[a,b]$. 由(3)，

$$\alpha_{n_k}<f(x_{n_k})\leqslant M,\quad k\in N.$$

而f在$[a,b]$上连续，在上式中令$k\to+\infty$即得$f(x_0)=M$. 因此M必定是有限数. 显然$f(x_0)$就是f的最大值. 同样可证f有最小值. □

习　题

1. 回答下列问题：

(1) 在1）和2）的证明中用到了哪些实数连续性命题？

(2) 在第二章和第三章中哪些地方用到了第一章§4.2定理1和定理3？

2. 分别用下列三种方法证明零值定理：

(1) 有界闭区间的紧致性.

(2) 若$f(a)<0$, $f(b)>0$, 考虑$c=\sup\{x\in[a,b]:\ f(x)<0\}$.

(3) 实数的连通性（§1.1习题4）.

3. 设f是有界闭区间$[a,b]$上的连续函数. 试按下列步骤证明f有最大值：

(1) f有界.

(2) 反证，设f无最大值. 令$M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. 再令

$$F(x)=\frac{1}{M-f(x)},\quad x\in[a,b].$$

则F是$[a,b]$上的正值连续函数，因此也有界，即有数M_1使

$$0 < F(x) \leqslant M_1, \quad x \in [a, b].$$

由此得出矛盾.

4. 设函数 f 在一点 x_0 的左旁 $(x_0-\delta, x_0)$ 连续, 又

$$\liminf_{x \to x_0 - 0} f(x) \leqslant a \leqslant \limsup_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

则一定有数列 $x_n \to x_0 - 0$ 使 $f(x_n) \to a$.

5. 设函数 f 在开区间 I 上连续, 并且 I 中每一点都是 f 的极值点, 证明 f 在 I 上是一常数.

提示: 反证. 则在 I 中一定存在三点 $x_1 < x_2 < x_3$, $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ (或 $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$).

6. 证明不存在一个定义在 R 上的函数, 在有理点上连续, 在无理点上不连续.

提示: 设 f 是一个题中所述的函数. 任取一无理数 r, 令 $g(x) = f(x+r)$ $(x \in R)$. 用区间套原理可以证明, g 和 f 一定有公共的连续点, 从而得到矛盾.

§ 2.2 一致连续

如果我们深入地分析区间上的连续函数, 则会发现有不同的连续性. 先看一个具体例子.

设 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$. 现从连续的定义进一步分析函数 f 在区间 $(0, +\infty)$ 上的连续性. 下面分三个部分来讨论这个问题.

1) 从连续的定义证明 f 在区间 $(0, +\infty)$ 上连续.

任取一点 $x_0 > 0$. 则当 $x > \dfrac{1}{2} x_0$ 时

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{x x_0} < \frac{2}{x_0^2} |x - x_0|.$$

因此, 任给 $\varepsilon > 0$, 取(图 100)

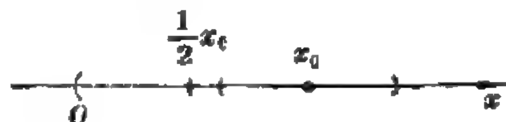


图 100

$$\delta_\varepsilon=\min\left(\frac{x_0^2}{2}\varepsilon,\ \frac{x_0}{2}\right),$$

则当$|x-x_0|<\delta_\varepsilon$时

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{2}{x_0^2}\delta_\varepsilon\leqslant\varepsilon.$$

而x_0是任意的，所以f在$(0,+\infty)$上连续。

由此我们发现，所选δ_ε不仅与ε有关，还与x_0有关。随着x_0的位置变化，所选δ_ε是不同的。那么，是否存在与x_0无关，因而对一切$x_0\in(0,+\infty)$都同时适用的δ_ε呢？

2）不存在与x_0无关的δ_ε。

（反证）假设存在只与ε有关，与x_0无关的δ_ε。则对一切x，$x_0\in(0,+\infty)$当$|x-x_0|<\delta_\varepsilon$时

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|<\varepsilon.$$

特别当$0<x<x_0<\delta_\varepsilon$时上式成立（图 101）。令$x\to0$便得$+\infty\leqslant\varepsilon$，矛盾。

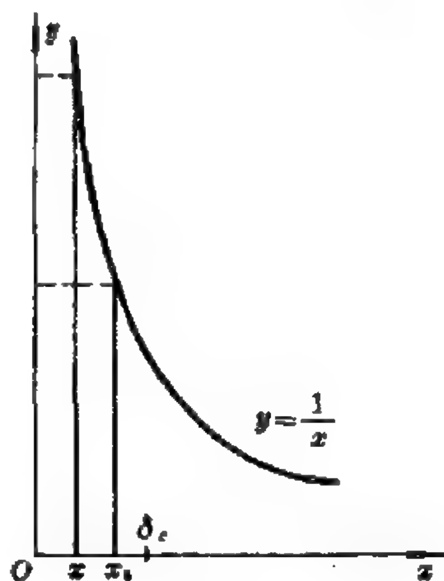


图 101

3）设$a>0$，则对于区间$(a,+\infty)$存在与x_0无关的δ_ε。

事实上，因为当$x, x_0\in(a,+\infty)$时

$$|f(x)-f(x_0)|=\frac{|x-x_0|}{xx_0}<\frac{1}{a^2}|x-x_0|.$$

取$\delta_\varepsilon=a^2\varepsilon$，则$\delta_\varepsilon$只与$\varepsilon$有关，与$x_0$无关；对一切$x$，$x_0\in(a,+\infty)$当$|x-x_0|<\delta_\varepsilon$时便有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{a^2}\cdot\delta_\varepsilon=\varepsilon.$$

从上例我们看到，虽然函数f在区间$(0,+\infty)$和$(a,+\infty)$上都是连续的，但仔细观察便发现差别。由此我们可以提出一个比

通常的连续概念更强的连续性概念.

定义 1 设函数 f 在区间 I 上有定义. 如果对于每一数 $\varepsilon>0$, 都相应存在一数 $\delta_\varepsilon>0$(δ_ε 只与 ε 有关), 对一切 $x_1, x_2\in I$ 当 $|x_1-x_2|<\delta_\varepsilon$ 时便有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

则称函数 f 在区间 I 上**一致连续**.

上述函数 f 在区间 $(a, +\infty)$ 上是一致连续的, 但在区间 $(0, +\infty)$ 上便不一致连续.

例 1 当 $x\in R$ 时定义 $f(x)=x, g(x)=x^2$. 讨论函数 f 和 g 在 R 上是否一致连续.

解 因为对一切 $x_1, x_2\in R$ 有

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|x_1-x_2|.$$

任给 $\varepsilon>0$, 只须取 $\delta_\varepsilon=\varepsilon$, 即见 f 在 R 上是一致连续的. 对于函数 g 有

$$|g(x_1)-g(x_2)|=|x_1+x_2||x_1-x_2|,\quad x_1, x_2\in R.$$

任给 $\varepsilon>0$, 如果存在只与 ε 有关的 δ_ε 使得当 $|x_1-x_2|<\delta_\varepsilon$ 时

$$|g(x_1)-g(x_2)|<\varepsilon,$$

我们只要取 x_1 和 x_2 使 $x_1+x_2=\frac{4\varepsilon}{\delta_\varepsilon}$, $x_1-x_2=\frac{\delta_\varepsilon}{2}<\delta_\varepsilon$, 而

$$|g(x_1)-g(x_2)|=\frac{4\varepsilon}{\delta_\varepsilon}\cdot\frac{\delta_\varepsilon}{2}=2\varepsilon>\varepsilon,$$

便得矛盾. 所以 g 在 R 上不一致连续. □

例 2 设 $f(x)=\sin\frac{1}{x}, 0<x<1$. 证明 f 在 $(0, 1)$ 上不一致连续.

证明 (反证)假设 f 在 $(0, 1)$ 上一致连续. 任给 $\varepsilon>0$, 则有只与 ε 有关的 $\delta_\varepsilon>0$, 当 $x_1, x_2\in(0, 1)$, $|x_1-x_2|<\delta_\varepsilon$ 时

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|<\varepsilon.$$

特别取 $x_1=\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$, $x_2=\dfrac{1}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi}$, n 为自然数. 显然 x_1, $x_2\in(0,1)$, 且当 n 充分大时 $|x_1-x_2|<\delta_1$, 但

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|=|1-(-1)|=2>1$$

这与假设矛盾. □

定理 1(G. Cantor) 有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数在 $[a,b]$ 上一致连续.

证明 已知函数 f 在有界闭区间 $[a,b]$ 上连续. (反证)假设 f 在 $[a,b]$ 上不一致连续. 则有一个 $\varepsilon>0$; 对一切 $n\in N$ 存在 x_n, $x_n'\in[a,b]$, $|x_n-x_n'|<\dfrac{1}{n}$, 而

$$|f(x_n)-f(x_n')|\geqslant\varepsilon. \tag{1}$$

因为 (x_n) 有界, 由 § 1.2 定理 5, (x_n) 有收敛子列 (x_{n_k}). 设 $x_{n_k}\to x_0$, 则 $x_0\in[a,b]$. 另一方面, 因为当 $k\to+\infty$ 时

$$|x_{n_k}-x_{n_k}'|<\frac{1}{n_k}\to 0,$$

所以又得 $x_{n_k}'\to x_0$. 但由(1)式,

$$|f(x_{n_k})-f(x_{n_k}')|\geqslant\varepsilon$$

对一切 $k\in N$ 成立, 令 $k\to+\infty$, 由 f 的连续性便得 $0\geqslant\varepsilon$. 矛盾. □

例 3 证明函数 arc tg 在 R 上一致连续.

证明 任给 $\varepsilon>0$. 因为对一切 $x\in R$ 有 $|\operatorname{arctg}x|<\dfrac{\pi}{2}$, 又因为

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2},$$

所以有 $\Delta_\varepsilon>0$, 当 $x>\Delta_\varepsilon$ 时

$$\frac{\pi}{2}-\varepsilon<\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2};$$

当 $x<-\Delta_\varepsilon$ 时

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<-\frac{\pi}{2}+\varepsilon.$$

因此当 $x_1, x_2>\Delta_\varepsilon$ 或 $x_1, x_2<-\Delta_\varepsilon$ 时

$$|\operatorname{arctg}x_1-\operatorname{arctg}x_2|<\varepsilon. \tag{2}$$

再取一数 $A_\varepsilon>\Delta_\varepsilon$(图 102). 因为 arctg 在 R 上连续, 所以由定理 1, arctg 在有界闭区间$[-A_\varepsilon, A_\varepsilon]$上一致连续. 因此存在 $\lambda_\varepsilon>0$, 当 $x_1, x_2\in[-A_\varepsilon, A_\varepsilon]$, $|x_1-x_2|<\lambda_\varepsilon$ 时(2)式成立. 只要取 $\delta_\varepsilon=\min(\lambda_\varepsilon, A_\varepsilon-\Delta_\varepsilon)$(只与 ε 有关), 则易见, 对一切 $x_1, x_2\in R$, 当$|x_1-x_2|<\delta_\varepsilon$ 时(2)式成立. 所以arctg 在 R 上一致连续. □

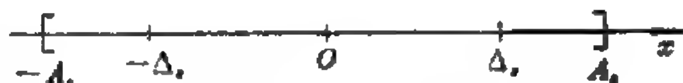


图 102

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 函数在一个区间上一致连续与连续有何不同?

(2) 函数在一个区间上不一致连续是什么意思?

(3) 若函数在区间 I 上一致连续, 当区间 $J\subset I$ 时,这个函数在 J 上是否一致连续?

(4) 若函数 f 和 g 都在区间 I 上一致连续, 则 $f+g$ 和 fg 是否一致连续?

(5) 定理 1 是否由实数连续性证出的?

2. 证明: 若函数 f 在区间 I 上有有界导数, 则 f 在 I 上一致连续.

3. 设函数 f 在开区间(a, b)上连续, 且 $f(a+0)$ 和 $f(b-0)$ 存在、有限, 证明 f 在(a, b)上一致连续.

4. 设函数 f 在区间$[a, +\infty)$上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在、有限, 证明 f 在$[a, +\infty)$上一致连续.

5. 证明: 若函数 f 在区间(a, b)上一致连续, 则存在函数 g 在闭区间

$[a,b]$上连续，且当 $x\in(a,b)$时 $g(x)=f(x)$．即 f 可以延拓为$[a,b]$上的连续函数。

6．设函数 f 在区间$[a,+\infty)$上连续，且有渐近线，即有数 b 和 c 使得

$$\lim_{x\to+\infty}[bx+c-f(x)]=0.$$

证明 f 在$[a,+\infty)$上一致连续。

7．证明连续的周期函数一致连续。

8．讨论下列函数 f 的一致连续性，设

(1) $f(x)=x^2\arcsin x,\quad |x|\leqslant 1.$

(2) $f(x)=x\,\mathrm{arctg}\,x,\quad x\in R.$

(3) $f(x)=\cos\dfrac{1}{x},\quad x>0.$

(4) $f(x)=\sin x^2,\quad x\in R.$

(5) $f(x)=\sqrt[3]{x},\quad x\geqslant 0.$

(6) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x},\quad x>0.$

§2.3 函数的可积性

现在我们可以来研究第三章§2.2中提出的第一个问题，即函数可积的条件是什么？为此我们先引进一些概念，并证明几个引理．由第三章§2.2定理2知道，可积函数有界．因此我们假定下面所讨论的函数 f 均在区间$[a,b]$上有界：

$$|f(x)|\leqslant M,\qquad x\in[a,b]. \tag{1}$$

设$[a,b]$的一个分割为

$$\pi:\qquad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

记

$$\overline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{n}\sup f([x_{i-1},x_i])\Delta x_i,$$

$$\underline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{n}\inf f([x_{i-1},x_i])\Delta x_i,$$

分别叫做 f 在$[a,b]$上的上和和下和．记 f 在$[a,b]$上的 Riemann

和为

$$S(f,\pi,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\cdots,n$. 显然

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant S(f,\pi,\xi)\leqslant\overline{S}(f,\pi). \tag{2}$$

设 π_1 和 π_2 是$[a,b]$的任意两个分割,若 π_1 中的分点都是 π_2 中的分点,则记 $\pi_1\leqslant\pi_2$.

引理 1 若 $\pi_1\leqslant\pi_2$,则

$$\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\underline{S}(f,\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_1).$$

证明 设

$$\pi_1:\quad a=y_0<y_1<\cdots<y_m=b,$$

$$\pi_2:\quad a=z_0<z_1<\cdots<z_n=b.$$

任取区间(y_{i-1},y_i),为简单起见,不妨设(y_{i-1},y_i)中只有 π_2 的一个分点 z_j(图 103). 则 $z_{j-1}=y_{i-1}$, $z_{j+1}=y_i$. 显见,



图 103

$$\begin{aligned}&\sup f([z_{j-1},z_j])\Delta z_j+\sup f([z_j,z_{j+1}])\Delta z_{j+1}\\&\leqslant\sup f([y_{i-1},y_i])\Delta z_j+\sup f([y_{i-1},y_i])\Delta z_{j+1}\\&=\sup f([y_{i-1},y_i])\Delta y_i\end{aligned}$$

按下标取和即得 $\overline{S}(f,\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_1)$. 同样可证 $\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\underline{S}(f,\pi_2)$. 由(2)式便得证. □

引理 2 设 π_1 和 π_2 是$[a,b]$的任意两个分割,则

$$\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\overline{S}(f,\pi_2).$$

证明 将 π_1 和 π_2 的分点合在一起构成新的一个分割 π, 则 $\pi_1\leqslant\pi$, $\pi_2\leqslant\pi$. 由引理 1 和(2)式便得

$$\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\underline{S}(f,\pi)\leqslant\overline{S}(f,\pi)\leqslant\overline{S}(f,\pi_2).\ \square$$

记

$$\overline{I}=\inf\{\overline{S}(f,\pi):\ \pi \text{ 是}[a,b]\text{的分割}\},$$
$$\underline{I}=\sup\{\underline{S}(f,\pi):\ \pi \text{ 是}[a,b]\text{的分割}\},$$

分别叫做 f 在 $[a,b]$ 上的**上积分**和**下积分**.

引理 3 $$\underline{I}\leqslant\overline{I}.$$

证明 由引理 2, 显然. □

因此我们得到, 对一切分割 π 有

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant\overline{S}(f,\pi). \tag{3}$$

定理 1 函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积的充分必要条件为, 任给 $\varepsilon>0$, 存在分割 π_ε 使

$$\overline{S}(f,\pi_\varepsilon)-\underline{S}(f,\pi_\varepsilon)<\varepsilon. \tag{4}$$

证明 (充分性) 设定理中的条件成立. 任给 $\varepsilon>0$, 则有分割 π_ε 使(4)式成立. 由(3)式便有

$$0\leqslant\overline{I}-\underline{I}<\varepsilon.$$

而 ε 是任意的, 所以 $\overline{I}=\underline{I}$, 并把它记为 I. 下面我们来证明 f 在 $[a,b]$ 上可积, 积分就是 I. 设定理条件中的分割 $\pi_{\varepsilon/2}$ 为

$$a=y_0<y_1<\cdots<y_m=b.$$

记 $\delta_\varepsilon=\min(\varepsilon/4mM,\ \min\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\Delta y_i)$, 其中 M 由(1)式定义. 任取分割

$$\pi:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

设 $\|\pi\|<\delta_\varepsilon$. 则每一个开区间 (x_{i-1},x_i) 或者含有一个(只有一个) y_j, 或者不含任何 y_j. 如果 (x_{i-1},x_i) 不含任何 y_j, 则 $[x_{i-1},x_i]$ 包含于某一个 $[y_{k-1},y_k]$. 暂称前一种区间为第一种区间, 后一种区间为第二种区间. 记

$$\omega_i=\sup f([x_{i-1},x_i])-\inf f([x_{i-1},x_i]),\ i=1,\cdots,n. \tag{5}$$

于是

$$|S(f,\pi,\xi)-I|\leqslant\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i-\Sigma_1\omega_i\Delta x_i+\Sigma_2\omega_i\Delta x_i,$$

其中 Σ_1 表示相应于第一种区间的和，Σ_2 表示相应于第二种区间的和. 对于第一个和，其中最多只有 $m-1$ 项，所以

$$\Sigma_1\omega_i\Delta x_i \leqslant 2M\Sigma_1\Delta x_i < 2mM\delta_\varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于第二个和，容易明白，

$$\Sigma_2\omega_i\Delta x_i \leqslant \sum_{k=1}^{m}\{\sup f([y_{k-1}, y_k]) - \inf f([y_{k-1}, y_k])\}\Delta y_k$$

$$= \overline{S}(f, \pi_{\varepsilon/2}) - \underline{S}(f, \pi_{\varepsilon/2}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以

$$|S(f, \pi, \xi) - I| < \varepsilon,$$

其中 ξ 内的每一 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 是完全任意的. 所以 f 在 $[a, b]$ 上可积，积分为 I.

（必要性） 设 f 在 $[a, b]$ 上可积，积分为 I. 任给 $\varepsilon > 0$. 则由积分定义，自然存在分割 π_ε 使

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对一切 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i=1, \cdots, n)$ 成立. 上式可写成

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i < I + \frac{\varepsilon}{3}.$$

由诸 ξ_i 的任意性便得

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \overline{S}(f, \pi_\varepsilon) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3},$$

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \leqslant \underline{S}(f, \pi_\varepsilon) \leqslant I + \frac{\varepsilon}{3},$$

所以

$$\overline{S}(f, \pi_\varepsilon) - \underline{S}(f, \pi_\varepsilon) \leqslant \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon. \ \square$$

根据上述定理，现在我们就可以对第三章§2.2定理1予以证明.

定理2 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上单调，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 不妨设 f 在 $[a,b]$ 上非减. 显然

$$\sup f([x_{i-1}, x_i]) = f(x_i), \quad \inf f([x_{i-1}, x_i]) = f(x_{i-1}),$$

$i=1,\cdots,n$. 所以

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]\Delta x_i$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]\|\pi\| = [f(b) - f(a)]\|\pi\|.$$

由定理1，显然 f 在 $[a,b]$ 上可积. □

定理3 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 由§2.2定理1，f 在 $[a,b]$ 上一致连续. 因此，任给 $\varepsilon>0$，存在只与 ε 有关的 $\delta>0$，当 $t, s\in[a,b]$，$|s-t|<\delta$ 时

$$|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{6}$$

任取分割

$$\pi: \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

且 $\|\pi\|<\delta$. 于是(6)式在每一个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上成立，因此易知(ω_i 由(5)式定义)

$$\omega_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \qquad i=1,\cdots,n.$$

所以

$$\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

由定理1，f 在 $[a,b]$ 上可积. □

引理4 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有界，且在区间 (a,b) 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上可积.

证明 任给 $\varepsilon>0$, 取 a_1, b_1 满足 $a<a_1<b_1<b$, 且

$$a_1-a<\frac{\varepsilon}{6M}, \qquad b-b_1<\frac{\varepsilon}{6M},$$

其中M由(1)式定义. 因为f在区间$[a_1, b_1]$上连续, 由定理3, f在$[a_1, b_1]$上可积. 再由定理1, 有分割

$$a_1=x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}=b_1$$

使

$$\sum_{i=2}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{3},$$

其中 ω_i 由(5)式定义. 取分割 π_ε 为

$$a=x_0<a_1=x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}=b_1<x_n=b,$$

则

$$\overline{S}(f, \pi_\varepsilon)-\underline{S}(f, \pi_\varepsilon)=\omega_1\Delta x_1+\sum_{i=2}^{n-1}\omega_i\Delta x_i+\omega_n\Delta x_n$$

$$<2M\frac{\varepsilon}{6M}+\frac{\varepsilon}{3}+2M\cdot\frac{\varepsilon}{6M}=\varepsilon.$$

由定理1, f在$[a, b]$上可积. □

定理4 若函数f在区间$[a, b]$上有界, 且只有有限个间断点, 则f在$[a, b]$上可积.

证明 设f在$[a, b]$上的间断点为

$$a\leqslant c_1<c_2<\cdots<c_n\leqslant b,$$

则f在区间(a, c_1), (c_1, c_2), $\cdots$, (c_n, b)上连续, 在区间$[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, $\cdots$, $[c_n, b]$上有界. 由引理4, f在区间$[a, c_1]$, $[c_1, c_2]$, $\cdots$, $[c_n, b]$上可积. 再由定理1, 显然f在$[a, b]$上可积.

关于函数的可积性问题, 暂且讨论至此, 在(第二册)第七章中, 我们还要继续研究这个问题.

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 何谓上和、下和? 它们有哪些性质?

(2) 何谓上、下积分? 它们与上、下和有何关系?

(3) 函数可积的充分必要条件为何?

(4) 函数的可积性问题在哪些方面依赖于实数连续性?

(5) 由定理 1 是否可得下述结论: 函数 f 在区间$[a, b]$上可积, 且积分为 I 的充要条件是, 任给 $\varepsilon>0$, 存在分割 π_ε 使

$$|S(f, \pi_\varepsilon, \xi)-I|<\varepsilon$$

对一切 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$成立.

2. 设函数 f 在区间$[0, 1]$上有界, 且只有一串间断点 $c_1, c_2, \cdots$ 满足 $\lim c_n=0$. 证明 f 在$[0, 1]$上可积.

3. 研究下列函数 f 在区间$[0, 1]$上的可积性, 设

(1) $f(x)=\begin{cases} 1, & x\neq\dfrac{1}{n}, \\ 0, & x=\dfrac{1}{n}, \end{cases} \quad n\in N.$

又问 $\int_0^1 f=?$

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right], & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

4. 研究 Riemann 函数 f (第一章 §3.1 习题 5)的可积性:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{p}, & \text{当 } x=\dfrac{q}{p}, p,q\text{为无公因子的正整数}, q<p; \\ 1, & \text{当 } x=0, 1; \\ 0, & \text{当 } x\in(0, 1)\text{为无理数}. \end{cases}$$

5. 设函数 f 在区间$[a, b]$上可积, 且当 $x\in[a, b]$时 $f(x)>0$. 证明 $\int_a^b f>0$.

6. 设函数 f 在区间$[a, b]$上可积, $[\alpha, \beta]\subset[a, b]$, 则 f 在$[\alpha, \beta]$上也可积.

7. 设函数 f 和 g 都在区间 $[a, b]$ 上可积，证明函数 $|f|$ 和 fg 也都在 $[a, b]$ 上可积.

8. 设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积，则

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

9. 设函数 f 和 g 在区间 $[a, b]$ 上有可积的导函数，证明部分积分公式成立.

10. 设函数 φ 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上严格增，有可积的导函数，$\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$. 又函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积. 证明换元公式第二章 § 2.5(1) 成立.

11. 设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上有定义，对一切 $\varepsilon>0$ 在区间 $[a+\varepsilon, b]$ 上可积. 证明：

(1) 若 f 在 $[a, b]$ 上可积，则

$$\int_a^b f=\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f.$$

(2) 若 f 在 $[a, b]$ 上有界，则 f 在 $[a, b]$ 上可积.

(3) 若 f 在 $[a, b]$ 上不可积，则对一切 $\varepsilon>0$，f 在区间 $[a, a+\varepsilon)$ 上无界.

12. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x\leqslant 1, \\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明(通过估计，不要硬算)

$$\lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

但 f 在 $[0, 1]$ 上不(常义)可积，如何解释？

13. 设函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积. 证明：任给 $\varepsilon>0$，存在 $[a, b]$ 上的连续函数 φ 使

$$\int_a^b |f-\varphi|<\varepsilon.$$

第五章　R^2中的拓扑知识

第一节　集合和映射

§1.1　集合运算和欧氏空间

我们在第一册的开头已经提出了“集合”的概念和表示方法，这里就不再重复．集合与集合是可以作运算的．在定义集合运算之前，我们先回顾一下集合关系“$\subset$”和“$=$”的意义．若A,B是两个集合，$A\subset B$意指，若$a\in A$，则$a\in B$．即

$$a\in A\Longrightarrow a\in B.$$

也就是A中的元素均是B中的元素．$A=B$意指，若$a\in A$，则$a\in B$，且反之亦然．即

$$a\in A\Longleftrightarrow a\in B.$$

若$A\subset B$，但$A\neq B$，则A是B的“真子集”．

关系“$\subset$”显然具有下列性质：

1°　$A\subset A$（自反性）．

2°　$A\subset B$, $B\subset A\Longrightarrow A=B$（反对称性）．

3°　$A\subset B$, $B\subset C\Longrightarrow A\subset C$（传递性）．

在这些性质中，我们常常要用性质2°来证明两个集合相等．

下面我们来介绍集合运算．

定义1　设A和B是两个集合，则$A\cup B$是一个集合，是A和B两集中全体元素所成之集（图1），即　$A\cup B=\{a:\quad a\in A\text{ 或 }a\in B\}$，

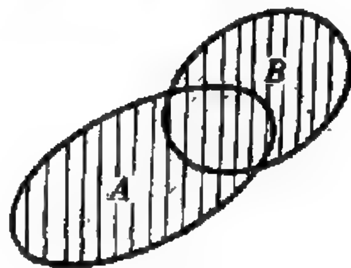


图　1

叫做 A 和 B 的并集.

这个概念自然可以推广到任意多个集合. 设 $A_1, A_2, \cdots$ 都是集合, 则定义

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

$$= \{x: \quad x \in A_i \text{ 对某个 } i=1, \cdots, n \text{ 成立}\},$$

$$\bigcup_{i \in N} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

$$= \{x: \quad x \in A_i \text{ 对某个自然数 } i \text{ 成立}\}.$$

一般地, 若 I 是一个集合, 如果对于每一个 $\alpha \in I$ 相应有一个集合 A_α, 则定义

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x: \quad x \in A_\alpha \text{ 对某个 } \alpha \in I \text{ 成立}\}.$$

显然

$$A \cup B = B \cup A,$$

$$A \cup A = A, \qquad A \cup \varnothing = A,$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C,$$

$$A \cup B = A \Longleftrightarrow B \subset A.$$

例 1 看一些例子:

$$[0, 2] \cup [1, 3] = [0, 3].$$

$$[0, 2) \cup [0, 1] = [0, 2).$$

$$(0, 1) \cup \{0\} \cup \{1\} = [0, 1].$$

$$\{(x, y): \quad x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

$$= \{(x, y): \quad x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y): \quad x^2 + y^2 = 1\}.$$

$$R = \bigcup_{n \in N} (-n, n) = \bigcup_{n \in N} [-n, n].$$

$$\{x \in R: \quad x > 0\} = \bigcup_{n \in N} \left\{x \in R: \quad x > \frac{1}{n}\right\}.$$

$$\{x\in R:\quad f(x)>0\}$$

$$=\bigcup_{n\in N}\left\{x\in R:\quad f(x)>\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\bigcup_{\alpha\in(0,+\infty)}\{x\in R:\quad f(x)>\alpha\}.$$

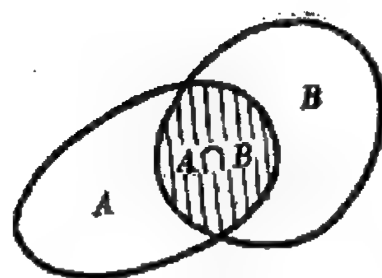


图 2

定义 2 设 A 和 B 是两个集合,则 $A\cap B$ 是一个集合,是 A 和 B 两集的全体公共元素所成之集(图 2),即

$$A\cap B=\{a:\quad a\in A \text{ 和 } a\in B\},$$

叫做 A 和 B 的**交集**. 若 $A\cap B=\varnothing$,即 A 和 B 无公共元素,则称 A 和 B **不相交**. 同样定义

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x:\quad x\in A_\alpha \text{ 对一切 } \alpha\in I \text{ 成立}\}.$$

显然

$$A\cap B=B\cap A,$$

$$A\cap A=A,\qquad A\cap\varnothing=\varnothing,$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C,$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

$$A\cap B\subset A,$$

$$A\cap B=A\Longleftrightarrow A\subset B.$$

例 2 看几个例子:

$$[0,2]\cap[1,3]=[1,2].$$

$$[0,2]\cap(0,1)=(0,1).$$

$$\{(x,y):\quad x<2,y<1\}=\{(x,y):\quad x<2\}\cap\{(x,y):\quad y<1\}.$$

$$\{0\}=\bigcap_{n\in N}\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right].$$

$$\bigcap_{n\in N}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\varnothing.$$

$$\{x\in R:\quad f(x)=0\}=\bigcap_{n\in N}\left\{x\in R:\quad |f(x)|<\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\bigcap_{\alpha>0}\{x\in R:\quad |f(x)|<\alpha\}.$$

定义 3 固定一个集合 X，考虑 X 的子集. X 常常称做“空间”，其中的元素也称做“点”. 设 $A\subset X$，定义

$$A^c=\{x\in X:\quad x\overline{\in}A\},$$

叫做 A(在 X 中)的余集或补集(图 3).

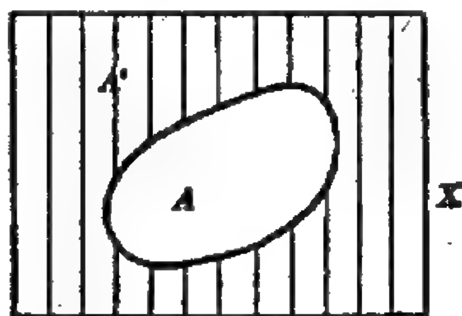


图 3

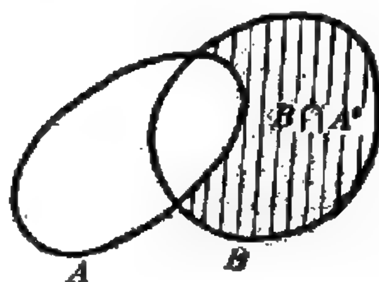


图 4

例 3 取 $X=R$，则 $[0,+\infty)^c=(-\infty,0)$，

$$\{0\}^c=\{x\in R:\quad x\neq 0\},\ Q^c=\{x\in R:\quad x\text{ 为无理数}\},$$

$$(0,1)^c=(-\infty,0]\cup[1,+\infty).$$

若 $A\subset X$, $B\subset X$，则

$$B\cap A^c=\{x\in X:\quad x\in B,\ x\overline{\in}A\}$$

(图 4). 这个集合也叫做 A 在 B 中的余集，即从 B 中去掉 A 的元素所得之集. 显然

$$X^c=\varnothing,\qquad\qquad \varnothing^c=X,$$

$$(A^c)^c=A,$$

$$A\cap A^c=\varnothing,$$

$$A\cap B=\varnothing\Longleftrightarrow A\subset B^c.$$

较为重要的是下列二式:

$$A\subset B\Longleftrightarrow A^c\supset B^c.$$

$$A\cup B=A\cup(B\cap A^c)$$

(图 4). 最后一式表示，任意二集之并可以表示为两个不相交的集合之并.

定理 1(对偶律, DE Morgan 律)

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c,$$
$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c.$$
$$(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c,\quad (\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)^c=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha^c.$$

证明 证第三个等式.

$$x\in(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)^c\Longleftrightarrow x\bar{\in}\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\Longleftrightarrow x\bar{\in}A_\alpha \text{ 对一切 } \alpha\in I \text{ 成立}$$
$$\Longleftrightarrow x\in A_\alpha^c \text{ 对一切 } \alpha\in I \text{ 成立}$$
$$\Longleftrightarrow x\in\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha^c.$$

同理可证明其余三个等式. □

定义 4 设有集合 A 和 B. 在 A 中取一元素 a 放在第一个位置上, 在 B 中取一个元素 b 放在第二个位置上, 得一有序的元素对 (a,b). 全体这种元素对所成之集记为 $A\times B$, 叫做 A 和 B 的 Cartesian 积, 即

$$A\times B=\{(a,b):\quad a\in A, b\in B\}.$$

例 4 若 $A=\{a,b,c\}$, $B=\{\alpha,\beta\}$, 则

$$A\times B=\{(a,\alpha),(b,\alpha),(c,\alpha),(a,\beta),(b,\beta),(c,\beta)\}.$$

又如

$$[0,1]\times[0,1]=\{(x,y):\quad 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}.$$

今后我们记

$$R^2=R\times R=\{(x,y):\quad x\in R, y\in R\},$$
$$R^3=R\times R\times R=\{(x,y,z):\quad x,y,z\in R\},$$
$$R^n=R\times\cdots\times R=\{(x_1,\cdots,x_n):\quad x_i\in R, i=1,\cdots,n\}.$$

我们看到，R^2 中的元素(x, y)就是平面坐标系中的点，R^3 中的元素(x, y, z)就是空间坐标系中的点．我们也把这种点记成 $\boldsymbol{p}=(x, y)$和 $\boldsymbol{p}=(x, y, z)$．平面和空间中的点也就是“向量”，它们有下列运算：

1° 若 $\boldsymbol{p}_1=(x_1, y_1, z_1)$，$\boldsymbol{p}_2=(x_2, y_2, z_2)$，则

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2).$$

2° 若 $\boldsymbol{p}=(x, y, z)$，$c\in R$，则

$$c\boldsymbol{p}=(cx, cy, cz).$$

3° 记

$$\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{p}_2=\langle\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2\rangle=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,$$

叫做 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 的“内积”或“点乘”．又记

$$p=\|\boldsymbol{p}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

叫做向量 $\boldsymbol{p}$ 的“范数”或“模”，即 $\boldsymbol{p}$ 的长度($\boldsymbol{p}$ 点到原点的距离)．在 R^3(或 R^2)中引进了上述运算以后，R^3 便叫做“三维欧氏空间”．

特别记

$$\boldsymbol{i}=(1, 0, 0), \boldsymbol{j}=(0, 1, 0), \boldsymbol{k}=(0, 0, 1),$$

这是坐标轴上三个相互正交的单位向量．于是，任一向量 $\boldsymbol{p}=(x, y, z)$可以表示为

$$\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

在R^3 中还可以定义“外积”或“叉乘”：

$$\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2=[\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2]=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

以上这些运算的几何意义大家都早已熟悉，这里不再赘述．

这些运算(除外积外)也可依样推广到 R^n中．记 R^n 中的点(向量)为 $x=(x_1, \cdots, x_n)$，定义

$$x+y=(x_1, \cdots, x_n)+(y_1, \cdots, y_n)$$

$$=(x_1+y_1, \cdots, x_n+y_n),$$

$$cx=c(x_1, \cdots, x_n)=(cx_1, \cdots, cx_n),$$

其中 $c\in R$. 又

$$x\cdot y=\langle x, y\rangle=x_1y_1+\cdots+x_ny_n,$$

叫做向量 x 和 y 的"内积"或"点乘",这是一个数. 又数

$$\|x\|=\sqrt{\langle x, x\rangle}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$$

叫做向量 x 的"范数". 引进了这些运算以后, R^n 便叫做"n 维欧氏空间". 多元微积分就是在二维、三维和 n 维欧氏空间中研究微分和积分问题的.

在 n 维欧氏空间 R^n 中我们也可以选出 n 个相互正交的单位向量

$$e_1=(1, 0, \cdots, 0), e_2=(0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_n=(0, \cdots, 0, 1),$$

则 R^n 中的一切向量可以表示为

$$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n.$$

关于内积和范数有以下关系式:

$$\langle x, y\rangle=\langle y, x\rangle.$$

$$\langle cx, y\rangle=c\langle x, y\rangle, c\in R.$$

$$\langle x+y, z\rangle=\langle x, z\rangle+\langle y, z\rangle.$$

$$\|x\|\geqslant 0; \quad \|x\|=0\Longleftrightarrow x=0.$$

$$\|cx\|=|c|\|x\|, c\in R.$$

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|. \tag{1}$$



图 5

最后这个不等式叫做"三角形不等式", 它的几何意义是三角形两边之和大于第三边(图 5). 这个不等式来源于 Schwarz 不等式

$$|\langle x, y\rangle|\leqslant\|x\|\|y\|. \tag{2}$$

除了向量范数以外,今后我们还需要矩阵范数. 设有矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

我们定义

$$\|A\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{2}}, \tag{3}$$

叫做矩阵 A 的"范数". 矩阵范数的定义方法实际上就是把矩阵 A 看作 mn 维向量, 因此向量范数的基本性质对矩阵范数都成立: 设 A 和 B 同为 $m\times n$ 阶矩阵, 则

$$\|A\|\geqslant 0; \qquad \|A\|=0 \Longleftrightarrow A=0.$$

$$\|cA\|=|c|\,\|A\|,\ c\in R.$$

$$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|.$$

此外, 若 A 为 $m\times n$ 阶矩阵, B 为 $n\times l$ 阶矩阵, 则

$$\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|. \tag{4}$$

事实上, 设 A 中的行向量为 $a_1, \cdots, a_m$, B 中的列向量为 $b^1, \cdots, b^l$. 由 Schwarz 不等式(2),

$$\|AB\|=\|(a_ib^j)\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}(a_ib^j)^2}$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\|a_i\|^2\|b^j\|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|a_i\|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{l}\|b^j\|^2}$$

$$=\|A\|\,\|B\|.$$

最后指出, 以后在作矩阵运算时, 我们经常把 R^n 中的点同时也表为列向量

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

并且把列向量和行向量都看作矩阵来运算, 请读者注意.

上面这些知识我们假定读者都是已知的, 提出来只不过是为统一语言和符号罢了. 下面我们再回到集合运算.

定义 5 设 $D\subset A\times B$, $a\in A$. 记

$$D_a=\{b\in B:\quad (a,b)\in D\}\subset B,$$

叫做 D 在点 a 的截. 同样, 若 $b\in B$, D 在点 b 的截记为

$$D^b=\{a\in A:\ (a,b)\in D\}\subset A.$$

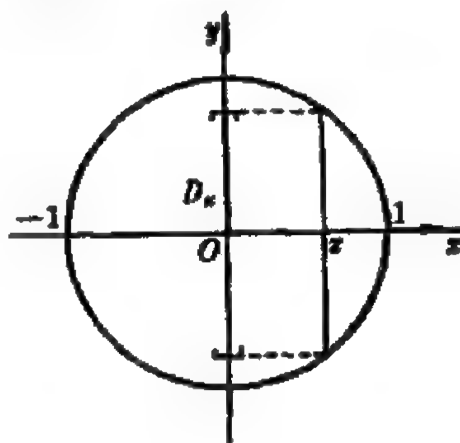


图 6

例 5 在例 4 中, 设

$$D=\{(a,\alpha),(b,\alpha),(a,\beta),(c,\beta)\}\subset A\times B,$$

则

$$D_a=\{\alpha,\beta\},$$

$$D_c=\{\beta\},\ D^\beta=\{a,c\}.$$

例 6 设

$$D=\{(x,y)\in R^2:\quad x^2+y^2\leqslant 1\}\subset R^2$$

(图6). 若 $|x|<1$, 则 $D_x=[-\sqrt{1-x^2},\ \sqrt{1-x^2}]$; 若 $x=\pm 1$, 则 $D_x=\{0\}$; 若 $|x|>1$, 则 $D_x=\varnothing$.

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 集合有哪几种运算, 是怎样定义的?

(2) 两集不相交是什么意思? $A\cap B^c$ 是什么意思?

(3) 何谓对偶律?

(4) 集合的 Cartesian 积是什么意思? 集合的截是什么意思? 怎样用几何图形来表示它们?

(5) 何谓欧氏空间? 欧氏空间中的内积和范数有些什么基本性质?

(6) 你能否证明 Schwarz 不等式?

2. 化简下列集合:

(1) $(A\cup B)\cap B^c$;　　(2) $A\cap B\cap(A^c\cup B^c)$;

(3) $(A\cup B^c)\cup B$;　　(4) $(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(5) $(A\cup(B\cup(C\cup D^c)))^c$;　　(6) $((X^c\cup Y)\cap(X\cup Y^c))^c$;

(7) $(A\cap B\cap C)\cup(A^c\cap B\cap C)\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C^c)$

$\cup (A\cap B^c\cap C^c)\cup (A^c\cap B\cap C^c)\cup (A^c\cap B^c\cap C)$.

3. 证明：$X=\varnothing \Longleftrightarrow Y=(X\cap Y^c)\cup (Y\cap X^c)$.

4. 作出下列点集的图形：

(1) $\{x\in R:\quad |x|>1\}$;

(2) $\{x\in R:\quad x^2-x-2<0\}$;

(3) $[a,b]\times[c,d]$;

(4) $\{(x,y)\in R^2:\quad |x|<1\}$;

(5) $\{(x,y)\in R^2:\quad x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$;

(6) $\left\{(x,y)\in R^2:\quad x^2-\dfrac{y^2}{2}\geqslant 1\right\}$;

(7) $\{(x,y)\in R^2:\quad y>x^2,\ 2x-y<2\}$;

(8) $\left\{(x,y)\in R^2:\quad x^2+\dfrac{y^2}{2}\leqslant 1,\ x\leqslant y\right\}$;

(9) $\{(x,y,z)\in R^3:\quad x+y+z\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$;

(10) $\{(x,y,z)\in R^3:\quad y^2=x\}$;

(11) $\{(x,y,z)\in R^3:\quad z^2\geqslant x^2+y^2,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$;

(12) $\{(x,y,z)\in R^3:\quad x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\ x^2+y^2\leqslant x,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$.

5. (1) 设 $B=\{(x,y):\quad x^2+y^2\leqslant 1\}$. 问 $B\times[0,1]$的体积为何？

(2) 设 $l\subset R^2$ 是一条平面曲线，问 $l\times R$ 为何？

6. $(A\times B)^c$为何？

7. (1) $\bigcap\limits_{n\in N}\left[0,1+\dfrac{1}{n}\right)=?$　　　　(2) $\bigcup\limits_{n\in N}\left(0,1-\dfrac{1}{n}\right]=?$

8. 设 $B=\{(x,y)\in R^2:\quad x+y\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$. 问 B_x 为何？

9. 设 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\in R^3$，证明

$$\|\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}\|^2+\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|^2=2\|\boldsymbol{p}\|^2+2\|\boldsymbol{q}\|^2,$$

并解释其几何意义.

§1.2 映射

在第一章§1.2中我们已经直观地定义了映射(函数)，现在我们要进一步把这一概念严格化. 我们知道，给定了一个一元函数 f，则其图象，即曲线 $y=f(x)$是 R^2 中的一个点集. 这个点集就是

$$\{(x,y)\in R^2:\quad y=f(x)\}.$$

共特点是它与 y 轴的平行直线相交最多只有一点(图 7)，即对于每一个 x 最多只有一个 y 使 (x, y) 属于这个点集．这个事实启发我们可以用集合来定义函数，即用函数的图象来定义函数．

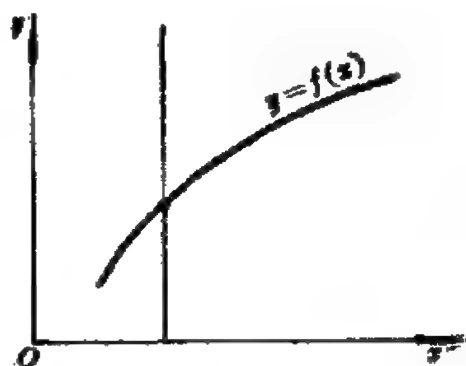


图 7

定义 1 设 X 和 Y 是两个集合，又集合 $f\subset X\times Y$．如果对于每一个 $x\in X$ 最多只有一个 $y\in Y$ 使 $(x,y)\in f$，则说集合 f 有**单值性**．如果 $f\subset X\times Y$ 有单值性，则集合 f 叫做一个函数(映射、变换)．集合

$$\mathrm{dom}f=\{x\in X:\quad \text{存在 } y\in Y \text{ 使} (x,y)\in f\}\subset X$$

叫做 f 的**定义域**；集合

$$\mathrm{rng}f=\{y\in Y:\quad \text{存在 } x\in X \text{ 使} (x,y)\in f\}\subset Y$$

叫做 f 的**值域**．若 $(x,y)\in f$，则记 $y=f(x)$，叫做 f 在 x 的**值**或 x 关于 f 的**像**．

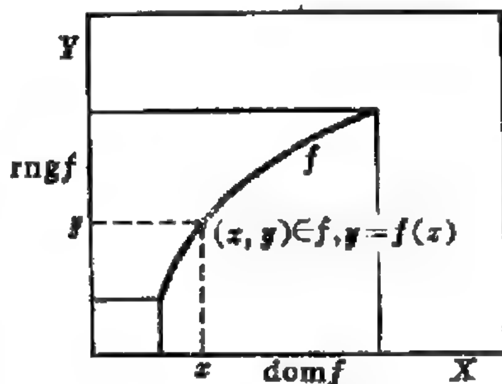


图 8

图 8 是函数概念的一个示意图．在此图中我们把集合 X 和 Y 设想为正交的坐标轴，这当然是很特殊的，只是为了形象化．

按上述定义，如果我们知道了一个函数(点集) f 的定义域 $A=\mathrm{dom}f$，又知道了对于每一个 $x\in A$ 的函数值 $y=f(x)$，则就完全知道了点集 f．所以，一个函数 f 仍然是由定义域 A 和函数值 $f(x)$ $(x\in A)$ 二者来确定的．因此这个函数概念与我们在第一章 § 1.2 中的函数概念完全一致．用集合定义函数是一个比较严格的概念．既然函数是集合，就可以对函数作集合运算，函数与函数就可

以有"⊂"的关系，因此在某些数学领域中表达和证明命题时就会很方便.

我们过去(在第一章第一节中)约定的函数表示方法以及一切有关概念和术语都继续适用. 现在再约定一个表示方法: 若函数f的定义域为A, 则f可以表示为

$$x \longmapsto f(x), \quad x \in A.$$

例如

$$x \longmapsto x^2, \quad x \in R;$$

$$(x, y) \longmapsto x^2 + y^2, (x, y) \in R^2,$$

$$(x, y, z) \longmapsto \ln xyz, \quad x, y, z > 0$$

等都是函数. 在无须用专门符号f, g等去表示一个函数时就可以使用这个表示方法.

我们在第一册中已经约定的关于函数和映射的区分也继续适用: 若$\mathrm{rng} f \subset R$, 则f是函数. 否则称做映射. 这只是本书的约定. 按定义, 函数, 映射, 变换还有算子等都是同一概念, 只不过在不同场合人们的习惯叫法不同而已.

本册讨论的对象是多元函数和由R^n中到R^m中的映射(即$\mathrm{dom} f \subset R^n$, $\mathrm{rng} f \subset R^m$). 上面第二个例子是二元函数, 第三个例子是三元函数. 若$\mathrm{dom} f \subset R^2$, 则$f$是二元函数; 若$\mathrm{dom} f \subset R^3$, 则$f$是三元函数. 例如, 若

$$f(x, y) = x \sin y + y \cos x, \quad (x, y) \in R^2,$$

$$g(x, y, z) = \sqrt{1 - xy}, \quad xy \leqslant 1,$$

则f是二元函数, g是三元函数. 当然, 二元函数也可以看作三元函数; 一元函数也可以看作二元函数和三元函数.

一个二元函数f, 根据定义, 是$R^2 \times R = R^3$中的单值性点集(图 9), 就是说, 与平行于z轴的直线相交最多一点. 这是一个空

间图形，与一元函数是平面图形不同．我们常常把一个二元函数f设想为一张"曲面"，它的方程是

$$z=f(x, y).$$

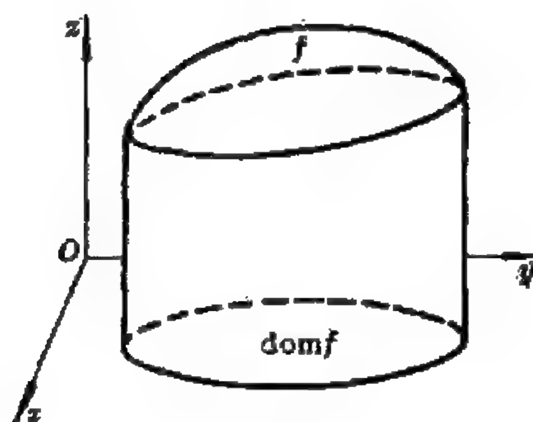


图 9

下面我们要重点介绍的是由 R^n 中到 R^m 中的映射．

设

$$f(t)=(R\cos t, R\sin t), \quad t\in[0, 2\pi].$$

则对于每一个 $t\in[0, 2\pi]$，$f(t)$是R^2平面上一点，所以 f 是一个由$[0, 2\pi]\subset R$ 到 R^2 中的映射．我们知道，像 $f([0, 2\pi])$就是 R^2 平面上以原点为中心，以 R 为半径的圆周．这个圆周我们过去是用参数方程

$$x=R\cos t, y=R\sin t, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

表示的．现在可以统一起来表示为

$$(x, y)=f(t)=(R\cos t, R\sin t), \quad t\in[0, 2\pi].$$

令 $\varphi(t)=R\cos t$, $\psi(t)=R\sin t$, $t\in[0, 2\pi]$，则φ 和 ψ 就叫做映射 f 的"坐标函数"．

一般，设

$$f:\quad [a, b]\to R^2$$

是一个由区间$[a, b]$到 R^2 中的映射，则对于每一个$t\in[a, b]$，$f(t)$

是 R^2 中一点，这一点应有两个坐标，设为$(\varphi(t),\psi(t))$，这样我们就得到定义在$[a,b]$上的两个一元函数 φ 和ψ，分别叫做映射 f 的第一个和第二个**坐标函数**. 于是 f 可以表示为

$$f=(\varphi,\psi).$$

而方程

$$(x,y)=f(t),\quad t\in[a,b] \tag{1}$$

就相当于两个方程

$$x=\varphi(t),y=\psi(t),\quad t\in[a,b]. \tag{2}$$

我们习惯常把像 $f([a,b])$，也就是由方程(1)或(2)表示的平面点集叫做一条"平面曲线"或平面"参数曲线"，方程(1)和(2)中的 t 叫做"参数"．但应指出，即使φ和 ψ 都是连续函数，点集 $f([a,b])$ 和我们直观中的"曲线"也可以大相径庭．以后我们可以看到，在较强的条件下，它局部地确是"真正的"曲线．

同样，设

$$f:\quad [a,b]\to R^3,$$

则映射 f 应有三个坐标函数 φ,ψ,χ，定义域为$[a,b]$．当 $t\in[a,b]$时

$$f(t)=(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)).$$

所以 f 可以表示为

$$f=(\varphi,\psi,\chi).$$

我们把像 $f([a,b])$，也就是由方程

$$\mathbf{p}=(x,y,z)=f(t),\quad t\in[a,b]$$

或

$$x=\varphi(t),y=\psi(t),z=\chi(t),\quad t\in[a,b]$$

表示的空间点集叫做"空间曲线"或空间"参数曲线"．

例 1 螺旋线．容易明白，参数方程

$$x=R\cos t,y=R\sin t,z=t,\quad t\in R$$

表示一条盘旋在圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上的曲线，如图 10 所示.

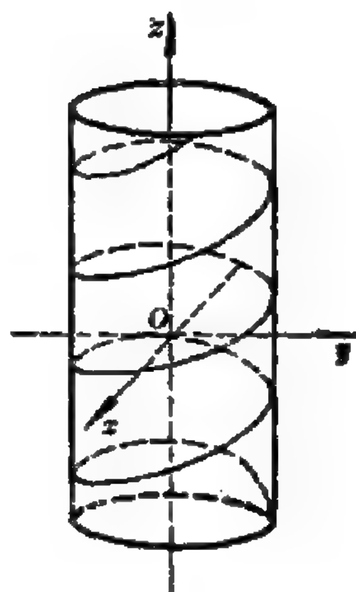


图 10

设 $D\subset R^2$ 是一平面点集，而

$$f:\quad D\to R^3.$$

则映射 f 的三个坐标函数 φ,ψ,χ 都是定义在 D 上的二元函数. 对于一切 $(u,v)\in D$ 有

$$f(u,v)=(\varphi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v)).$$

我们把像 $f(D)$，也就是由方程

$$p=(x,y,z)=f(u,v),\quad (u,v)\in D$$

或

$$x=\varphi(u,v),y=\psi(u,v),z=\chi(u,v),\quad (u,v)\in D$$

表示的空间点集(图 11)叫做"参数曲面"，方程中的 u, v 叫做"参数". 和曲线一样，这并不意味着 $f(D)$ 就是我们直观想象中的一张"曲面".

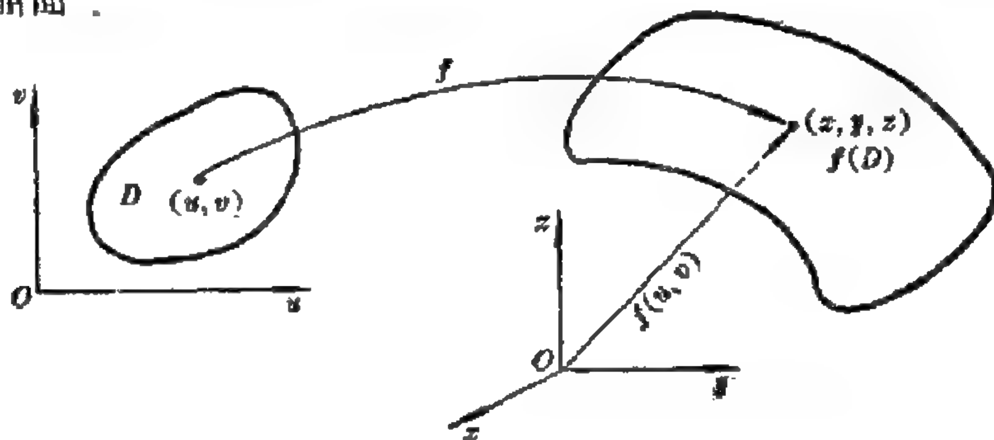


图 11

例 2 设 θ 和 φ 为图 12 所示的两个角度，则方程

$$x=R\sin\theta\cos\varphi,\ y=R\sin\theta\sin\varphi,\ z=R\cos\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$$

表示的图形是以原点为中心，以 R 为半径的球面. (图 13)固定 φ,

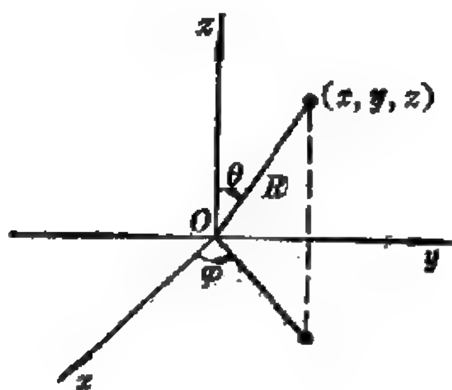


图 12

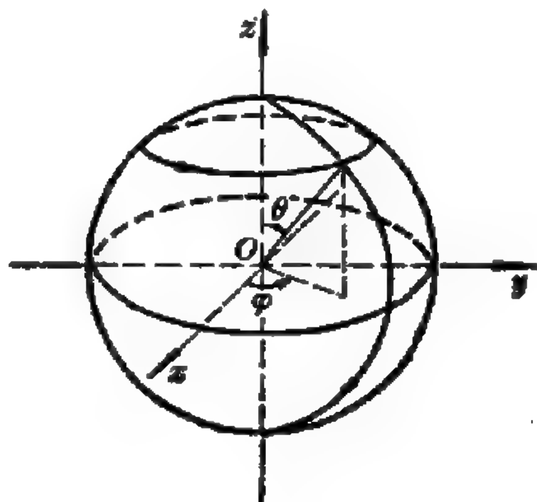


图 13

当 θ 由 0 变到 π 时得球面上一条“经线”；固定 θ，当 φ 由 0 变到 2π 时得球面上一条“纬线”。

例 3 参数方程

$$x=R\cos\theta,\ y=R\sin\theta,$$

$z=z, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, |z|<+\infty$，表示圆柱面 $x^2+y^2=R^2$（图 14）。固定 z，当 θ 由 0 变到 2π 时得圆柱面上的一个圆；固定 θ，当 z 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时得圆柱面上一条平行于 z 轴的直线。

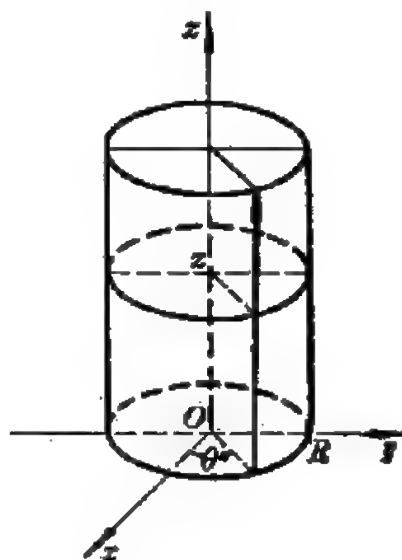


图 14

一般地，设 $D\subset R^n$，又设

$$f:\quad D\to R^m.$$

则映射 f 有 m 个坐标函数 $f_1, \cdots, f_m$，都是定义在 D 上的 n 元函数。当 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in D$ 时有

$$f(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x)).$$

所以 f 可以表示为

$$f=(f_1,\cdots,f_m).$$

我们把像 $f(D)$ 叫做 R^m 中的一张“超曲面”，它的方程是

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

也就是

$$(y_1,\cdots,y_m)=f(x_1,\cdots,x_n),\quad (x_1,\cdots,x_n)\in D,$$

或

$$y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_m=f_m(x_1,\cdots,x_n),\quad (x_1,\cdots,x_n)\in D.$$

下面举出一个对我们有特别重要意义的由 R^n 到 R^m 中的映射，是我们在线代数中已经熟知的. 设有 $m\times n$ 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

将 R^n 中的点用列向量表示(§1.1 中的约定)：

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

对每一点 $x\in R^n$ 定义

$$f(x)=Ax,$$

则 f 是一个由 R^n 到 R^m 中的映射(线性变换)，$\mathrm{dom} f=R^n$. 显然，f 的m 个坐标函数$f_1,\cdots,f_m$ 均是线性 n 元函数，由下列式子定义：

$$f_1(x)=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_m(x)=a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n.$$

而方程 $y=f(x)$就是方程组

$$y_1=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_m=a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n.$$

若 f 和 g 都是从 R^n 中到 R^m 中的映射，则因 f 和 g 的值域均在 R^m 中，f 和 g 就可作代数运算. 我们定义 $\alpha f+\beta g(\alpha,\beta\in R)$ 仍是一个由 R^n 中到 R^m 中的映射，它在 $x\in \mathrm{dom}f\cap \mathrm{dom}g$ 的值为

$$(\alpha f+\beta g)(x)=\alpha f(x)+\beta g(x).$$

同样定义内积 $f\cdot g$. 如果 f 和 g 是值域在 R^3 中的映射，则同样定义外积 $f\times g$.

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 映射的集合定义为何? 在集合定义中定义域是什么? 值域是什么? 值 $f(x)$ 是什么意思?

(2) 下列集合哪些是函数? 哪些不是? 定义域和值域为何?

a. $\{(x,y)\in R^2:\quad x^2+y^2=a^2\}$;　b. $\{(x,y)\in R^2:\quad x^2=y\}$;

c. $\{((x,y),z)\in R^3:\quad z-x^2-y^2=0\}$;

d. $\{((x,y),z)\in R^3:\quad z-\ln(x-y)=0\}$;

e. $\{(x,\sin x)\in R^2:\quad x\in R\}$.

(3) 二元、三元和 n 元函数是什么意思? 一个二元函数 f 是什么样的集合?

(4) 由区间 $[a,b]$ 到 R^2 或 R^3 中的映射有什么几何意义? 由 $D\subset R^2$ 到 R^3 中的映射有什么几何意义? 由 $D\subset R^n$ 到 R^m 中的映射呢?

(5) 例 1、例 2 和例 3 中的方程各定义了什么样的映射? 它们的坐标函数是什么?

(6) 设 f 和 g 是映射, $f\circ g$ (复合)是什么集合?

(7) 设映射 f 有逆射 f^{-1}, 则 f^{-1} 是什么集合?

(8) 设一元函数 f 有反函数 f^{-1}, 则 f^{-1} 的几何图象如何?

2. 设 $f(t)=(t,2t^2,t^2)$, $t\in R$. 则 $f(R)$ 为何? 画出其几何图形.

3. 设 $f(u,v)=(u+v,u-v)$. 则 f 将直线 $u+v=a$ 映成什么? 将 $u-v=a$ 映成什么? 将 $u=a$ 和 $v=a$ 各映成什么? $f(R^2)$, $f([a,b]\times[c,d])$,

$f^{-1}([a,b]\times[c,d])$ 各是什么？

4. 设 $f(u,v)=(u^2,v^2)$. 则 f 将圆周 $u^2+v^2=a^2$ 映成什么？

$$f(R^2),\ f^{-1}(\{(x,y)\in R^2:\quad x+y\leqslant a\}),$$

$f^{-1}(\{(x,y)\in R^2:\quad x\leqslant a\})$, $f^{-1}(\{(x,y)\in R^2:\quad x\leqslant a, y\leqslant b\})$ 都是什么？

5. 设

$$f(u,v)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0.$$

则 $f([u_1,u_2]\times[v_1,v_2])$ 为何？面积为何？

6. 构造一个映射 $f:\quad R^2\to R^2$，将 uv 平面上的曲线 $v=u^2$ 映成 xy 平面上的 x 轴，将 uv 平面上的直线 $v=u$ 映成 xy 平面上的 y 轴.

7. 方程

$$x=\sqrt{u^2+v^2},\ y=u-v$$

定义了一个怎样的映射？

$$f(\{(u,v):\quad u^2+v^2=a^2\})=?\quad f(R^2)=?$$

$$f^{-1}(\{(x,y):\quad x^2-y^2\leqslant 2\})=?$$

8. 方程

$$x=u^2+v^2,\ y=\frac{v}{u}$$

定义了一个怎样的映射？它的定义域和值域为何？上半平面的逆像为何？

9. 试用参数方程表示椭球.

10. 设 $f:\quad R^2\to R^3$ 由方程

$$x=u+v,\ y=u-v,\ z=u^2$$

定义. f 把直线 $u=v$ 映成什么？　把 $u=0$ 映成什么？　把 $v=0$ 映成什么？ $f(R^2)=?$

11. 设

$$g(u,v)=(u\cos v,\ u\sin v,\ 1-u).$$

问 $g(R^2)=?$ $g([0,1]\times[0,2\pi])=?$ $(0,0,1)$ 和 $(1,0,0)$ 的逆像为何？

12. 求 $f\circ g$. 设

(1) $f(x,y)=(x-y,x+y,x)$, $g(u,v)=(u+v,u-v)$.

(2) $f(x,y,z)=(6x-y+2z,2x+4z)$, $g(u,v)=(u-v,2u,2v-u)$.

13. 求映射 f 的逆射. 设

(1) $f(u,v)=(u+v,u-v)$, $(u,v)\in R^2$.

(2) $f(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\varphi)$, $r>0, 0<\theta<2\pi$.

(3) $f(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$,

$$r>0, 0<\theta<\pi, 0<\varphi<2\pi.$$

14. 证明:

(1) $f(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$.

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$. 何时等式成立?

15. 证明

(1) $f^{-1}(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(A_\alpha)$.

(2) $f^{-1}(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(A_\alpha)$.

(3) $f^{-1}(A^c)=f^{-1}(A)^c$.

16. 证明

(1) $f(f^{-1}(B))\subset B$, 并说明何时等式成立?

(2) 设 f 是由 X 到 Y 上的映射, $A\subset X$, 则

$$f(A)^c\subset f(A^c).$$

并说明何时等式成立?

第二节 R^2 拓 扑

§ 2.1 开集和闭集

我们在 § 1.1 中已经指出, 多元微积分是在二维、三维和 n 维欧氏空间中研究微分和积分问题的, 这就首先要研究欧氏空间的"拓扑"结构, 因为它是欧氏空间中分析学的基础. 由于二维欧氏空间 R^2 与高维欧氏空间的拓扑结构是一样的, 所以我们只要研究 R^2 中的拓扑就够了, 得到的知识同样适用于 R^3 和 R^n, 也适用于 R.

在 § 1.1 中, 我们引进了二维欧氏空间 R^2 中的点(也就是向量)范数. 现在, 用范数表达两点之间的距离.

设 $\boldsymbol{p}_1=(x_1,y_1)$, $\boldsymbol{p}_2=(x_2,y_2)$, 则

$$\|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

就是 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 之间的距离. 由范数的三角形不等式(§ 1.1(1)) 我们有

$$\|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2\|\leqslant\|\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_3\|+\|\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_2\|,$$

其中 $\boldsymbol{p}_3=(x_3, y_3)$ 是第三点. 它的几何意义仍然是三角形两边之和大于第三边(图 15).

设 $\boldsymbol{p}\in R^2$, 实数 $r>0$. 则点集

$$B_r(\boldsymbol{p})=\{\boldsymbol{q}\in R^2: \|\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}\|<r\}$$

是以 $\boldsymbol{p}$ 点为中心, 以 r 为半径的圆的内部, 叫做一个"开圆". 开圆是 R^2 中拓扑结构的基础. 在 R^3, R^n 与 R 中分别是"开球", "超开球"与开区间.

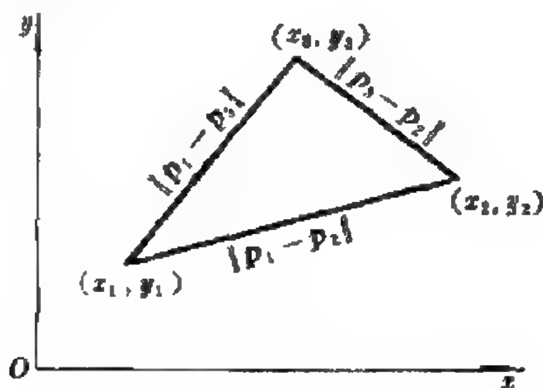


图 15

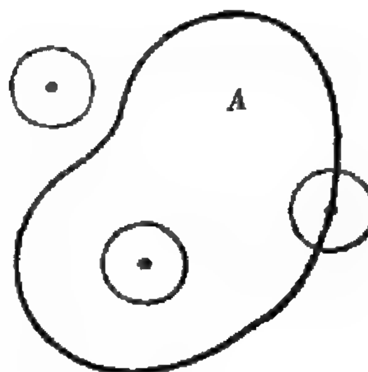


图 16

定义 1 任取集合 $A\subset R^2$, 则 R^2 中的点 $\boldsymbol{p}$ 因之分为三类(图 16): 1) 存在 $r>0$ 使 $B_r(\boldsymbol{p})\subset A$, 这时 $\boldsymbol{p}$ 叫做 A 的**内点**; 2) 存在 $r>0$ 使 $B_r(\boldsymbol{p})\subset A^c$, 这时 $\boldsymbol{p}$ 叫做 A 的**外点**; 3) 对于一切 $r>0$, $B_r(\boldsymbol{p})$ 中既有 A 中之点也有 A^c 中之点, 这时 $\boldsymbol{p}$ 叫做 A 的**边界点**. A 的内点全体所成之集叫做 A 的**核**, 记为 A°. A 的边界点全体所成之集叫做 A 的**边界**, 记为 ∂A. 记 $A^-=A^\circ\cup\partial A$ 叫做 A 的**闭包**.

显然, A 的边界点也是 A^c 的边界点, 反之亦然, 所以

$$\partial A=\partial A^c.$$

又因 A 的外点就是 A^c 的内点，所以我们有

$$R^2 = A^\circ \cup \partial A \cup (A^c)^\circ, \tag{1}$$

且右端三集是互不相交的. 其中 $(A^c)^\circ$ 当然无 A 的点，A° 中皆 A 的点，所以

$$A^\circ \subset A \subset A^-. \tag{2}$$

例 1 看几个例子:

1. 由平面上一个点 $\boldsymbol{a} \in R^2$ 所成的独点集 $\{\boldsymbol{a}\}$ 显然没有内点，即 $\{\boldsymbol{a}\}^\circ = \varnothing$. 平面上除 $\boldsymbol{a}$ 点以外都是点集 $\{\boldsymbol{a}\}$ 的外点: $\{\boldsymbol{a}\}^e = (\{\boldsymbol{a}\}^c)^\circ$. 而点 $\boldsymbol{a}$ 则是 $\{\boldsymbol{a}\}$ 的唯一的边界点: $\partial\{\boldsymbol{a}\} = \{\boldsymbol{a}\}$.

2. 设 $l \subset R^2$ 是一条直线，则同样有

$$l^\circ = \varnothing, l^e = (l^c)^\circ, \partial l = l.$$

3. 整个平面 R^2 无外点和边界点，平面上每一点都是内点: $R^2 = (R^2)^\circ$. 与此形成对照的是空集 $\varnothing$ 无内点: $\varnothing^\circ = \varnothing$.

4. 开圆 $B_r(\boldsymbol{p})$ 中的点都是它的内点，圆周上的点是边界点，圆周向外的点是外点:

$$B_r(\boldsymbol{p}) = (B_r(\boldsymbol{p}))^\circ,$$

$$\partial B_r(\boldsymbol{p}) = \{\boldsymbol{q}:\ \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}\| = r\},$$

$$(B_r(\boldsymbol{p})^c)^\circ = \{\boldsymbol{q}:\ \|\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}\| > r\}.$$

5. R^2 中有理点(坐标皆有理数的点)的全体所成之集，即 $Q \times Q = Q^2$，既无外点也无内点，所有点均是其边界点: $\partial Q^2 = R^2$.

定义 2 如果一个集合 A 的点都是其内点，即 $A = A^\circ$，也就是说，A 不含其边界点，则称 A 为**开集**. 如果 A^c 是开集，即 $A^c = (A^c)^\circ$，则称 A 为**闭集**.

例 2 看几个例子:

1. 由例 1 的 4，开圆 $B_r(\boldsymbol{p})$ 是开集.

2. 上半平面 $\{(x, y) \in R^2:\ y > 0\}$ 是开集，余集 $\{(x, y) \in R^2:\ y \leqslant 0\}$ 是闭集.

3. 由例 1 的 1, $\{a\}^c$ 是开集, 所以 $\{a\}$ 是闭集.

4. 由例 1 的 2, 直线 l 的余集 l^c 是开集, 所以 l 是闭集.

5. 不带边的矩形 $(a, b)\times(c, d)$ 是开集, 带边的矩形 $[a, b]\times[c, d]$ 是闭集. $[a, b)\times[c, d)$ 既非开集, 也非闭集. 同样, $(a, +\infty)\times(b, +\infty)$ 是开集, $[a, +\infty)\times[b, +\infty)$ 是闭集, $[a, +\infty)\times(b, +\infty)$ 既非开集, 也非闭集.

6. 由例 1 的 5, Q^2 既非开集也非闭集.

集合所成之集（其元素皆为集合）叫做**集合类**或**集合族**. 例如, R^2 中的全体开圆所成之集

$$\{B_r(p):\quad p\in R^2, r>0\}$$

是一个集合类, 它的每一个元素是一个开圆. 再如, R^2 中的矩形所成之集

$$\{[a, b]\times[c, d]:\quad a, b, c, d\in R, a<b, c<d\}$$

也是一个集合类. R 中的全体开区间所成之集也是一个集合类.

通常以大写草体字母 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, …记集合类. 设 $\mathscr{A}$ 是一个集合类, $\mathscr{A}$ 中全体集合之并记为

$$\bigcup\mathscr{A}=\bigcup\{A:\quad A\in\mathscr{A}\}.$$

同样, $\mathscr{A}$ 中全体集合之交记为

$$\bigcap\mathscr{A}=\bigcap\{A:\quad A\in\mathscr{A}\}.$$

例如, 设 A 是一开集, 如果把 A 中开圆的全体记为 $\mathscr{B}$, 则易知

$$A=\bigcup\mathscr{B}.$$

我们把 R^2 中开集的全体记为 $\mathscr{O}$, 则有

定理 1

1° $R^2\in\mathscr{O}$, $\varnothing\in\mathscr{O}$ (因而 R^2 和 $\varnothing$ 也都是闭集);

2° $\mathscr{U}\subset\mathscr{O}\Longrightarrow\bigcup\mathscr{U}\in\mathscr{O}$;

3° $A\in\mathscr{O}$, $B\in\mathscr{O}\Longrightarrow A\cap B\in\mathscr{O}$.

证明

1° 由例 1 的 3.

2° 设 $\mathscr{U}\subset\mathscr{O}$. 若 $a\in\bigcup\mathscr{U}$, 则存在 $O\in\mathscr{U}$ 使 $a\in O$. 因 O 是开集, 故 a 是 O 的内点. 但 $O\subset\bigcup\mathscr{U}$, 故 a 也是 $\bigcup\mathscr{U}$ 的内点. 而 a 是 $\bigcup\mathscr{U}$ 中任意一点, 所以 $\bigcup\mathscr{U}$ 中之点都是 $\bigcup\mathscr{U}$ 的内点, 故 $\bigcup\mathscr{U}$ 是开集.

3° 设 $A\in\mathscr{O}$, $B\in\mathscr{O}$. 任取 $a\in A\cap B$, 则 a 同为 A 和 B 的内点. 显见存在 $r>0$ 使 $B_r(a)\subset A\cap B$, 即 a 为 $A\cap B$ 的内点, 所以 $A\cap B$ 是开集. □

定理 2 如果 A 和 B 都是闭集, 则 $A\cup B$ 也是闭集. 如果 $\mathscr{F}$ 是若干闭集所成之集合类, 则 $\bigcap\mathscr{F}$ 也是闭集.

证明 要证 $A\cup B$ 为闭集, 由定义须证 $(A\cup B)^c$ 为开集. 由对偶律(§ 1.1 定理 1)

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c.$$

再由假设和定义 2, A^c 和 B^c 均是开集. 根据定理 1 的 3°, $A^c\cap B^c$ 也是开集, 即 $(A\cup B)^c$ 是开集. 同样,

$$\left(\bigcap\mathscr{F}\right)^c=\left(\bigcap\{F:\quad F\in\mathscr{F}\}\right)^c=\bigcup\{F^c:\quad F\in\mathscr{F}\}.$$

由假设和定理 1 的 2°, $\bigcup\{F^c:\ F\in\mathscr{F}\}$ 是开集, 所以 $\bigcap\mathscr{F}$ 是闭集. □

定义 3 设 $A\subset R^2$. 又 $p\in R^2$ 可以是或不是 A 中之点. 如果对一切 $r>0$, 开圆 $B_r(p)$ 中除 p 外还有 A 中的点, 也就是说

$$A\cap B_r(p)\cap\{p\}^c\neq\varnothing$$

对一切 $r>0$ 成立, 则说 p 是 A 的一个**极限点**. 如果 $p\in A$, 又不是 A 的极限点, 也就是说, 存在 $r>0$ 使 $B_r(p)$ 中除 p 外没有 A 的点, 则说 p 是 A 的**孤立点**.

例 3 设

$$A=\left\{(1,1),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\cdots\right\}.$$

则 $(0,0)$ 是 A 的极限点, $(1,1)$ 是 A 的孤立点. 事实上, A 中全部是

孤立点.

∂A 中的点或在 A 中，或不在 A 中；如果不在 A 中，则由定义必是 A 的极限点. 而 $(A^c)^\circ$ 中既无 A 的点，也无 A 的极限点. 因此由(1)式和(2)式容易知道

$$A^- = A^\circ \cup \partial A = A \cup \{p \in R^2: \quad p \text{ 是 } A \text{ 的极限点}\}. \qquad (3)$$

又显然，A 的孤立点必定是 A 的边界点. 所以 ∂A 中有两种点：A 的一部分极限点和 A 的全部孤立点.

定理 3

1° A° 是开集，A^- 和 ∂A 都是闭集.

2° 若开集 $O \subset A$，则 $O \subset A^\circ$. 因而 A° 是包含在 A 中的最大开集.

3° 若闭集 $F \supset A$，则 $F \supset A^-$. 因而 A^- 是包含 A 的最小闭集.

4° A 为闭集的充分必要条件是 $A = A^-$.

5° A 为闭集的充分必要条件是 A 含有其全部极限点.

证明

1° 设 $p \in A^\circ$，则由定义存在开圆 $B_r(p) \subset A$. 显然，这时 $B_r(p)$ 中的点都是 A 的内点，即 $B_r(p) \subset A^\circ$. 因此 p 是 A° 的内点. 所以 A° 的点都是 A° 的内点，故 A° 是开集. 由此，$(A^c)^\circ$ 是开集，再由(1)式即知 A^- 是闭集. 由定理 1 的 2°，$A^\circ \cup (A^c)^\circ$ 是开集，再由(1)式便知 ∂A 是闭集.

2° 设开集 $O \subset A$. 若 $p \in O$，则 p 是 O 的内点，当然也是 A 的内点，即 $p \in A^\circ$. 所以 $O \subset A^\circ$.

3° 设闭集 $F \supset A$. 则 $F^c \subset A^c$，所以 $(F^c)^\circ \subset (A^c)^\circ$. 但 F^c 是开集，所以 $F^c = (F^c)^\circ$，于是 $F^c \subset (A^c)^\circ$. 由此和(1)式便得

$$F \supset ((A^c)^\circ)^c = A^\circ \cup \partial A = A^-.$$

4° 若 A 为闭集，则 A 就是包含 A 的最小闭集. 由 3°，$A = A^-$. 反之，若 $A = A^-$，则由 1°，A 是闭集.

5° 由 4° 和(3)式。 □

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 任给集合 $A\subset R^2$, 则 R^2 中的点因之分为哪三种点?对于任何集合 A, R^2 中是否都有这三种点?

(2) 任给集合 $A\subset R^2$, 则 A°、∂A, A^- 和 $(A^c)^\circ$ 是些什么集合?R^2 用这些集合分成哪三个部分? A 包含于其中哪两个部分? $A\subset A^\circ$ 对否? $A^\circ\subset A$ 对否? $\partial A\subset A$ 对否? $A^-\subset A$ 对否?$A\subset A^-$ 对否?

(3) 什么叫开集?什么叫闭集?是否有不开不闭的集?为什么说空集 $\varnothing$ 是开集?为什么说 R^2 和 $\varnothing$ 是两个既开又闭的集?

(4) 无限多个开集的交集是否还是开集?无限多个闭集的并集是否还是闭集?

(5) 集合 $A\subset R^2$ 的极限点是什么意思? 孤立点是什么意思?此外还有没有第三种点? A 的极限点是否一定在 A 中? A 的孤立点是否一定在 A 中?

(6) ∂A 中有哪两种点? A 的极限点是否一定在 ∂A 中?是否一定在 A^- 中吗? A 的孤立点是否一定在 ∂A 中?是否一定在 $A\cap\partial A$ 中?

(7) A 中的点或为 A 的点、或为 A 的极限点, 对否? A^- 中的点或为 A 的极限点, 或为 A 的孤立点, 对否?

(8) 为什么说 A° 是开集? 为什么说 A^- 是闭集? ∂A 是开集还是闭集?

(9) 任给集合 $A\subset R^2$, 包含于 A 中的开集是否一定有最大的? 包含 A 的开集是否一定有最小的? 包含于 A 中的闭集是否一定有最大的? 包含 A 的闭集是否一定有最小的?

(10) 如何用闭包或极限点表达闭集的概念?

(11) A 为闭集的充要条件是 $\partial A\subset A$, 对否? A 为开集的充要条件是 $A\cap\partial A=\varnothing$, 对否?

(12) $\partial(\partial A)=\partial A$, 对否? $\partial(\partial A)\subset\partial A$, 对否? $(A^-)^\circ=A^\circ$, 对否?

2. 指出下列集合 A 的 A°、∂A, A^-, 设

(1) $A\subset R^2$ 为有限集.

(2) $A=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$.

(3) $A=\{(x, y):\ 0<y<x+1, x>-1\}$.

以上集合哪个是开的？哪个是闭的？哪个是不开不闭的？

3. 证明：$p\in A^-\Longleftrightarrow B_r(p)\cap A\neq\varnothing$ 对一切 $r>0$ 成立.

4. 证明：$\partial A=A^-\cap(A^c)^-=A^-\cap(A^\circ)^c$.

5. 证明：$A^\circ=A^{c-c}$.

6. 证明 A 的极限点集是闭集.

7. 证明：$(A\cup B)^-=A^-\cup B^-$, $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$.

8. 作出闭集 $A_1, A_2, \cdots$ 使 $\bigcup\limits_{n\in N}A_n=B_1(0)$；

作出开集 $A_1, A_2, \cdots$ 使 $\bigcap\limits_{n\in N}A_n=B_1(0)^-$.

9. 证明 $(\bigcap\limits_{i\in I}A_i)^-\subset\bigcap\limits_{i\in I}A_i^-$，$(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)^\circ\supset\bigcup\limits_{i\in I}A_i^\circ$.

举例说明等式不一定成立.

10. 设 $P(x, y)=x$. P 叫做“投影算子”. 证明，若 $A\subset R^2$ 是开集，则 $P(A)$ 是 R 中的开集. 举出例子：A 是闭集，而 $P(A)$ 不是闭集.

11. 设 $A\subset R$. 证明：

(1) A 和 A^c 都是开集，当且仅当 $A=R$ 或 $A=\varnothing$.

(2) $\partial A=\varnothing\Longleftrightarrow A=R$ 或 $A=\varnothing$.

12. 设 $A\subset R^2$，证明上题.

§2.2 R^2 的完备性

在 R 中我们看到数列有很大的作用，同样在 R^2 中“点列”也有很大的作用. 和数列一样，R^2 中的一个点列就是一列按序排列的点：

$$p_1, p_2, \cdots. \tag{1}$$

我们把它简记为 $(p_n)_1^\infty$ 或 (p_n). 它的各项可以重复，即不同的项可以是同一点. 因此把它看成一个点集

$$\{p_1, p_2, \cdots\} \tag{2}$$

时，其中可能有无限个点；可能只有有限个点，这时它是一个有限集. 然而作为点列，(1) 有无限多项.

定义 1 设有点列(1). 如果有一点 a，使得任给 $\varepsilon>0$，存在 $n_\varepsilon\in N$，当 $n>n_\varepsilon$ 时

$$\|\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{a}\|<\varepsilon,$$

也就是当 $n>n_\varepsilon$ 时 $\boldsymbol{p}_n\in B_\varepsilon(\boldsymbol{a})$，则说 $\boldsymbol{a}$ 为点列(1)的**极限**；记号与数列极限相同，记为

$$\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{p}_n=\boldsymbol{a}.$$

这时称点列(1)为**收敛的**，否则(1)便是**发散的**.

定理 1 点列 $(\boldsymbol{p}_n)=((x_n,y_n))$ 收敛于点 $\boldsymbol{a}=(\alpha,\beta)$ 的充分必要条件为

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\alpha,\ \lim_{n\to+\infty}y_n=\beta.$$

证明 因为当 $n\in N$ 时

$$\|\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{a}\|=\sqrt{(x_n-\alpha)^2+(y_n-\beta)^2},$$

所以

$$|x_n-\alpha|\leqslant\|\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{a}\|\leqslant|x_n-\alpha|+|y_n-\beta|,$$
$$|y_n-\beta|\leqslant\|\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{a}\|\leqslant|x_n-\alpha|+|y_n-\beta|.$$

这便证明了定理. □

例如，因为 $\lim\frac{1}{n}=0$，$\lim\sqrt[n]{n}=1$，所以

$$\lim\left(\frac{1}{n},\sqrt[n]{n}\right)=(0,1).$$

我们应特别注意，点列的极限和点集的极限点是两个不同的概念. 如果点列(1)收敛于点 $\boldsymbol{a}$，点 $\boldsymbol{a}$ 未必是点集(2)的极限点. 例如点列

$$\boldsymbol{p}_n=(1,1),\quad n\in N$$

显然收敛于点 $(1,1)$，但相应的点集(2)这时只有一个孤立点 $(1,1)$. 反之，如果点集(2)有极限点 $\boldsymbol{a}$，点列(1)未必收敛于 $\boldsymbol{a}$. 这只要看点列

$$\boldsymbol{p}_n=\left((-1)^n+\frac{1}{n},0\right),\qquad n\in N.$$

此时相应的点集(2)有两个极限点(1, 0)和(−1, 0), 它们都不是这个点列的极限.

如果点列(1)收敛于点 $\boldsymbol{a}$, 且有无限多个 $n\in N$ 使 $\boldsymbol{p}_n\neq\boldsymbol{a}$, 则显然 $\boldsymbol{a}$ 也是点集(2)的极限点. 反之, 如果一个点集 A 有极限点 $\boldsymbol{a}$, 则易见 A 中一定有点列收敛于 $\boldsymbol{a}$. 因此, 由 § 2.1 定理 3 的 5° 我们得

定理 2 $A\subset R^2$ 为闭集的充分必要条件是, 若 A 中的点列 $(\boldsymbol{p}_n)$ 收敛于一点 $\boldsymbol{a}$, 则 $\boldsymbol{a}\in A$.

由定理 1, 从 R 的完备性可得 R^2 的完备性. 我们先给出定义:

定义 2 设有点列 $\boldsymbol{p}_n\in R^2, n\in N$. 如果对于任给 $\varepsilon>0$, 存在 $n_\varepsilon\in N$, 当 $n, m>n_\varepsilon$ 时

$$\|\boldsymbol{p}_n-\boldsymbol{p}_m\|<\varepsilon,$$

则说 $(\boldsymbol{p}_n)$ 是一基本点列或 Cauchy 点列.

和定理 1 同样推理可得

定理 3 点列 $(\boldsymbol{p}_n)=((x_n, y_n))$ 是 Cauchy 点列的充分必要条件为 (x_n) 和 (y_n) 都是 Cauchy 数列.

由定理 1 和定理 3 又得

定理 4 点列 $(\boldsymbol{p}_n)$ 收敛的充分必要条件为 $(\boldsymbol{p}_n)$ 是一 Cauchy 点列.

注 定理的充分性就是 R^2 的完备性. 因此, R^2 是完备的.

设 $A\subset R^2$. 记

$$\operatorname{diam} A=\sup\{\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}\|:\quad \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\in A\},$$

叫做点集 A 的直径.

定理 5 (G. Cantor) 设 $F_1\supset F_2\supset\cdots$ 是一 "非增" 闭集序列, 且 $F_n\neq\varnothing\ (n\in N)$. 若

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam} F_n=0,$$

则 $F_1, F_2, \cdots$ 有唯一的公共点，即 $\bigcap_{n\in N} F_n$ 是一独点集.

证明 因为 F_n 都不空，所以对于每一个 $n\in N$ 可得一点 $p_n\in F_n$，于是得一点列 (p_n). 因为 (F_n) 非增，所以

$$\{p_n, p_{n+1}, \cdots\}\subset F_n, \quad n\in N.$$

因此当 $m>n$ 时

$$\|p_n-p_m\|\leqslant \operatorname{diam} F_n\to 0 \qquad (n\to+\infty).$$

即 (p_n) 是一 Cauchy 点列，故必收敛于一点 a. 但 F_n 都是闭集，而当 $k\geqslant n$ 时 $p_k\in F_n$，所以 $a\in F_n$ 对一切 $n\in N$ 成立(定理 2)，即 $a\in \bigcap_{n\in N} F_n$.

如果又有 $b\in \bigcap_{n\in N} F_n$，则 $a, b\in F_n$ 对一切 $n\in N$ 成立，因此

$$\|b-a\|\leqslant \operatorname{diam} F_n$$

对一切 $n\in N$ 成立. 令 $n\to+\infty$，由所设便得 $b=a$. 即 $\bigcap_{n\in N} F_n=\{a\}$ 是一独点集. □

习 题

1. 回答下列问题：

(1) 何谓点列极限？点列收敛与点列的坐标有何关系？

(2) 点列极限是否一定是点列的相应点集的极限点？点列极限是相应点集的极限点的充分必要条件为何？

(3) 点集的极限点是否一定是点集中一个点列的极限？反之对否？

(4) 如何用点列极限表达闭集的概念？

(5) 何谓 R^2 的完备性？R^2 的完备性源出何处？

(6) 定理 5(G. Cantor) 对应于第四章中什么定理？

(7) 非增闭集序列的交集是否一定非空？

2. 证明 $A\subset R^2$ 是闭集的充分必要条件为 A 是完备的，即 A 中的 Cauchy 点列一定收敛于 A 中某点.

3. 假设 G. Cantor 定理成立，试由此证明 R^2 的完备性.

4. 设 $A, B\subset R$. 证明：若 A, B 是开集，则 $A\times B$ 是开集；若 A, B 是闭集，则 $A\times B$ 是闭集.

§2.3 紧致性

我们在第四章中已经知道闭区间$[a, b]$是紧致的，现在我们要进一步研究，欧氏空间中什么点集是紧致的.

定义 1 设 $A\subset R^2$. $\mathscr{G}$ 是 R^2 中若干开集所成之集合类，若 $\bigcup\mathscr{G}\supset A$，则说 $\mathscr{G}$ 是 A 的一个**开覆盖**，或说 $\mathscr{G}$"覆盖"A. 如果在 A 的每一个开覆盖 $\mathscr{G}$ 中都有一有限的子类$\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$覆盖 A，则称 A 是**紧致**的.

定理 1 (Heine-Borel) $A\subset R^2$ 为紧致集的充分必要条件是 A 为有界闭集.

证明 (必要性) 设 A 为紧致集. 考虑以原点 $\mathbf{0}=(0,0)$ 为中心，以 $n\in N$ 为半径的开圆族 $\mathscr{B}=\{B_n(\mathbf{0}):\ n\in N\}$. 因为 $\bigcup\mathscr{B}=R^2\supset A$，所以 $\mathscr{B}$ 是 A 的一个开覆盖. 由假设，$\mathscr{B}$ 中有有限个开圆 $B_1(\mathbf{0}), \cdots, B_n(\mathbf{0})$ 覆盖 A，所以 $B_n(\mathbf{0})\supset A$，故 A 有界.

再证 A 是闭集. 只要证 A^c 是开集. 设 $\boldsymbol{p}\in A^c$. 对于每一点 $\boldsymbol{q}\in A$ 必定存在充分小的开圆 $B_r(\boldsymbol{q})$ 使得 $B_r(\boldsymbol{q})\cap B_r(\boldsymbol{p})=\varnothing$. 所有这种开圆的全体覆盖 A. 由假设，其中存在有限个开圆 $B_{r_1}(\boldsymbol{q}_1), \cdots, B_{r_n}(\boldsymbol{q}_n)$ 覆盖 A. 因为 $B_{r_i}(\boldsymbol{q}_i)\cap B_{r_i}(\boldsymbol{p})=\varnothing\ (i=1, \cdots, n)$，所以

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(\boldsymbol{q}_i) \qquad 和 \qquad U=\bigcap_{i=1}^{n} B_{r_i}(\boldsymbol{p})$$

不相交，所以 $A\cap U=\varnothing$. 因此 $\boldsymbol{p}\in U\subset A^c$. 但 U 是一开集(§2.1,

定理 1, 3°), 所以 $p\in(A^c)^\circ$. 故 A^c 是开集.

(充分性) 设 A 为有界闭集, $\mathscr{G}$ 为 A 的任一开覆盖. (反证) 设 $\mathscr{G}$ 无有限的子覆盖. 作一闭矩形 $I\supset A$(图 17). 将 I 等分为四

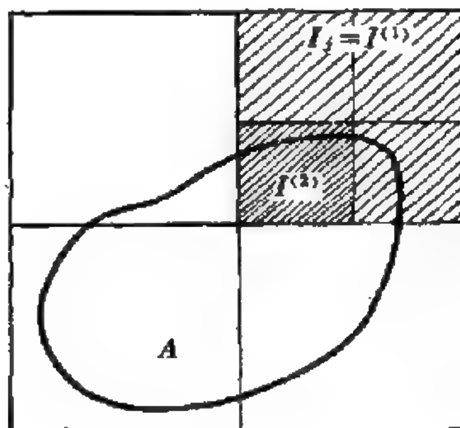


图 17

个闭矩形 I_1、I_2, I_3, I_4. 则 $I_i\cap A(i=1, 2, 3, 4)$ 中至少有一个, 设为 $I_j\cap A$, 不能被 $\mathscr{G}$ 的有限子类覆盖. 改记 $I_j=I^{(1)}$. 将 $I^{(1)}$ 再等分为四个闭矩形, 又可得出一个闭矩形 $I^{(2)}\subset I^{(1)}$, $I^{(2)}\cap A$ 不能被 $\mathscr{G}$ 的有限子类覆盖. 如此下去, 便得一非增闭矩形序列 $I^{(1)}\supset I^{(2)}\supset\cdots$, 每一个 $I^{(n)}\cap A$ 都不能被 $\mathscr{G}$ 的有限子类覆盖, 当然都非空, 并且 $\lim\mathrm{diam}I^{(n)}=0$. 由 § 2.2 定理 5, $\bigcap\limits_{n\in N}I^{(n)}=\{a\}$. 显然 A 中有点列收敛于 a. 因 A 是闭集, 所以 $a\in A$. 于是在 $\mathscr{G}$ 中应有一开集 G 使 $a\in G$. 因 G 是开集, 当 n 充分大时应有 $I^{(n)}\subset G$. 于是得 $I^{(n)}\cap A\subset G$. 这是矛盾. ▯

定义 2 设 $A\subset R^2$. 如果 A 中的任一点列皆有收敛的子列收敛于 A 中的点, 则称 A 为**列紧的**.

定理 2 $A\subset R^2$ 为列紧的充分必要条件是 A 为有界闭集.

证明 (必要性) 若 A 为无界, 则易知 A 中必有无收敛子列的点列, 故 A 不能是列紧的. 若 A 非闭集, 则 A 中有一点列(p_n)

收敛于一点 $a\overline{\in}A$(§2.2 定理 2)，当然(p_n)的一切子列也都收敛于a，然而 $a\overline{\in}A$，故 A 也不能是列紧的．这就证明了必要性．

(充分性)设 A 为有界闭集．(反证)设 A 不是列紧的，则在 A 中有一点列(p_n)无收敛于 A 中之点的子列．因此对于每一点 $a\in A$ 一定有一开圆 $B_r(a)$，圆中最多只含(p_n)的有限多项．这些圆覆盖 A，由定理 1，有有限多个圆 $B_{r_1}(a_1),\cdots,B_{r_m}(a_m)$覆盖 A，当然也覆盖(p_n)．这显然是矛盾．□

注 显然，有界闭集列紧等价于有界点列有收敛子列．由于在欧氏空间中，点列具有特别重要的作用，因此我们往往应用列紧性，即有界点列有收敛子列，而较少地应用紧致性．

以上我们看到：

R^2 的完备性$\Longrightarrow$Cantor“闭集套”原理$\Longrightarrow$有界闭集紧致$\Longrightarrow$有界闭集列紧(有界点列有收敛子列)．

容易证明(习题)：

有界点列有收敛子列$\Longrightarrow R^2$ 是完备的．

所以这四条命题是相互等价的，因此说的是同一件事情．这是实数连续性在 R^2 中的反映．

习　题

1．回答下列问题：

(1) 集合 $A\subset R^2$ 为紧致的是什么意思？为列紧的是什么意思？二者都等价于什么？

(2) 集合 A 非列紧是什么意思？

(3) 为什么说有界闭集列紧等价于有界点列有收敛子列？

(4) R^2 的完备性有哪些等价命题？

2．试从有界点列有收敛子列证明 R^2 的完备性．

3．设 P 是投影算子(§2.1 习题 10)，$A\subset R^2$ 是紧致集，证明 $P(A)$ 也是紧致集．

4. 设 $A, B\subset R$. 证明 $A\times B$ 为紧致集的充分必要条件是 A 和 B 都是紧致集.

5. 设 $A\subset R^2$ 是紧致的，$\mathscr{G}$ 是 A 的一个开覆盖. 证明：存在 $\lambda>0$，若 $B\subset A$，$\operatorname{diam}B<\lambda$，则存在 $G\in\mathscr{G}$ 使 $B\subset G$. λ 叫做 $\mathscr{G}$ 的一个"Lebesgue 数".

6. 证明 $A\subset R^2$ 为紧致的充分必要条件是：若 $\mathscr{F}$ 是 R^2 中的一个闭集类，且 $A\cap(\cap\mathscr{F})=\varnothing$，则有 $A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{F}$ 使 $A\cap\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\varnothing$.

7. 如果 $A\subset R^2$ 的每一个无穷子集在 A 中都有一个极限点，则说 A 是"Frechet 紧"的. 证明在 R^2 中 Frechet 紧与列紧（从而与紧致）是等价的.

8. 设 (p_n) 为有界点列. 证明：如果 (p_n) 的一切收敛子列均收敛于 a，则 $\lim p_n=a$.

9. 设 $K\subset R^2$ 为紧致集，其中任意不同的二点 p 和 q 之差 $p-q$ 均非形如 $(2m\pi, 2n\pi)$ 的点（m, n 为整数），证明存在开集 $U\supset K$ 使得映射 $(x, y)\longmapsto(\cos x, \sin y)$ 在 U 上为单射.

§2.4 连通性

在第一册中我们看到，一元微积分的命题都是在区间上建立起来的. 区间的一个特点是有"连通性"，不断开. 在 R^2（同样在 R^n）中也有具有连通性的点集，一部分多元微积分的命题只在有连通性的点集上成立.

定义 1 点集 $E\subset R^2$ 为**连通**的意思是说：若 $E=A\cup B$，其中 A 和 B 为不相交的非空集，则或者 A 含有 B 的极限点，或者 B 含有 A 的极限点. 也就是说，$A\cap B^-$ 和 $A^-\cap B$ 至少有一非空. 连通的开集叫做**区域**. 区域的闭包叫做**闭域**.

但对于开集来说，连通性还有另一种表达形式. 设 $D\subset R^2$ 是一开集. 如果 D 可以分为两个不相交的非空开集之并：$D=A\cup B$，则因 A 中的点都是 A 的内点，B 中的点都是 B 的内点，于是 A 中无 B 的极限点，B 中无 A 的极限点，所以 D 是不连通的. 反之，如果 D 是不连通的，则存在不相交的非空集 A 和 B 使 $D=A\cup B$，且 A 中

无 B 的极限点，B 中无 A 的极限点，显见 A 和 B 均是开集. 因此我们得到:

定理 1 设 $D\subset R^2$ 是一开集，则 D 为连通集(即为区域)的充分必要条件是 D 不能分为两个不相交的非空开集之并.

§2.1 习题 11(1)说的就是实数空间 R 的连通性，这是实数连续性的又一个等价命题. 同样可知，一切区间 $I\subset R$ 都是连通的. §2.1 习题 12 说的是平面 R^2 的连通性.

为了判别一个点集是否连通，我们再引进一个更为直观的连通性概念.

定义 2 设 $E\subset R^2$. 如果对于任何两点 p, $q\in E$, 都有一条"连续曲线"$l\subset E$ 联结 p 和 q, 则说点集 E 是**道路连通**的. 也就是说，l 的方程是

$$x=\varphi(t), y=\psi(t),\quad t\in[a,b],$$

其中 φ 和 ψ 都是 $[a, b]$ 上的连续函数，当 $t\in[a, b]$ 时 $(\varphi(t), \psi(t))\in E$, 且

$$(\varphi(a), \psi(a))=p, (\varphi(b), \psi(b))=q.$$

由区间的连通性易知

定理 2 道路连通集都是连通集.

证明 设 $E\subset R^2$ 是道路连通集. 设 $E=A\cup B$, 其中 A 和 B 为不相交的非空集. 在 A 中任取一点 p, 在 B 中任取一点 q, 则有定义 1 中的曲线 l 联结 p 和 q. 设

$$\Gamma=\{t\in[a,b]:\quad(\varphi(t),\psi(t))\in A\},$$

$$\Delta=\{t\in[a,b]:\quad(\varphi(t),\psi(t))\in B\}.$$

则 Γ 和 Δ 为不相交的非空集，且 $[a, b]=\Gamma\cup\Delta$. 由区间的连通性，不妨设 Γ 中有一个 Δ 的极限点 c. 则由 φ 和 ψ 的连续性易见，A 中有 B 的极限点 $(\varphi(c), \psi(c))$. 所以 E 是联通集. □

由此又知，道路连通的开集都是区域. 例如

$R^2, B_r(p), \{(x,y)\in R^2:\quad a<x<b\}, \{(x,y)\in R^2:\quad y\geqslant 0\}$ 都是道路连通集，前三者是区域．$\{a\}^c$ 也是一个区域．直线 $l\subset R^2$ 的一边也是区域．但 l^c 不是区域，因为它显然没有连通性．

下面我们再介绍一个识别平面区域的命题．

定义 3 如果平面曲线 l 可以表示为

$$x=\varphi(t), y=\psi(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta,$$

且当 $t_1, t_2\in[\alpha,\beta], t_1\neq t_2$ 时

$$(\varphi(t_1),\psi(t_1))\neq(\varphi(t_2),\psi(t_2)), \tag{1}$$

(即 l 无"重点")则称 l 为一条**简单曲线**．如果

$$(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=(\varphi(\beta),\psi(\beta)),$$

而当 $t_1, t_2\in(\alpha,\beta)$, $t_1\neq t_2$ 时(1)式成立(即除起点和终点重合以外，没有其它重点)，则称 l 是一条"封闭"的简单曲线．连续的(封闭或不封闭的)简单曲线叫做 Jordan 曲线．

定理 3 如果 $l\subset R^2$ 是一条封闭的 Jordan 曲线，则 l^c 为两个不相交的区域．一个是有界的，叫做 l 的"内部"；一个是无界的，叫做 l 的"外部"(图 18)．

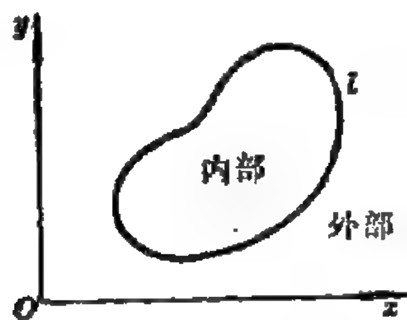


图 18

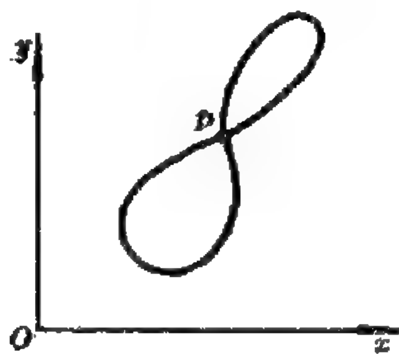


图 19

这个命题在直观上是非常清楚的，但证明殊难，不属本书的范围，故略．

像图 19 中的封闭曲线，其余集就不是两个区域，它有一个重点 p．

习　题

1. 问答下列问题:

(1) 何谓连通集？何谓区域？

(2) 如何表达开集的连通性？

(3) 为什么 R 中的区间是连通的？

(4) 道路连通性与连通性有何关系？

(5) 道路连通的开集是不是区域？

(6) 何谓简单曲线？何谓 Jordan 曲线？

(7) 封闭的 Jordan 曲线将平面 R^2 割开成两个何种点集？

2. 证明:若 E 为连通集, 则 E^- 也是连通集。

3. 证明区域是道路连通的开集.

4. 举出一连通集 E, 其 E^- 不是道路连通的. 因此连通集并不都是道路连通的.

5. 证明: 若 $I\subset R$ 是连通集, 则 I 是一区间.

第三节　连续函数

§3.1　函数极限

用定义一元函数极限同样的方法可以定义二元函数的极限.

定义 1　设 $D\subset R^2$, f: $D\to R$ 是一个二元函数; $\boldsymbol{p}_0=(x_0, y_0)$ 是 D 的一个极限点; 又 A 是一数. 如果对于任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\boldsymbol{p}=(x, y)\in D$ 且 $0<\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_0\|<\delta$ 时

$$|f(\boldsymbol{p})-A|=|f(x, y)-A|<\varepsilon,$$

则说 f 在点 $\boldsymbol{p}_0$ 有极限 A, 记为

$$\lim_{\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}_0} f(\boldsymbol{p})=A$$

或

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A.$$

这个极限也常常叫做"二重极限".

我们看到，二元函数(三元函数和 n 元函数)与一元函数极限的定义相同，因此有关极限的性质也相同，这里不再细述。

例 1 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$，$(x,y)\neq(0,0)$。求极限

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$.

解 我们看到，函数 f 在点 $\mathbf{0}$ 无定义，但 $\mathbf{0}$ 显然是 f 的定义域的极限点，因此我们可以考虑 f 在点 $\mathbf{0}$ 的极限。因为当 $(x,y)\neq\mathbf{0}$ 时

$$0\leqslant\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{|xy|}{2}\cdot\frac{2|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|xy|}{2}.$$

任给 $\varepsilon>0$，只须取 $\delta_\varepsilon=\sqrt{2\varepsilon}$，则当 $0<\|(x,y)-\mathbf{0}\|=\|(x,y)\|<\delta_\varepsilon$ 时 $|x|<\delta_\varepsilon$，$|y|<\delta_\varepsilon$，所以

$$0\leqslant\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}<\frac{\delta_\varepsilon^2}{2}=\varepsilon.$$

由定义，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}f(x,y)=0$。 □

我们讨论一元函数时，定义域都是区间，几乎不考虑其它点集。而现在讨论二元函数的定义域既然已是一般的点集 D，自然就可以考虑 D 中的各种子集。因此在考虑 $f(p)$ 当"动点" p 变动时的极限，就可以考虑点 p 在 D 中沿各种不同子集去接近 p_0，这是其一。其二，当点 $p=(x,y)$ 接近点 $p_0=(x_0,y_0)$ 时坐标 x 和 y 分别同时地接近 x_0 和 y_0，因此我们还可以考虑 x 和 y 按先后次序分别接近 x_0 和 y_0。由以上这些考虑，我们提出下列二注。

注 1 设函数 f 的定义域为 $D\subset R^2$，又 $\lim\limits_{p\to p_0}f(p)=A$。如果 $l\subset D$，且 p_0 是 l 的极限点(图 20)，则 $\lim\limits_{\substack{p\to p_0\\p\in l}}f(p)=A$。这个极限的意思是把定义 1 中 p 的"活动范围"从 D 限制到 D 中的 l 上，也就是说，视 f 的定义域为 l 则 f 在 p_0 的极限也是 A。

注 2 二元函数除了上面的二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 以外，还有一种极限，叫做"累次极限"，即

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

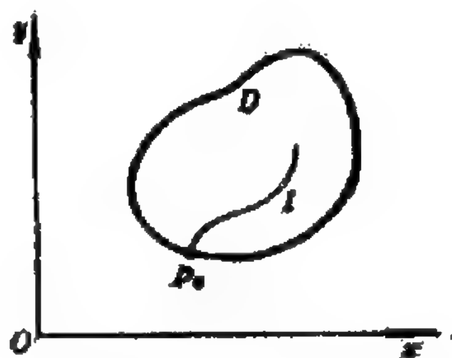


图 20

第一个极限的意思是，先固定 y，计算当 $x\to x_0$ 时 $f(x,y)$ 的极限，也就是计算一元函数 $f(\cdot,y)$ 在 x_0 的极限，这个极限是数

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

再计算当 $y\to y_0$ 时 $\varphi(y)$ 的极限，也就是再计算函数 φ 在 y_0 的极限：

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

同样理解第二个累次极限．必须注意，二重极限和累次极限是不同的概念．二重极限和两个累次极限，三者中一个或两个存在不能导致其余的极限也存在．

例 2 讨论函数 $(x,y)\longmapsto\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 在原点的二重极限和累次极限．

解 因为(图 21)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0,$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

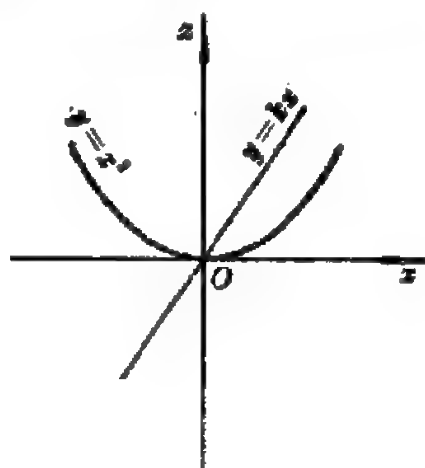


图 21

故由上面的注 1，二重极限不存在．

但两个累次极限都存在：

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=0.\quad\square$$

例 3 研究函数$(x,y)\longmapsto y\sin\frac{1}{x}$ 在原点的二重极限和累次极限.

解 因为

$$\left|y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant y\qquad(x\neq0),$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left|y\sin\frac{1}{x}\right|=0.$$

又累次极限

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}y\sin\frac{1}{x}=0.$$

但另一个累次极限显然不存在. □

最后我们再用一个例子来说明

$$\lim_{\|p\|\to+\infty}f(p),\quad\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}f(x,y)$$

等极限.

例 4 计算极限$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}xye^{-x^2y^4}$.

解 因为

$$|xye^{-x^2y^4}|=\frac{|xy|}{1+x^2y^4+\cdots}\leqslant\frac{1}{|xy^3|},$$

显见所求极限为 0. □

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 一元函数的极限是怎样定义的?

(2) 何谓累次极限？累次极限和二重极限的存在性是否相互依赖？

(3) 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ 的定义是否可改述为：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$，$0<|y-y_0|<\delta$ 且 $(x,y)\in D$ 时有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

(4) 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A$，又 $f(x,y)=\varphi(x)$ 对一切 x，y 成立，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=?$$

(5) 如果对于一切通过原点的直线 l 均有 $\lim\limits_{\substack{p\to 0\\ p\in l}} f(p)=A$，是否有

$$\lim_{p\to 0} f(p)=A?$$

(6) 如何定义极限 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to a}} f(x,y)$？

2. 讨论下列函数 f 在点 $(0,0)$ 的二重极限和累次极限，设

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.　　(2) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$.

3. 证明：如果二元函数在一点的二重极限和累次极限均存在，则必相等.

4. 设 f 是定义在 $D\subset R^2$ 上的二元函数，p_0 是 D 的极限点. 证明：$\lim\limits_{p\to p_0} f(p)=A$ 的充分必要条件是对于 D 中一切收敛于 p_0 的点列 $\{p_n\}$ 均有

$$\lim_{n\to\infty} f(p_n)=A.$$

5. 试建立复合函数求极限的命题.

6. 计算下列累次极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^4}$，交换次序；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\lim\limits_{y\to 0^+}\dfrac{x^y}{1+x^y}$，交换次序；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$，交换次序；

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy}$，交换次序.

7. 计算下列二重极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$；　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\frac{\sin xy}{x}$;

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^4}$;

(7) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8. 设 $a, b, x\in R^n$, 讨论下列极限:

(1) $\lim\limits_{\|x\|\to +\infty}\frac{(a\cdot x)(b\cdot x)}{x^2}$;

(2) $\lim\limits_{\|x\|\to +\infty}\frac{\|x-a\|}{\|y-b\|}$.

9. 设 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=0$, 且在 (x_0, y_0) 附近有

$$|f(x,y)-\varphi(y)|\leqslant\psi(x).$$

证明 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$.

§3.2 函数和映射的连续性

对于任意一个集合 $D\subset R^2$, D 中的点不一定都是 D 的极限点，因此我们应该用 ε-δ 语言，而不能单用极限式来表达一个函数在 D 上的连续性.

定义 1 设 $D\subset R^2$, f: $D\to R$, $p_0\in D$. 如果对于任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta_\varepsilon>0$, 当 $p\in D$ 且 $\|p-p_0\|<\delta_\varepsilon$ 时

$$|f(p)-f(p_0)|<\varepsilon,$$

则说函数 f 在点 p_0 **连续**. 如果 f 在 D 上每一点都连续，则说 f 在 D 上连续, f 为**连续函数**.

由定义知道，若 p_0 是 D 的极限点，则当且仅当

$$\lim_{p\to p_0}f(p)=f(p_0)$$

时 f 在 p_0 连续. 如果 p_0 是 D 的孤立点，则一定是 f 的连续点.

既然二元函数连续的定义与一元函数相同，因此连续函数的一些简单性质(连续函数经过四则运算仍得连续函数，经过复合也

得连续函数等)与一元函数一样地成立.

例1 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. 讨论函数 f 的连续性.

解 函数 f 是由函数 $(x, y)\longmapsto x^2$ 和 $(x, y)\longmapsto y^2$ 经四则运算而得的, 而这两个函数显然都是处处连续的, 故 f 在其定义域 $D=\{(x,y):\ (x,y)\neq 0\}$ 上是连续的. 事实上, 当 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 时

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}x^2\cdot\lim\limits_{y\to y_0}y^2}{\lim\limits_{x\to x_0}x^2+\lim\limits_{y\to y_0}y^2}=\frac{x_0^2y_0^2}{x_0^2+y_0^2}.$$

如果补充定义 $f(0,0)=0$, 则由 §3.1 例 1, f 在整个 R^2 上是连续的. □

例2 设 $f(x,y,z)=\sin(xy+z)$. 证明函数 f 在 R^3 上是连续的.

证 令 $g(x,y,z)=xy+z$, 则同例 1 的讨论一样, 函数 g 在 R^3 上是连续的. 再令 $h(t)=\sin t$, 则函数 h 在 R 上是连续的. 所以复合函数 $f=h\circ g$ 在 R^3 上是连续的. □

注 若二元函数 f 在一点 (x_0, y_0) 连续, 则显然两个一元的"边缘"函数 $f(\cdot,y_0)$ 和 $f(x_0,\cdot)$ 分别在 x_0 和 y_0 连续. 但是, 反过来由 §3.1 注 2 可知, 从边缘函数 $f(\cdot,y)$ 和 $f(x,\cdot)$ 的连续性, 不能得出二元函数 f 的连续性. 下面即是一例.

例3 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

研究函数 f, $f(\cdot,y)$ 和 $f(x,\cdot)$ 的连续性.

解 因为

$$\lim_{x\to 0}f(x,y)=0=f(0,y),\quad y\neq 0,$$
$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=0=f(0,0),$$

所以对一切$y\in R$函数$f(\cdot, y)$在$x=0$是连续的. 这个函数在其它点上同样也是连续的, 即对一切$y\in R$边缘函数$f(\cdot, y)$在R上是连续的. 在函数f的定义中x和y是同等的, 所以对一切$x\in R$边缘函数$f(x, \cdot)$在R上也是连续的. 但函数f在$(0, 0)$不连续, 因为

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}} f(x, y)=\frac{k^2}{1+k^2}$$

对于不同的k有不同的值. □

定义 2 设$D\subset R^2$, f: $D\to R$. 如果任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta_\varepsilon>0$, 当$p_1, p_2\in D$, $\|p_1-p_2\|<\delta_\varepsilon$时

$$|f(p_1)-f(p_2)|<\varepsilon,$$

则说f(在D上)**一致连续**.

例 4 设$f(x, y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2\neq 0$. 证明函数f(在其定义域上)不一致连续.

证明 因为

$$|f(x, x)-f(x, 0)|=\frac{1}{2}$$

当$x\neq 0$时成立, 而

$$\|(x, x)-(x, 0)\|=|x|$$

可以任意小, 显然f不一致连续. □

以上关于函数极限、连续与一致连续的概念同样适用于(从R^n到R^m中的)映射.

定义 3 设$D\subset R^n$, f: $D\to R^m$. 又$x^{(0)}$是D的一个极限点. 设$a\in R^m$. 如果任给$\varepsilon>0$, 存在$\delta_\varepsilon>0$, 当$0<\|x-x^{(0)}\|<\delta_\varepsilon$且$x\in D$时

$$\|f(x)-a\|<\varepsilon,$$

则记

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = a.$$

如果 $x^{(0)} \in D$(不必是极限点)，并且任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_\varepsilon > 0$，当

$$\| x - x^{(0)} \| < \delta_\varepsilon \text{ 且 } x \in D \text{ 时}$$

$$\| f(x) - f(x^{(0)}) \| < \varepsilon,$$

则说 f 在 $x^{(0)}$ 连续．如果任给 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_\varepsilon > 0$，当 $x, y \in D$，

$$\| x - y \| < \delta_\varepsilon \text{ 时}$$

$$\| f(x) - f(y) \| < \varepsilon,$$

则说 f(在 D 上)一致连续．

由于平面点列相当于从自然数集 N 到 R^2 中的映射．因此与§2.2定理1同样推理可知，映射极限、连续和一致连续与坐标函数的关系如下：

定理1 在定义3中，如果

$$f = (f_1, \cdots, f_m), \quad a = (a_1, \cdots, a_m).$$

则 $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = a$ 的充分必要条件是

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f_i(x) = a_i, \quad i = 1, \cdots, m.$$

同样，f 在 $x^{(0)}$ 连续的充分必要条件是各坐标函数 f_i 都在 $x^{(0)}$ 连续．f 一致连续的充分必要条件是各坐标函数 f_i 都一致连续．

下面我们讨论连续映射和多元连续函数的性质，它们与一元连续函数的性质(第四章§2.1)相当．

定理2 设 $E \subset R^n$ 是一连通集，映射 f： $E \to R^m$ 连续，则像 $f(E)$ 也是连通集．

证明 设 $f(E) = A \cup B$，A 和 B 非空、不相交．则

$$E = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$

其中 $f^{-1}(A)$ 和 $f^{-1}(B)$ 也非空、不相交．由 E 的连通性，或者

$f^{-1}(A)$含有$f^{-1}(B)$的极限点，或者$f^{-1}(B)$含有$f^{-1}(A)$的极限点。不妨设为前者．则$f^{-1}(B)$中有点列(x_n)收敛于$f^{-1}(A)$中的一点x．由f的连续性有$f(x_n)\to f(x)$．但$f(x_n)$都在B中，$f(x)$在A中，所以A中有B的极限点．即$f(E)$是连通的．□

推论 设$E\subset R^n$是一连通集，函数f：$E\to R$连续．如果有$a,b\in E$使$f(a)<r<f(b)$，则有$c\in E$使$f(c)=r$．

证明 由定理2，$f(E)$是R中的连通集，因此$f(E)$是区间（§2.4习题5）．$f(a)$和$f(b)$都在区间$f(E)$中，所以

$$(f(a),f(b))\subset f(E).$$

所以$r\in f(E)$．因此有$c\in E$使$f(c)=r$．□

例5 设有直线l：

$$Ax+By+C=0.$$

则l将平面割开为两侧，试求出两侧的分析表示。

解 设

$$f(x,y)=Ax+By+C,\quad (x,y)\in R^2.$$

令

$$D_1=\{(x,y):\quad f(x,y)<0\},$$
$$D_2=\{(x,y):\quad f(x,y)>0\}.$$

则$R^2=D_1\cup l\cup D_2$．任取$a\in D_1$，$b\in D_2$，则$f(a)<0<f(b)$．而f是连续函数，因此由定理2的推论，在直线段$\overline{ab}$（连通集）上一定有点c使$f(c)=0$．于是$c\in l$．这就是说a和b位于直线l的两侧．由a,b的任意性，易见D_1和D_2便是l的两侧的分析表示．□

定理3 设$K\subset R^n$是一紧致集，映射f：$K\to R^m$连续，则像$f(K)$也是紧致集．

证明 由§2.3定理1和定理2，紧致集即列紧集．在$f(K)$中任取点列$(y^{(n)})$，则在K中有对应的点列$(x^{(n)})$使$f(x^{(n)})=y^{(n)}$ $(n=1,2,\cdots)$．因为K是列紧的，所以$(x^{(n)})$有收敛子列$(x^{(n_k)})$收

敛于K中的一点x. 但f是连续的，所以

$$y^{(n_k)}=f(x^{(n_k)})\to f(x)\in f(K).$$

即$(y^{(n)})$有子列收敛于$f(K)$中的点. 所以$f(K)$是列紧的, 即紧致的. □

推论 设$K\subset R^n$是一紧致集，函数f: $K\to R$连续，则f有最小值和最大值.

证明 由定理3，$f(K)$是R中的紧致集. 因此易见，

$$\inf f(K)\in f(K), \quad \sup f(K)\in f(K).$$

所以在K中有点a和b使

$$f(a)=\inf f(K), \quad f(b)=\sup f(K).$$

显然，$f(a)$和$f(b)$分别就是f的最小值和最大值. □

例 6 设函数f: $R^2\to[0, +\infty)$连续，且

$$\lim_{\|p\|\to+\infty} f(p)=0.$$

证明f有最大值.

证明 如果$f\equiv0$, 则无须证明. 设有p_0使$f(p_0)>0$. 由所设可取一很大的数r, 使当$\|p\|>r$时$f(p)<f(p_0)$且$\|p_0\|<r$. 由定理3的推论，f在紧致集$B_r(0)^-$上有最大值，设为$f(a)$. 因为$p_0\in B_r(0)$, 所以$f(p_0)\leqslant f(a)$. 因此当$\|p\|>r$时也有$f(p)<f(p_0)\leqslant f(a)$. 所以$f(a)$是$f$的最大值. □

定理 4 设$K\subset R^n$是一紧致集，映射f: $K\to R^m$连续，则f一致连续.

证明 (反证)设f不一致连续. 则存在$\varepsilon>0$和K中的点列$(x^{(n)})$, $(y^{(n)})$使得对一切$n=1, 2, \cdots$有

$$\|x^{(n)}-y^{(n)}\|<\frac{1}{n}, \tag{1}$$

但

$$\|f(x^{(n)})-f(y^{(n)})\|\geqslant\varepsilon. \tag{2}$$

因为K是紧致的，即列紧的，所以$(x^{(n)})$有收敛子列$(x^{(n_k)})$收敛于K中一点x. 由(1)式，$(y^{(n_k)})$也收敛于x. 将$x^{(n_k)}$和$y^{(n_k)}$代入(2)式，令$k\to+\infty$，由f的连续性即得$0\geqslant\varepsilon$. 矛盾. □

例 7 设函数f在R^2上连续，且

$$\lim_{\|p\|\to+\infty} f(p)=0.$$

证明f(在R^2上)一致连续.

证明 任给$\varepsilon>0$. 由所设存在$r>0$，当$\|p\|>r$时$|f(p)|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因为闭圆盘$B_{r+1}(0)^-$是紧致集(§2.3定理1)，而$f$是连续的，所以由定理4存在$0<\delta<1$，当$p,q\in B_{r+1}(0)^-$，$\|p-q\|<\delta$时

$$|f(p)-f(q)|<\varepsilon. \tag{3}$$

因此，对于任意二点p,q，当$\|p-q\|<\delta$时，若$\|p\|\leqslant r$或$\|q\|\leqslant r$，则$p,q\in B_{r+1}(0)^-$，因此(3)式成立；若$\|p\|>r$，$\|q\|>r$，则显然(3)式也成立. 所以f一致连续. □

习　题

1. 回答下列问题：

(1) 如何用极限表达多元函数连续的概念？

(2) 设二元函数f在一点(x_0,y_0)连续，则边缘函数$f(\cdot,y_0)$和$f(x_0,\cdot)$是否分别在x_0和y_0连续？若f在$[a,b]\times[c,d]$上连续，则边缘函数如何？

(3) 上面问题中的逆是否成立？

(4) 若一元函数φ在$[a,b]$上连续，当$(x,y)\in[a,b]\times R$时令$f(x,y)=\varphi(x)$，则f在$[a,b]\times R$上是否连续？是否一致连续？

(5) 设f是由$D\subset R^n$到R^m中的映射，则f的极限、连续和一致连续与其坐标函数的关系为何？为什么？

(6) 连续映射把连通集和紧致集映成什么集？连通集和紧致集上的连续函数有什么性质？

(7) 什么集上的连续映射一定是一致连续的？

2. 求出下列函数f的间断点集，设$f(0,0)=0$.

(1) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.　　(2) $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

(3) $f(x,y)=\frac{x+y}{x^3+y^3}$.　　(4) $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0, \\ 0, & y=0. \end{cases}$

3. 设 $F: R^2\to R$ 是连续、变号的函数. 证明集合 $\{(x,y): F(x,y)\neq 0\}$ 是非连通的.

4. 下列曲线将平面割开为若干部分, 试求出各部分的分析表示.

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;　　(2) $y=px^2$;

(3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

5. 设

$$f(x,y)=\frac{1}{1-xy},\qquad (x,y)\in[0,1)\times[0,1).$$

证明 f 连续但不一致连续.

6. 设 f, g 是由 $D\subset R^n$ 到 R^m 中的映射, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$. 证明

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\|f(x)\|=\|a\|$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\langle f(x), g(x)\rangle=\langle a, b\rangle$.

7. 设 $E\subset R^n$. 证明: 若映射 $f: E\to R^m$ 一致连续, 则 f 可以扩充为 E^- 上的一致连续映射.

8. 建立有关复合映射极限和连续的命题. 证明一致连续映射的复合是一致连续的.

9. 设 $K\subset R^m$ 是紧致集, $D\subset R^n$; $g: K\to R^l$ 为一对一的连续映射; $f: D\to K$, $h=g\circ f$. 证明

(1) 若 h 连续, 则 f 连续.

(2) 若 h 一致连续, 则 f 一致连续.

(3) 举例说明 K 的紧致性条件是不可缺的.

10. 设 P 为投影算子(§2.1 习题 10), $A\subset R^2$ 是紧致集, 证明 $P(A)$ 也是紧致集.

11. 设 $E\subset R^2$ 是道路连通集, 映射 $f: E\to R^2$ 连续. 证明像 $f(E)$ 也是道路连通集.

12. 设 $f: R^l\to R^m$ 连续. 证明 $f(E^-)\subset f(E)^-$. 等式何时成立?

13. 设$E\subset R^l$, f: $E\to R^m$. 证明

(1) 若E是闭集, f连续, 则函数图象, 即集合f(§1.2 定义 1)是$R^l\times R^m$中的闭集.

(2) 若E是紧致集, f连续, 则f是紧致集.

(3) 若f是紧致集, 则f连续.

14. 设E是紧致集, f是连续单射. 证明f^{-1}连续.

15. 证明不存在由$[0, 1]$到圆周上的一对一连续映射.

提示: 不存在由圆周到$[0, 1]$上的一对一连续映射.

16. 证明不存在由$[0, 1]$到$[0, 1]\times[0, 1]$上的一对一连续映射.

17. 设$D\subset R^n$是开集, f: $D\to R^m$. 证明f为连续的充分必要条件是, 若$G\subset R^m$是开集, 则$f^{-1}(G)$也是开集.

18. 设$A\subset R^2$, $p\in R^2$. 定义

$$\rho(p, A)=\inf\{\|p-a\|: \quad a\in A\}$$

为点p与集合A的"距离". 证明

(1) 若$A\neq\varnothing$, 则$A^-=\{p\in R^2: \quad \rho(p, A)=0\}$.

(2) $|\rho(p, A)-\rho(q, A)|\leqslant\rho(p, q)$.

(3) 若A, B是不相交的闭集, 则函数h:

$$h(p)=\frac{\rho(p, B)}{\rho(p, A)+\rho(p, B)} \qquad (p\in R^2)$$

连续, 且$h(A)=\{1\}$, $h(B)=\{0\}$, $h(R^2)=[0, 1]$.

(4) 若A, B是不相交的闭集, 则存在不相交的开集G, H使$A\subset G$, $B\subset H$.

19. 设$A, B\subset R^2$, 定义

$$\rho(A, B)=\inf\{\|p-q\|: \quad p\in A, q\in B\}$$

为集合A和B的"距离". 证明

(1) 若A为紧致集, 则存在$a\in A$使$\rho(a, B)=\rho(A, B)$.

(2) 若A和B都是紧致集, 则存在$a\in A$, $b\in B$使$\rho(a, b)=\rho(A, B)$.

(3) 若A为紧致集, B为闭集, 则$\rho(A, B)=0$当且仅当$A\cap B\neq\varnothing$.

(4) 作出两个不相交的闭集A和B使$\rho(A, B)=0$.

20. 设$A\subset R^2$是紧致集, 证明$\{p\in R^2: \quad \rho(p, A)\leqslant c\}$是紧致集.

第六章　多元函数的微分

第一节　偏　导　数

§1.1　方向导数和偏导数

在第二章中我们研究了一元函数的变化率，即导数. 下面我们研究二元函数的变化率. 由于二元函数的定义域是平面点集，不像一元函数是直线上的区间，因此它的变化就有方向性，沿着不同的方向 l_1 和 l_2(图 22) 可以有不同的变化率. 所以，对于二元函数只能在一个指定的方向上谈函数在一点的变化率.

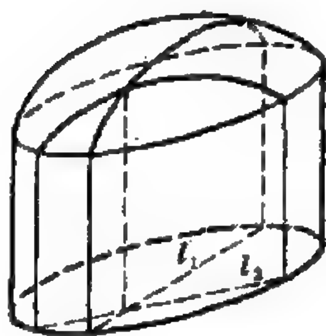


图　22

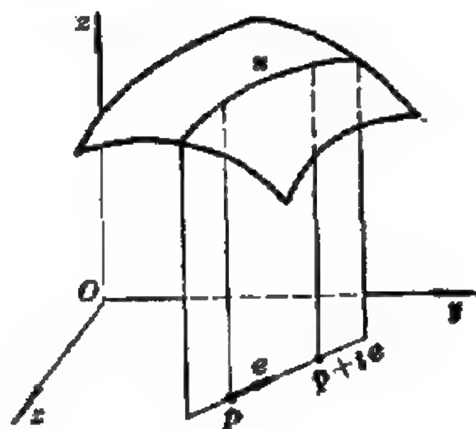


图　23

定义 1　设 $D\subset R^2$ 是一开集，f:　$D\to R$. 又 $\boldsymbol{e}$ 是 R^2 中一个单位向量(图 23). 设 $p\in D$, 当 $|t|$ 充分小时令(t 可正可负)

$$u(t)=f(p+t\boldsymbol{e}).$$

则一元函数 u 在 $t=0$ 的导数

$$u'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(p+t\boldsymbol{e})-f(p)}{t}$$

(如果存在)叫做函数 f 在点 $\boldsymbol{p}$ 沿方向 $\boldsymbol{e}$ 的**方向导数**，记为 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(\boldsymbol{p})$.

由此定义，方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(\boldsymbol{p})$ 就是函数 f 在点 $\boldsymbol{p}$ 沿方向 $\boldsymbol{e}$ 的变化率.

例 1 设 $f(x, y)=xy$，计算函数 f 在点(1, 1)沿方向

$$\boldsymbol{e}=\left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

的方向导数.

解 令

$$u(t)=f\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}, 1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

由定义，

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(1, 1)=u'(0)=\sqrt{2}. \qquad \square$$

由定义计算方向导数是很麻烦的，在§2.3 中我们将会得到简便的计算方法.

对于二元函数，有两个特殊方向的方向导数起着特别重要的作用，即沿 x 轴方向 $\boldsymbol{i}=(1, 0)$ 和沿 y 轴方向 $\boldsymbol{j}=(0, 1)$ 的方向导数. 由定义，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}_0)&=\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}_0+t\boldsymbol{i})-f(\boldsymbol{p}_0)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t, y_0)-f(x_0, y_0)}{t}.\end{aligned} \tag{1}$$

如果当 x 充分靠近 x_0 时令

$$\varphi(x)=f(x, y_0),$$

则(1)式右端便是一元函数 φ，即"边缘"函数 $f(\cdot, y_0)$ 在 x_0 的导数，所以

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}_0)=\varphi'(x_0). \tag{2}$$

同样,

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{j}}(\boldsymbol{p}_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\boldsymbol{p}_0+t\,\boldsymbol{j})-f(\boldsymbol{p}_0)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0, y_0+t)-f(x_0, y_0)}{t}. \tag{3}$$

如果当 y 充分靠近 y_0 时令

$$\psi(y)=f(x_0, y),$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{j}}(\boldsymbol{p}_0)=\psi'(y_0). \tag{4}$$

定义 2 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}_0)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{j}}(\boldsymbol{p}_0)$ 分别叫做函数 f 在点 $\boldsymbol{p}_0$ 的第一个和第二个一阶**偏导数**,或关于 x 和 y 的一阶偏导数(这里 x 和 y 意指在直角坐标系中我们所用的两个坐标符号),记为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0)=f'_x(\boldsymbol{p}_0)=f'_1(\boldsymbol{p}_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{j}}(\boldsymbol{p}_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0)=f'_y(\boldsymbol{p}_0)=f'_2(\boldsymbol{p}_0).$$

如果函数 f 在定义域中每一点上都有偏导数, 我们就得两个偏导函数:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{i}}=\frac{\partial f}{\partial x}=f'_x=f'_1,\quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{j}}=\frac{\partial f}{\partial y}=f'_y=f'_2.$$

由定义 2 和(2),(4)两式我们得到

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{p}_0)=\varphi'(x_0),\quad \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{p}_0)=\psi'(y_0). \tag{5}$$

所以,求二元函数的偏导数就是求两个一元函数,即两个边缘函数的导数。

例 2 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+xy$. 求$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

解 先求偏导函数. 令

$$\varphi(x)=f(x,y), \quad \psi(y)=f(x,y).$$

由(5)式,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\varphi'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\psi'(y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x.$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=\frac{1}{\sqrt{5}}+2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=\frac{2}{\sqrt{5}}+1. \quad \square$$

上述概念和方法当然同样适用于三元和 n 元函数.

例 3 设 $f(x,y,z)=y^2z+\sin 5xy$. 求 f 的偏导数.

解 令

$$\varphi(x)=f(x,y,z),$$

使得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\varphi'(x)=5y\cos 5xy.$$

同理

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=2yz+5x\cos 5xy, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=y^2. \quad \square$$

例 4 设 $z=x\ln(1+xe^{2y})$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 题中 x 和 y 是自变量, z 是因变量. 用(5)式中的方法计算,就是分别计算 z 关于变量 x 和 y 的导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(1+xe^{2y})+\frac{xe^{2y}}{1+xe^{2y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2x^2e^{2y}}{1+xe^{2y}}.\quad \square$$

例 5 已知理想气体的状态方程为

$$PV=RT, \tag{6}$$

其中 P 为压强, V 为体积, T 为温度, R 是一个常数. 证明

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}=-1.$$

证明 因 P,V,T 是满足方程(6)的三个量, 所以它们不是独立的, 若把其中任意两个视为自变量, 则其余的一个就是因变量. 先视 V 和 T 为自变量, P 为因变量, 将方程(6)对 V 求偏导数, 得

$$\frac{\partial P}{\partial V}V+P=0.$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial V}=-\frac{P}{V}.$$

同理可得

$$\frac{\partial T}{\partial P}=\frac{V}{R},\quad \frac{\partial V}{\partial T}=\frac{R}{P}.$$

三式相乘即得所证. $\square$

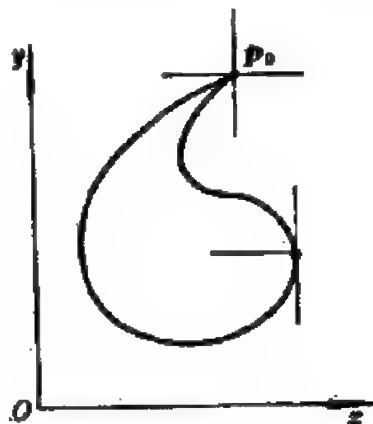


图 24

注 定义 1 和定义 2 都要求函数的定义域是一开集, 这是因为在边界点上不是每一个方向都可以定义导数的. 如在图 24 中的点 p_0 上就无法定义两个偏导数. 因此我们约定, 当我们说一个函数在某一点集 D 上有偏导数, 而 D 不是开集时, 意思是说, 存在一个开集 $G\supset D$, f 在 G 上有定义, 而在 D 上到处有偏导数. 这个约定同样适用于其它方向导数.

如果函数 f 的一阶偏导函数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 又有偏导数, 这些偏导数就是 f 的"二阶偏导数". 记法如下:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx}=f''_{1,1},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}=f''_{2,2},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy}=f''_{1,2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}=f''_{2,1}.$$

对二阶偏导数再求偏导数便得三阶偏导数．如

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=f'''_{xxx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=f'''_{yxx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial y}=f'''_{yxy},$$

………………………………

如果 f 是一个 n 元函数，它的各阶偏导数就是

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=f'_{x_i}=f'_i,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=f''_{x_ix_j}=f''_{i,j},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}=f'''_{x_ix_jx_k}=f'''_{i,j,k},\ \cdots,$$

其中 $i,j,k=1,\cdots,n$；$x_1,\cdots,x_n$ 是 R^n 中采用的坐标符号．

例 6 设 $f(x,y)=xy+2x^3y^2+x^4+5$，求 f 在点 $(1,0)$ 的二阶偏导数．

解 因为

$$f'_x(x,y)=y+6x^2y^2+4x^3,$$

$$f'_y(x,y)=x+4x^3y;$$

所以

$$f''_{xx}(x,y)=12xy^2+12x^2,\quad f''_{yy}(x,y)=4x^3,$$

$$f''_{xy}(x, y) = 1 + 12x^2y = f''_{yx}(x, y).$$

所以

$$f''_{xx}(1, 0) = 12, \quad f''_{yy}(1, 0) = 4,$$
$$f''_{xy}(1, 0) = f''_{yx}(1, 0) = 1. \quad \square$$

例 7 设一元函数 f 和 g 都有二阶导数，又

$$u = f(x - at) + g(x + at),$$

其中 a 是常数. 证明 u 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证明 令 $\xi = x - at, \eta = x + at$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(\xi)\xi'_x + g'(\eta)\eta'_x = f'(x - at) + g'(x + at),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(\xi)\xi'_t + g'(\eta)\eta'_t = -af'(x - at) + ag'(x + at),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(\xi)\xi'_x + g''(\eta)\eta'_x = f''(x - at) + g''(x + at),$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -af''(\xi)\xi'_t + ag''(\eta)\eta'_t = a^2 f''(x - at) + a^2 g''(x + at)$$
$$= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad \square$$

在例 6 中我们看到 $f''_{xy} = f''_{yx}$，这并非偶然. 它有一般性，即有下面的定理.

定理 1 设 f 是一个二元函数，定义域 D 是一个开集. 如果 f 在 D 上有二阶“混合”偏导数 f''_{xy} 和 f''_{yx}，且这两个偏导数在一点 (x_0, y_0) 连续，则

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

证明 令

$$\Delta_h f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0),$$

$$\Delta^k f(x_0, y_0) = f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0).$$

按此记法便有

$$\begin{aligned}\Delta^k \Delta_h f(x_0, y_0) &= \Delta^k [f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)] \\ &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) \\ &\quad - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0), \\ \Delta_h \Delta^k f(x_0, y_0) &= \Delta_h [f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)] \\ &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) \\ &\quad - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0).\end{aligned}$$

所以

$$\Delta^k \Delta_h f(x_0, y_0) = \Delta_h \Delta^k f(x_0, y_0). \tag{7}$$

令

$$\varphi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y).$$

则由一元函数微分平均值定理, 我们有

$$\begin{aligned}\Delta^k \Delta_h f(x_0, y_0) &= \Delta^k \varphi(y_0) = \varphi(y_0+k) - \varphi(y_0) = \varphi'(y_0+\theta_1 k)k \\ &= [f'_y(x_0+h, y_0+\theta_1 k) - f'_y(x_0, y_0+\theta_1 k)]k \\ &= f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_1 k)hk,\end{aligned}$$

其中 θ_1 和 θ_2 是$(0, 1)$中的数. 再令

$$\psi(x) = f(x, y_0+k) - f(x, y_0).$$

则同理可得

$$\Delta_h \Delta^k f(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k)hk,$$

其中 θ_3 和 θ_4 是$(0, 1)$中的数. 由(7)得

$$f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\theta_1 k) = f''_{xy}(x_0+\theta_3 h, y_0+\theta_4 k).$$

令 $h, k \to 0$, 由连续的假定便得所证. □

由定理 1 易得以下推论.

推论 如果 n 元函数 f 在开集 D 上有各阶偏导数, 且都在一点 $x \in D$ 连续, 则

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_k}}(x)=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_2}\partial x_{i_1}\partial x_{i_3}\cdots\partial x_{i_k}}(x)=\cdots$$

$$=\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k-1}}\cdots\partial x_{i_1}}(x).$$

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 二元函数的变化率问题和一元函数有什么不同？何谓方向导数？

(2) 何谓偏导数？偏导数与一元函数的导数有什么关系？

(3) 偏导数问题为什么要在开集上考虑？ 二元函数在一个集合上有偏导数是什么意思？

(4) 二元函数的两个二阶混合偏导数在什么条件下相等？ 如何把这个命题推到多元函数的高阶混合偏导数？

2. 计算下列偏导数:

(1) 设 $f(x,y)=x+y+\sqrt{x^2+y^2}$. 求 $f'_x(3,4)$, $f'_y(0,1)$.

(2) 设 $f(x,y)=\ln(xy+1)+3$, 求$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

(3) 设 $z=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right)$, 求 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=0,y=1}$.

(4) 设 $z=\sin x^2 y$, 求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}$.

(5) 设 $f(x,y)=x+(y-1)\sin\sqrt{\frac{x}{y+\ln x}}$, 求 $f'_x(x,1)$.

3. 求下列变量的一、二阶偏导数. 设

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$　　(2) $z=\operatorname{tg}\frac{x^2}{y}$

(3) $z=x^y$　　(4) $z=\ln(x+y^2)$

(5) $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$　　(6) $z=\sin xy$

(7) $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$　　(8) $u=xy+yz+zx$

(9) $u=e^{xyz}$　　(10) $u=x^{yz}$

(11) $u=\ln(x_1+\cdots+x_n)$　　(12) $u=\arcsin(x_1^2+\cdots+x_n^2)$

4. 设 $z=f(x+\alpha, y+\beta)$， 证明 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \alpha}$.

5. 设 $z=f(x^2+y^2)$，证明 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

6. 设 $z=f(xy)$，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial y}$.

7. 设 $z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$，证明 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

8. 设 $z=f(\varphi(x)+\psi(y))$. 证明 $\psi'(y)\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x)\frac{\partial z}{\partial y}$.

9. 设 $u=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，证明 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

10. 设 $u=e^{a\theta}\cos(a\ln r)$，证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=0.$$

11. 设 $u=f(x, y, z)$，记 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$， 其中 Δ 叫做 "Laplace 算子".

(1) 设 $p=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 证明

$$\Delta p=\frac{2}{p}, \qquad \Delta\ln p=\frac{1}{p^2}, \qquad \Delta\frac{1}{p}=0.$$

(2) 设 $u=f(p)$，求 Δu.

12. 设 $p=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$， $u=\frac{1}{p}[\varphi(p-at)+\psi(p+at)]$. 证明

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

13. 证明 $f''_{12}(0,0)\neq f''_{21}(0,0)$，设

$$f(x, y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x=y=0. \end{cases}$$

14. 解下列方程:

(1) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$； (2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$； (3) $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}=0$.

15. 求下列方向导数:

(1) 设 $f(x, y)=(x-1)^2-y^2$，求 $\frac{\partial f}{\partial e}(0, 1)$.

(2) 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

求 $\dfrac{\partial f}{\partial e}(0,0)$.

(3) 设 $f(x,y)=\sqrt{|x^2-y^2|}$. 沿哪些方向存在方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial e}(0,0)=?$

(4) 设 $f(x,y,z)=|x-y+z|$, $x_0+y_0+z_0=0$. 沿哪些方向存在方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial e}(x_0,y_0,z_0)=?$

16. 证明 $\dfrac{\partial f}{\partial(-e)}=-\dfrac{\partial f}{\partial e}$.

§1.2 切线和切面

设在空间 R^3 中有一条参数曲线 l (第五章 § 1.2), 它的方程是

$$x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\chi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \tag{1}$$

统一起来可以写成

$$(x,y,z)=f(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{2}$$

其中 $f=(\varphi,\psi,\chi)$, 于是 $f([\alpha,\beta])=l$. 我们来考虑 l 的"切线"问题.

像在第二章中讨论切线那样, 我们把"切线"看作割线的极限位置. 设

$$p_0=(x_0,y_0,z_0)=f(t_0).$$

则向量 $f(t_0+h)-f(t_0)$ 在割线 T (图 25) 上, 或者说, 平行于割线 T. 若 $h>0$, 则其方向指向 l 上参数 t 增加时动点 $p=f(t)$ 运行的方向; 若 $h<0$, 则就反向. 因此向量

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} \tag{3}$$

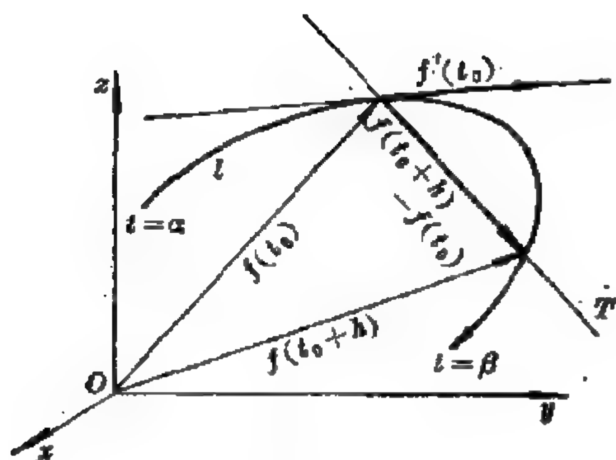


图 25

仍平行于割线 T, 但其方向恒指向 l 上 t 增加时动点运行的方向. 在(3)中令 $h\to 0$, 如果极限存在, 这个极限就叫做映射 f 在 t_0 的**导数**, 记为

$$f'(t_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}. \tag{4}$$

如果 $f'(t_0)\neq 0$, 则 $f'(t_0)$就可看作曲线 l 在点 $p_0=f(t_0)$的"切向量". 它的方向和(3)一样应指向 l 上 t 增加时动点运行的方向. 因为

$$\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}=\left(\frac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h},\right.$$
$$\left.\frac{\psi(t_0+h)-\psi(t_0)}{h}, \frac{\chi(t_0+h)-\chi(t_0)}{h}\right),$$

所以根据第五章 §2.2 定理 1, 映射 f 在 t_0 可导当且仅当其坐标函数 φ, ψ, χ 均在 t_0 可导, 并且这时

$$f'(t_0)=(\varphi'(t_0), \psi'(t_0), \chi'(t_0)). \tag{5}$$

有了切向量 $f'(t_0)$, 自然就得到曲线 l 在点 $p_0=f(t_0)$的"切线"方程

$$p-p_0=uf'(t_0), \quad -\infty<u<+\infty, \tag{6}$$

或

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\chi'(t_0)}. \tag{7}$$

例 1 求螺旋线(第五章 § 1.2 例 1)的切线.

解 由(5)式螺旋线在任意一点

$$(x_0, y_0, z_0)=(R\cos t_0, R\sin t_0, t_0)$$

的切向量是

$$(x'_t, y'_t, z'_t)_{t_0}=(-R\sin t_0, R\cos t_0, 1),$$

因此切线方程是

$$\frac{x-x_0}{-R\sin t_0}=\frac{y-y_0}{R\cos t_0}=z-z_0. \quad \square$$

我们看到，空间曲线和平面曲线的切线都是看作割线的极限位置．但现在所用的表示方法(向量方法)比第二章采用的方法有所改进．下面我们再来考虑曲面的“切面”问题．

设有空间曲面 Σ，其参数方程为

$$(x, y, z)=\boldsymbol{f}(u, v), \qquad (u, v)\in D. \tag{8}$$

于是 $\Sigma=\boldsymbol{f}(D)$．设 $\boldsymbol{f}=(\varphi, \psi, \chi)$，则此方程又可写成

$$x=\varphi(u, v),\ \ y=\psi(u, v),\ \ z=\chi(u, v),\ \ (u, v)\in D. \tag{9}$$

为简单计，设 $D\subset R^2$ 是一开集．

在(8)式中固定 $v=v_0$ 得方程

$$(x, y, z)=\boldsymbol{f}(u, v_0), \tag{10}$$

这个方程表示 Σ 上的一条曲线，叫做 u-曲线．也就是说，$\boldsymbol{f}$ 把 D 中一平行于 u 轴的线段 $v=v_0$(图 26)映成 Σ 上一条 u-曲线，我们把这条曲线也记为 $v=v_0$(图 27)．固定 v 为不同的值，就得 Σ 上一族 u-曲线．同样，$\boldsymbol{f}$ 把 D 中一平行于 v 轴的线段 $u=u_0$ 映成 Σ 上的曲线

$$(x, y, z)=\boldsymbol{f}(u_0, v), \tag{11}$$

叫做 v-曲线，也记为 $u=u_0$．固定 u 为不同的值，就得到 Σ 上一族

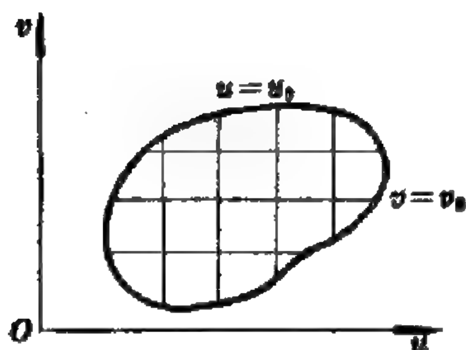


图 26

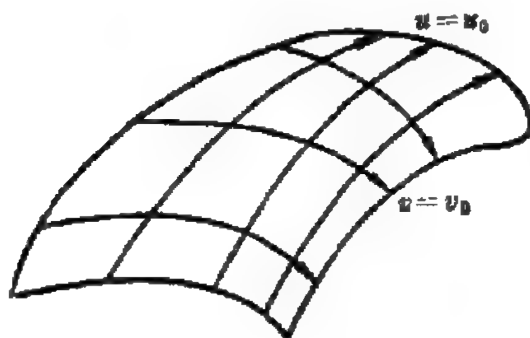


图 27

v-曲线. u-曲线和 v-曲线构成曲面 Σ 上的网络. Σ 就是由密集的 u-曲线和 v-曲线编织成的.

在 Σ 上任取一点

$$\boldsymbol{p}_0=(x_0, y_0, z_0)=\boldsymbol{f}(u_0, v_0).$$

如上所述，通过该点就有一条 u-曲线 $v=v_0$ 和一条 v-曲线 $u=u_0$ (图 28). 对于映射 $\boldsymbol{f}$ 我们可以和函数一样定义偏导数(§1.1 定义 2 和(1), (3)):

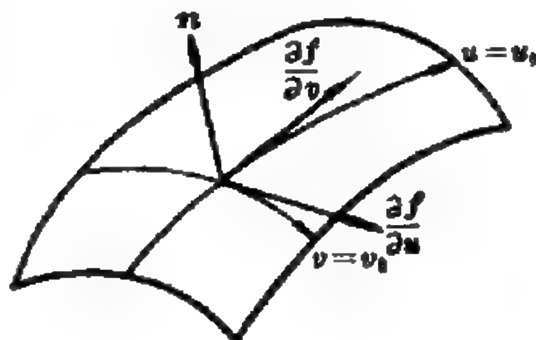


图 28

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u}(u_0, v_0)=\boldsymbol{f}_u'(u_0, v_0)=\lim_{h \to 0}\frac{\boldsymbol{f}(u_0+h, v_0)-\boldsymbol{f}(u_0, v_0)}{h},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial v}(u_0, v_0)=\boldsymbol{f}_v'(u_0, v_0)=\lim_{h \to 0}\frac{\boldsymbol{f}(u_0, v_0+h)-\boldsymbol{f}(u_0, v_0)}{h}.$$

令

$$\boldsymbol{\varphi}(u)=\boldsymbol{f}(u, v_0)=(\varphi(u, v_0), \psi(u, v_0), \chi(u, v_0)),$$

$$\boldsymbol{\psi}(v)=\boldsymbol{f}(u_0, v)=(\varphi(u_0, v), \psi(u_0, v), \chi(u_0, v)).$$

则由(5)式就有

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u}(u_0, v_0)=\boldsymbol{\varphi}'(u_0)$$

$$=(\varphi_u'(u_0, v_0), \psi_u'(u_0, v_0), \chi_u'(u_0, v_0)), \qquad (12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) = \psi'(v_0)$$

$$= (\varphi'_v(u_0, v_0), \psi'_v(u_0, v_0), \chi'_v(u_0, v_0)). \qquad (13)$$

由方程(10)和(11)，如果$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$和$\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$都存在且都不为$\mathbf{0}$，它们分别就是$u$-曲线$v=v_0$和$v$-曲线$u=u_0$在点$\boldsymbol{p}_0$的切向量(图28)。如果向量

$$\boldsymbol{n}(u_0, v_0) = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)} \neq \mathbf{0}, \qquad (14)$$

则以此为法向量通过点$\boldsymbol{p}_0$作平面

$$(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0) \cdot \boldsymbol{n}(u_0, v_0) = 0, \qquad (15)$$

这张平面应可称做曲面Σ在点$\boldsymbol{p}_0$的"切面"，它的坐标式是

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial \chi}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial \chi}{\partial v}(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0. \qquad (16)$$

例 2 求球面的切面。

解 由第五章§1.2例2，设球面上任意一点为(x_0, y_0, z_0)，对应的参数为(θ_0, φ_0)。应用(14)式得球面在(x_0, y_0, z_0)的法向量为

$$\boldsymbol{n}(\theta_0, \varphi_0) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ R\cos\theta_0\cos\varphi_0 & R\cos\theta_0\sin\varphi_0 & -R\sin\theta_0 \\ -R\sin\theta_0\sin\varphi_0 & R\sin\theta_0\cos\varphi_0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R\sin\theta_0(x_0, y_0, z_0). \qquad (17)$$

所以(x_0, y_0, z_0)就是法向量. 因此球面在点(x_0, y_0, z_0)的切面是

$$(x-x_0)x_0+(y-y_0)y_0+(z-z_0)z_0=0,$$

即

$$x_0x+y_0y+z_0z=R^2. \quad \square$$

在(2)式中, 如果 f' 在$[\alpha, \beta]$上存在, 且处处非 $\mathbf{0}$, 则曲线 l 在每一点都有切向量, f' 叫做 l 的一个"切向场". 如果 f' 在$[\alpha, \beta]$上又是连续的, 则说 l 是一条光滑的参数曲线. 同样, 在(8)式中, 如果 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\times\dfrac{\partial f}{\partial v}$在 D 上存在, 且处处非 $\mathbf{0}$, 则曲面Σ在每一点都有法向量, $\boldsymbol{n}$ 叫做Σ的一个"法向场". 如果$\dfrac{\partial f}{\partial u}$和$\dfrac{\partial f}{\partial v}$(因此 $\boldsymbol{n}$) 在 D 上又是连续的, 则说Σ是一张光滑的参数曲面. 在微积分学中讨论的参数曲线和曲面都是光滑的.

我们应当注意, 上述光滑性的概念与参数表示有关, 它依赖于具体的参数表示. 例如在例 2 中, $\boldsymbol{n}(0, \varphi)=\boldsymbol{n}(\pi, \varphi)=\mathbf{0}$, 因而球面在南北两极便失去了光滑性. 但这并不等于说球面在两极无法向量. 只要更改参数表示, 南北两极就可以有光滑性.

我们再考虑一种特殊的曲面. 设有二元函数 f, $\mathrm{dom}f=D\subset R^2$. 则 f 是 R^3 中的一个点集(第五章 § 1. 2):

$$f=\{(x, y, f(x, y)): \quad (x, y)\in D\},$$

以方程来表示这个点集, 就是

$$z=f(x, y), \quad (x, y)\in D. \qquad (18)$$

当点 $P=(x, y)$在 D 上变化时, 动点 $Q=(x, y, z)$, 也就是线段 $\overline{PQ}$ 的端点(图 29), 在空间画出 f. 如果 D 是一个区域 (因而是 xy 平面上的一整块), 并且 f 是连续的, 则线段$\overline{PQ}$随动点P连续变化, 这时端点 Q 画出的 f 无疑就是如同我们直观想象的一张曲面.

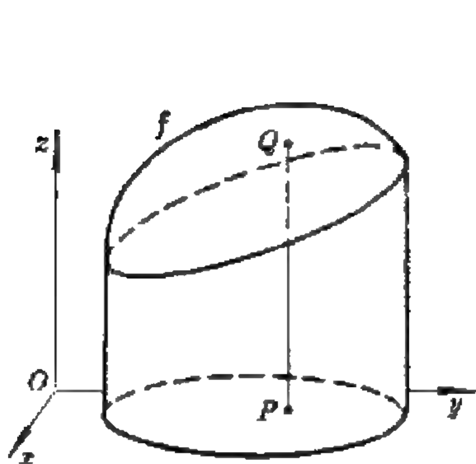


图 29

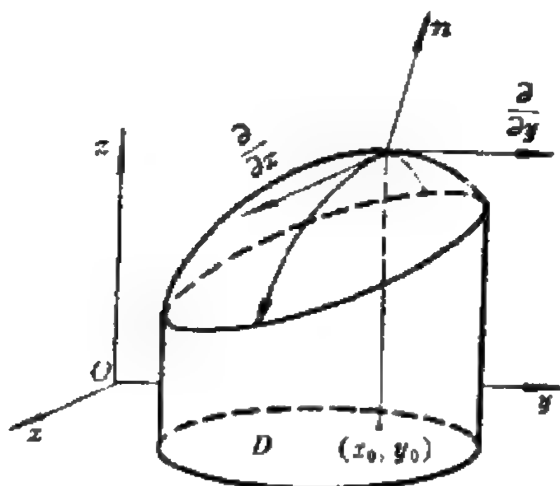


图 30

用方程(18)表示的曲面叫做“显表示”的曲面．即二元函数 f 是一张显表示的曲面．然而方程(18)也可以写成

$$x=x, y=y, z=f(x,y), \qquad (x,y)\in D.$$

与(9)式比较，这也是一个参数方程．所以方程(18)也是一个参数方程，参数是 x 和 y．因此 f 也是一张参数曲面．设 $D\subset R^2$ 是一开集，f 在 D 上有一阶偏导数．则由(14)式，f 在点 $(x_0, y_0, z_0)=(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 的法向量(图 30)

$$\boldsymbol{n}(x_0, y_0)=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_0, y_0)}$$

$$=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right). \tag{19}$$

所以 f 在点 (x_0, y_0, z_0) 的切面为

$$z-z_0=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y-y_0). \tag{20}$$

最后我们指出，上面关于切线和切面的概念乍看似乎不统一，

切面不像切线那样看作割线的极限。但在§2.2中我们可以看到，这两个概念实际上是一致的。那时我们将对"切向量"作出一般的定义。

习　题

1. 回答下列问题：

(1) 设 f: $[a,b]\to R^3$，则 $f'(t)$ 是什么意思？它与坐标函数有什么关系？有什么几何意义？指向有什么特点？

(2) 参数曲面上有两族什么曲线？你感到它们与直角坐标平面上的坐标直线有何相似之处？

(3) 设（开集）$D\subset R^2$，f: $D\to R^3$。$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)$ 和 $\frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)$ 是什么意思？它们与坐标函数有什么关系？　有什么几何意义？　指向有什么特点？$n(u_0, v_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\times\frac{\partial f}{\partial v}\right)(u_0, v_0)$ 有什么几何意义？指向为何？

(4) 何谓显表示曲面？设有显表示曲面 Σ，方程为

$$z=f(x,y),\qquad (x,y)\in D.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上存在且连续。则 $s=\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ 和 $t=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ 是什么向量？指向为何？$n=s\times t$ 是什么向量？指向有何特点？Σ 是否光滑？它的切面方程为何？

2. 写出下列曲线的切线方程：

(1) $(x,y,z)=(a\cos\alpha\sin t, a\sin\alpha\sin t, a\cos t)$，$t\in R$.

(2) $(x,y,z)=(a\cos t\sin t, b\sin^2 t, c\cos t)$，在 $t=\frac{\pi}{4}$ 处。

3. 在曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=t^3$ 上求出一点，使在此点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

4. 证明曲线

$$x=ae^t\cos t,\quad y=ae^t\sin t,\quad z=ae^t$$

与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的母线交角（即二者切向量的夹角）为常数。

5. 写出下列曲面的切面：

(1)（柱面）$(x,y,z)=(u, a\cos v, a\sin v)$。

(2) (椭圆抛物面) $(x, y, z) = (au\cos v, bu\sin v, u^2)$.

(3) (旋转面) $(x, y, z) = (u\cos v, u\sin v, f(u))$.

(4) (椭球面) $(x, y, z) = (a\sin u\cos v, b\sin u\sin v, c\cos u)$.

(5) (环面)

$$(x, y, z) = ((a+b\sin u)\cos v,\ (a+b\sin u)\sin v, b\cos u),$$

其中 $0<b<a$. (a, b 有什么几何意义?)

6. 设 $p_0=(x_0, y_0, z_0)$ 是曲面 $z=xy$ 上一点. 证明曲面上通过 p_0 的两条直线 $z=xy_0$, $y=y_0$ 和 $z=x_0y$, $x=x_0$ 位于曲面在该点的切面上.

7. 证明锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的切面通过其顶点.

8. 证明旋转面的法线与旋转轴正交.

第二节 微 分

§ 2.1 微分和 Jacobian

前面我们讨论了多元函数的变化率, 即方向导数. 但是, 函数在一点可以有很多方向导数(在各个不同的方向上的导数), 因此什么是多元函数的"导数", 这个问题仍未明确. 回想第二章 § 1.6 中一元函数的可微性和微分的概念, 可微和可导是同等的, 微分和导数是对应的. 一元函数 f 在一点 x_0 可微, 就是存在一数 A 使

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+o(h). \tag{1}$$

这时就有 $A=f'(x_0)$. 反之, 如果 $f'(x_0)$ 存在, 则 f 在 x_0 可微.

仿此我们可以定义多元函数的可微性, 从而便可看到什么应是多元函数的"导数". 我们从二元函数开始. 顺便再说明, 下面凡作矩阵运算时均用列向量表示空间 R^2 (和 R^n) 中的点 (第五章 § 1.1 中的约定), 如

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{h}=\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

都是 R^2 中的点(向量).

以下从定义 1 至定理2, 一律假定 $D\subset R^2$ 是一开集, f: $D\to R$,

$p_0\in D$ 是一个定点.

定义 1 如果存在一个行向量

$$A=(a_1, a_2)$$

使得

$$f(p_0+h)-f(p_0)=Ah+o(\|h\|), \tag{2}$$

也就是

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2)-f(x_0, y_0)=a_1h_1+a_2h_2+o(\sqrt{h_1^2+h_2^2}), \tag{3}$$

则说二元函数 f 在 p_0 可微. 这时记

$$df(p_0)(h)=Ah, \qquad h\in R^2,$$

则 $df(p_0)$ 是一个由 R^2 到 R 中的线性函数, 叫做 f 在点 p_0 的微分.

比较(1)和(2)式我们便可看到, (2)式中的行向量 A 就可看作二元函数 f 在点 p_0 的"导数". 那么, 如何计算这个"导数" A 呢? 下面的定理告诉我们, 它归结为求两个偏导数.

定理 1 若函数 f 在点 p_0 可微, 则一阶偏导数 $f'_x(p_0)$ 和 $f'_y(p_0)$ 存在, 且在(2)式中

$$A=(f'_x(p_0), f'_y(p_0)). \tag{4}$$

证明 由假设, (3)式成立. 在(3)式中令 $h_2=0$ 得

$$f(x_0+h_1, y_0)-f(x_0, y_0)=a_1h_1+o(h_1).$$

根据偏导数的定义, 显见 $f'_1(x_0, y_0)=a_1$. 同理 $f'_2(x_0, y_0)=a_2$. 便得所证. □

(4) 式右端的行向量 (也就是一个 1×2 的矩阵) 叫做二元函数 f 在点 p_0 的 **Jacobian**, 记为

$$Jf(p_0)=(f'_x(p_0), f'_y(p_0)).$$

上述定理告诉我们, 如果函数 f 在 p_0 可微, 即(2)式成立, 则 f 在 p_0 的一阶偏导数存在, 亦即 Jacobian $Jf(p_0)$ 存在, 并且 $A=Jf(p_0)$. 这时 Jacobian $Jf(p_0)$ 就可看作 f 在 p_0 的"导数". 但

是反过来，如果 f 在 p_0 的 Jacobian $Jf(p_0)$存在，则 f 在 p_0 不一定可微(下面的例 1 即说明这个事实)．这时我们自然就没有理由把 $Jf(p_0)$看作"导数"．

例 1 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明 f 在 $(0,0)$ 各方向导数存在，因而 $Jf(0,0)$ 也存在，但 f 在 $(0,0)$不可微．

证明 设 $\boldsymbol{e}=(h,k)$是一单位向量，则

$$\lim_{t\to0}\frac{f(0+t\boldsymbol{e})-f(0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{f(th,tk)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{t^2}\frac{h^2k}{h^4+k^2}$$

$$=\begin{cases}h^2/k, & k\neq0,\\ 0, & k=0.\end{cases}$$

所以 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$也存在:

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0,$$

即 $Jf(0,0)=0$．但由第五章 § 3.1 例 2 可知，f 在$(0,0)$不连续．然而由定义 1 显见，函数在一点可微必定在该点连续．所以 f 在 $(0,0)$不可微．□

我们注意到，如果 f 在 D 上每一点 p 都存在 Jacobian $Jf(p)$，则 Jf 就是一个由 D 到 R^2 中的映射:

$$Jf=(f'_x,f'_y).$$

由第五章 § 3.2 定理 1 知道，Jf 在点 p_0 连续当且仅当 f'_x 和 f'_y 都在 p_0 连续。

定理 2 若 Jf 在 D 上存在，且在 p_0连续，则 f 在 p_0 可微．

证明 由一元函数微分平均值定理，当 h_1 和 h_2 很小时

$$f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)$$

$$
\begin{aligned}
&= f(x_0+h_1, y_0+h_2)-f(x_0, y_0+h_2) \\
&\quad + f(x_0, y_0+h_2)-f(x_0, y_0) \\
&= f'_x(x_0+\theta_1 h_1, y_0+h_2)h_1+f'_y(x_0, y_0+\theta_2 h_2)h_2,
\end{aligned}
$$

其中 θ_1 和 θ_2 是(0, 1)中二数．设

$$
f'_x(x_0+\theta_1 h_1, y_0+h_2)-f'_x(x_0, y_0)=\alpha,
$$

$$
f'_y(x_0, y_0+\theta_2 h_2)-f'_y(x_0, y_0)=\beta.
$$

则

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+h_1, y_0+h_2)-f(x_0, y_0) \\
&\qquad = f'_x(x_0, y_0)h_1+f'_y(x_0, y_0)h_2+\alpha h_1+\beta h_2. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

由连续性的假定，当 $h_1, h_2\to 0$ 时 $\alpha\to 0, \beta\to 0$．而

$$
\frac{|\alpha h_1+\beta h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leqslant|\alpha|+|\beta|,
$$

所以

$$
\alpha h_1+\beta h_2=o(\sqrt{h_1^2+h_2^2}).
$$

由(3)式，这就是说 f 在 $p_0=(x_0, y_0)$ 可微．□

以上内容，对 n 元函数也同样成立．不仅如此，还可以推广到由 R^n 中到 R^m 中的映射．以下一律假定 $D\subset R^n$ 是一开集，$f: D\to R^m$，$x^{(0)}\in D$ 是一定点．在作矩阵运算时用列向量表示 R^n 和 R^m 中的点，这时映射 f 可写作

$$
f=\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix},
$$

其中 $f_1, \cdots, f_m$ 是 f 的坐标函数，都是定义在 D 上的 n 元函数．

定义 2 如果存在一个 $m\times n$ 矩阵

$$
A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

使得

$$f(x^{(0)}+h)-f(x^{(0)})=Ah+R(h), \tag{6}$$

其中R满足

$$\|R(h)\|=o(\|h\|),$$

则说映射 f 在 $x^{(0)}$ **可微**. 这时记

$$df(x^{(0)})(h)=Ah, \quad h\in R^n, \tag{7}$$

则 $df(x^{(0)})$是由 R^n 到 R^m 中的线性映射, 叫做 f 在点 $x^{(0)}$ 的**微分**.

于是, 如果映射 f 在点 $x^{(0)}$ 可微, 则和二元函数一样, 矩阵 A 就可看作 f 在 $x^{(0)}$的"导数".

设(6)式中R的坐标函数为 $R_1, \cdots, R_m$, 则(6)式就是

$$\begin{pmatrix} f_1(x^{(0)}+h) \\ \vdots \\ f_m(x^{(0)}+h) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} f_1(x^{(0)}) \\ \vdots \\ f_m(x^{(0)}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}h+\begin{pmatrix} R_1(h) \\ \vdots \\ R_m(h) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

所以

$$f_i(x^{(0)}+h)-f_i(x^{(0)})-(a_{i1}, \cdots, a_{in})h=R_i(h), \tag{9}$$

$$i=1, \cdots, m.$$

因此容易看出, 下述定理成立:

定理 3 映射 f 在 $x^{(0)}$ 可微, 当且仅当每一个坐标函数 f_i 均在 $x^{(0)}$ 可微.

由此看到, 定理 1 和定理 2 对于映射也都成立:

定理 1′ 若 f 在 $x^{(0)}$ 可微, 即(6)式成立, 则一阶偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^{(0)})$都存在, 且在(6)式中

$$A=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^{(0)}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^{(0)})\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^{(0)}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^{(0)})\end{pmatrix}. \tag{10}$$

和二元函数一样，我们把上式右端的矩阵叫做映射 f 在 $x^{(0)}$ 的 Jacobian，记为 $Jf(x^{(0)})$．因此，若 f 在 $x^{(0)}$ 可微，则 Jacobian $Jf(x^{(0)})$ 存在，且 $A=Jf(x^{(0)})$．这时由(7)式，微分 $df(x^{(0)})$ 由下式定义：

$$df(x^{(0)})(h)=Jf(x^{(0)})h, \qquad h\in R^n. \tag{11}$$

并且 $Jf(x^{(0)})$ 就可看作映射 f 在 $x^{(0)}$ 的"导数"．但是反过来，由 $Jf(x^{(0)})$ 的存在不能断定 f 在 $x^{(0)}$ 可微．

如果 f 在 D 上处处存在 Jacobian，则就得

$$Jf=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix},$$

它在整个 D 上有定义．对于每一个 $x\in D$ 得一矩阵 $Jf(x)$，所以 Jf 是由 D 到 $m\times n$ 阶矩阵空间的映射．由于 $m\times n$ 阶矩阵实际上相当于 mn 维向量，它的范数定义如第五章 § 1.1(3)式，这和 mn 维向量的范数是一致的，所以 Jf 相当于一个由 D 到 R^{mn} 中的映射．于是由第五章 § 3.2 定理 1，Jf 在 $x^{(0)}$ 连续当且只当每一个偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 都在 $x^{(0)}$ 连续．因此由定理 2 和定理 3 我们又得：

定理 2′ 若 f 在 D 上存在 Jacobian Jf，且 Jf 在 $x^{(0)}$ 连续，则 f 在 $x^{(0)}$ 可微．

以上我们看到，偏导数的连续性对函数会有重要影响．设集合

$D\subset R^n$. 考虑定义在D上的函数或映射f. 设f的所有一阶偏导数在D上都存在(按§1.1中的约定)并且连续, 即Jf在D上存在并且连续, 这种函数或映射的全体记为$\mathscr{C}^{(1)}(D)$或$\mathscr{C}^{(1)}$. 定理2和定理2′说明, 如果$f\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$, 则f在D上可微, 且Jf就是f在D上的"导数". 同样, 如果f在D上具有全体二阶连续偏导数, 则记$f\in\mathscr{C}^{(2)}$, 等等. 如果f在D上只是连续, 则记$f\in\mathscr{C}$。

习　题

1. 设(开集)$D\subset R^n$, f: $D\to R^m$($m=1$时是n元函数). 回答下列问题:

(1) f在一点$x^{(0)}\in D$可微是什么意思? f在$x^{(0)}$的微分是什么?

(2) f的可微与连续有什么关系?

(3) f的可微与其坐标函数有什么关系?

(4) Jacobian $Jf(x)=$? Jf是什么样的映射? Jf的连续性与偏导数$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$有什么关系?

(5) f的可微与其Jacobian有何关系? 这与一元函数比较有何不同? 用Jacobian $Jf(x)$如何表达微分$df(x)$? 由$Jf(x)$存在是否能说微分$df(x)$存在?

(6) 什么时候Jacobian $Jf(x)$可以看作f在x的"导数"?

(7) $f\in\mathscr{C}$、$f\in\mathscr{C}^{(1)}$, $f\in\mathscr{C}^{(2)}$是什么意思? $f\in\mathscr{C}^{(1)}$与Jf有何关系?

(8) 若$f\in\mathscr{C}^{(1)}$是由R^n中到R^n中的映射, 则$\det Jf$是否连续($\det A$表示矩阵A的行列式.)?

(9) 接上问. 记$(Jf)^{-1}(x)=Jf(x)^{-1}$(逆阵). 若$(Jf)^{-1}$存在, 则$(Jf)^{-1}$是否连续?

2. 计算下列映射的Jacobian和微分(为什么可微?):

(1) $f(x,y)=(xy^2-3x^3, 3x-5y^2)$, 在点$(1,-1)$处.

(2) $f(x,y,z)=(xyz^2-4y^2, 3xy^2-y^2z)$, 在点$(1,-2,3)$处.

(3) $f(x,y)=(x+6y, 3xy, x^2-3y^2)$, 在点$(1,1)$处.

(4) $f(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

(5) $f(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$.

(6) $f(r,\theta,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.

3. 设 T 是由 R^n 到 R^m 中的线性变换，则 $JT=$? T 的可微性如何?

4. 设 e 是由 R^n 到 R^n 中的恒等映射：即 $e(x)=x\quad(x\in R^n)$. $Je=$? $de(x)=$?

5. 设 f 是由 R^n 到 R^l 中的映射，g 是由 R^m 到 R^p 中的映射. 视 $F=(f,g)$ 为由 R^{n+m} 到 R^{l+p} 中的映射. 则 $JF=$? 若 $n=m$, 视 F 为由 R^n 到 R^{l+p} 中的映射，则 $JF=$?

6. 设 p, q, r 为一元连续函数，求一可微映射 f 使

$$Jf(x,y,z)=\begin{pmatrix} p(x) & 0 & 0 \\ 0 & q(y) & 0 \\ 0 & 0 & r(z) \end{pmatrix}.$$

7. 设 $D\subset R^n$, f, g: $D\to R^m$. 证明

(1) $Jcf=cJf$, $c\in R$.

(2) $J(f+g)=Jf+Jg$.

(3) 当 $m=1$ 时

$$Jfg=gJf+fJg.$$

(4) 当 $m>1$ 时上式也成立：

$$J(f\cdot g)=gJf+fJg.$$

8. 设f: $[a,b]\to R^2$(或R^n), 当 $x\in[a,b]$ 时 $\|f(x)\|=1$. 证明 $f'\cdot f=0$. 试解释其几何意义.

§2.2 切向量

上面我们讲了函数和映射微分的概念，由此我们来阐明几何上"相切"的含义，从而把切线和切面的概念统一起来.

设 $D\subset R^n$ 是一开集，映射(用列向量表示)

$$f=\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}:\quad D\to R^m.$$

于是 $f(D)$ 便是 R^m 中的一张"超曲面". 若用方程表示这张曲面就是

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

设 f 在一点 $x^{(0)}\in D$ 可微，即 § 2.1(6) 式成立．在 R^n 中任取一向量 h．于是

$$df(x^{(0)})(h)=Ah \tag{1}$$

(§ 2.1(7)) 是 R^m 中的一个向量．设 t 是实数，则当 t 变化时

$$y=f(x^{(0)})+tAh \tag{2}$$

就是 R^m 中一条通过点 $f(x^{(0)})$ 的"超直线" l (图 31)．由 § 2.1(6) 式，当 t 小时

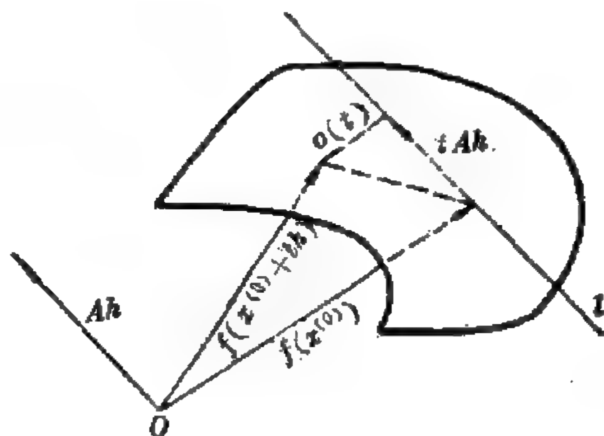


图 31

$$f(x^{(0)}+th)-[f(x^{(0)})+tAh]=R(th),$$

而

$$\|R(th)\|=o(\|th\|)=o(t).$$

因此"直线"(2)就可看作超曲面 $f(D)$ 在点 $f(x^{(0)})$ 的一条"切线"．由于这个原故，我们自然就把向量(1)叫做 $f(D)$ 在 $f(x^{(0)})$ 的一个**切向量**．

另一方面，由 § 2.1 定理 1′，$A=Jf(x^{(0)})$．再由 § 1.2映射求偏导数的公式(12)和(13)知道

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x^{(0)})\\ \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x^{(0)})\end{pmatrix}.$$

因此

$$df(x^{(0)})(h)=Jf(x^{(0)})h=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^{(0)}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^{(0)})\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^{(0)}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^{(0)})\end{pmatrix}h$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}),\ \cdots,\quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)})\right)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}.$$

所以

$$df(x^{(0)})(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)}).\qquad(3)$$

这是切向量的表达式．从此式看到，当 h 在 R^n 中变化时，$f(D)$在 $f(x^{(0)})$的全体切向量

$$\{df(x^{(0)})(h):\quad h\in R^n\}$$

构成 R^m 中的一个线性子空间，就是由向量

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}),\quad \cdots,\quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)})\qquad(4)$$

张成的子空间．我们把这个子空间叫做 $f(D)$ 在 $f(x^{(0)})$的**切空间**．于是微分 $df(x^{(0)})$就是由 R^n 到 $f(D)$在 $f(x^{(0)})$的切空间上的线性变换．我们应特别注意，(4)中的向量也都是 $f(D)$在 $f(x^{(0)})$的切向量．它们不必是线性无关的，因此切空间的维数$\leqslant n$．

综合上述：若 f 在 $x^{(0)}\in D$ 可微，则(4)中的向量张成超曲面 $f(D)$在$f(x^{(0)})$的切空间，就是 $f(D)$在$f(x^{(0)})$的全部切向量．至于 f 用列向量还是用行向量来表示是无关紧要的．

作为例子，我们再看一看切空间在 R^3 中的具体表示．

设有曲线

$$(x,y,z)=f(t),\qquad t\in[\alpha,\beta].$$

它在一点 $p_0=f(t_0)$ 相应于(4)中的那些切向量就只有一个

$f'(t_0)$，这正就是§1.2(4)中所述的切向量．这个切向量张成的子空间是一条直线

$$(x, y, z) = h f'(t_0), \qquad h \in R.$$

再将此直线平行移动到 p_0 就得曲线在该点的切线

$$(x, y, z) = p_0 + h f'(t_0), \qquad h \in R.$$

即§1.2(6)．

再考虑曲面

$$(x, y, z) = f(u, v), \qquad (u, v) \in D.$$

它在一点 $p_0 = f(u_0, v_0)$ 相应于(4)中的那些切向量有两个

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0).$$

如果这两个向量线性无关，即

$$\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0,$$

它们张成的子空间便是一张平面

$$(x, y, z) = h_1 \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0), \quad h_1, h_2 \in R.$$

平行移动到 p_0 就得曲面在该点的切面

$$(x, y, z) = p_0 + h_1 \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0), \quad h_1, h_2 \in R.$$

写成分量形式，消去 h_1 和 h_2 即得§1.2(16)．

上面我们由切向量的概念得到了切空间的概念．这两个概念不受维数的限制．把它们应用于 R^3 中我们便看到，§1.2中切线和切面的概念是统一的，它们都是(经过平行移动的)切空间．

习　　题

1．设(开集) $D \subset R^n$，f： $D \to R^m$．$x^{(0)} \in D$．回答下列问题：

(1) 超曲面 $f(D)$ 何时在点 $f(x^{(0)})$ 存在切向量？切向量是如何定义的？

(2) $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^{(0)}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^{(0)})$是不是切向量？为什么？它们张成什么空间？它们能否代表曲面在$f(x^{(0)})$的全部切向量？

(3) 当$n=1, m=3$时切空间是由什么向量张成的？

(4) 当$n=2, m=3$时切空间是由什么向量张成的？

2. 求出下列超曲面在指定点的切空间，并指出其维数：

(1) $(x, y, z, w)=f(u, v)=(u+v^2, u^2, uv, v^2)$，在$f(1, 1)$.

(2) $(x, y, z, w)=f(r, s, t)=(2r^2+1, rs, st, t^3)$，在$f(1, 1, -1)$.

(3) $(x, y)=e(x, y)$，e是恒等映射．在任意点．

(4) $(x, y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$，$r\neq 0$．画出图形．

(5) $(x, y, z)=(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$，$r\neq 0$．画出图形．

§2.3 复合求导

学习了映射的导数概念以后，进而自然要问，一元函数的求导法则，即复合函数和反函数求导方法，对映射是否成立？答案是肯定的．现在我们先讨论复合求导，到§3.3中再研究逆射求导问题．

定理1 （复合求导） 设$D\subset R^n$是一开集，f: $D\to R^m$；又$\Delta\subset R^l$是一开集，g: $\Delta\to D$．设g在一点$u^{(0)}\in\Delta$可微，f在对应点$x^{(0)}=g(u^{(0)})$可微，则复合映射$f\circ g$在$u^{(0)}$可微，且

$$Jf\circ g(u^{(0)})=Jf(x^{(0)})Jg(u^{(0)}). \tag{1}$$

证明 因为g在$u^{(0)}$可微，所以

$$g(u)-g(u^{(0)})=Jg(u^{(0)})(u-u^{(0)})+R_g(u-u^{(0)}), \tag{2}$$

其中R_g当$u\to u^{(0)}$时满足

$$\|R_g(u-u^{(0)})\|=o(\|u-u^{(0)}\|).$$

又因f在$x^{(0)}=g(u^{(0)})$可微，所以

$$f(x)-f(x^{(0)})=Jf(x^{(0)})(x-x^{(0)})+R_f(x-x^{(0)}), \tag{3}$$

其中R_f当$x\to x^{(0)}$时满足

$$\|R_f(x-x^{(0)})\|=o(\|x-x^{(0)}\|).$$

在(3)式中令 $x=g(u)$, 则由(2)式得

$$f\circ g(u)-f\circ g(u^{(0)})=Jf(x^{(0)})Jg(u^{(0)})(u-u^{(0)})+R(u-u^{(0)}),\tag{4}$$

其中

$$R(u-u^{(0)})=Jf(x^{(0)})R_g(u-u^{(0)})+R_f(x-x^{(0)}).$$

因为(第五章§1.1(4))

$$\|Jf(x^{(0)})R_g(u-u^{(0)})\|\leqslant\|Jf(x^{(0)})\|\|R_g(u-u^{(0)})\|$$
$$=o(\|u-u^{(0)}\|);$$

又由(2)式,

$$\|x-x^{(0)}\|\leqslant\|Jg(u^{(0)})\|\|u-u^{(0)}\|+\|R_g(u-u^{(0)})\|,$$

所以当 $u\to u^{(0)}$ 时 $x\to x^{(0)}$, 且

$$\frac{\|R_f(x-x^{(0)})\|}{\|u-u^{(0)}\|}\leqslant\frac{\|R_f(x-x^{(0)})\|}{\|x-x^{(0)}\|}\left[\|Jg(u^{(0)})\|+\frac{\|R_g(u-u^{(0)})\|}{\|u-u^{(0)}\|}\right]$$

$\to 0.$

所以当 $u\to u^{(0)}$ 时

$$\|R(u-u^{(0)})\|=o(\|u-u^{(0)}\|).$$

因此(4)式就说明 $f\circ g$ 在 $u^{(0)}$ 可微, 并且(§2.1定理1′)(1)式成立. □

在定理1中, 如果 f 在 D 上可微, g 在 Δ 上可微. 令

$$y_i=f_i(x_1,\cdots,x_n),\quad i=1,\cdots,m,$$
$$x_j=g_j(u_1,\cdots,u_l),\quad j=1,\cdots,n,$$

其中 f_i 和 g_j 分别是 f 和 g 的坐标函数. 则由(1)式就有

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial u_l}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial u_l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_l}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_l}\end{pmatrix}\tag{5}$$

推论1 设二元函数 φ 和 ψ 在一点 (s_0,t_0) 可微; $x_0=\varphi(s_0,t_0)$,

$y_0=\psi(s_0, t_0)$；又二元函数 f 在点 (x_0, y_0) 可微. 设

$$u(s, t)=f(\varphi(s, t), \psi(s, t)),$$

则复合函数 u 在 (s_0, t_0) 可微, 且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial s}(s_0, t_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\dfrac{\partial \psi}{\partial s}(s_0, t_0), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(s_0, t_0)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\dfrac{\partial \psi}{\partial t}(s_0, t_0).\end{cases} \tag{6}$$

证明 令

$$\boldsymbol{g}=(\varphi, \psi).$$

于是 $u=f\circ \boldsymbol{g}$. 由假设 φ 和 ψ 在 (s_0, t_0) 可微, 所以 $\boldsymbol{g}$ 在 (s_0, t_0) 可微. 又 f 在 $(x_0, y_0)=\boldsymbol{g}(s_0, t_0)$ 可微, 由定理 1, 复合函数 $u=f\circ \boldsymbol{g}$ 在 (s_0, t_0) 可微, 且

$$Ju(s_0, t_0)=Jf(x_0, y_0)J\boldsymbol{g}(s_0, t_0),$$

即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}(s_0, t_0), \frac{\partial u}{\partial t}(s_0, t_0)\right)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0), & \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial s}(s_0, t_0), & \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(s_0, t_0)\end{pmatrix}.$$

这就是(6)式. □

在推论 1 中, 如果 f, φ, ψ 在其定义域上可微, 令

$$u=f(x, y), \quad x=\varphi(s, t), y=\psi(s, t).$$

则由(6)式就有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial s}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t}.\end{cases} \tag{7}$$

例 1 设二元函数 f 处处可微，令 $u=f(a+ht,\ b+kt)$，求 u'_t.

解 令 $x=\varphi(t)=a+ht,\ y=\psi(t)=b+kt$. 由推论 1，应用(7)式，

$$\begin{aligned}u'_t&=f'_x(a+ht,b+kt)x'_t+f'_y(a+ht,b+kt)y'_t\\&=hf'_x(a+ht,b+kt)+kf'_y(a+ht,b+kt).\quad\square\end{aligned}$$

例 2 设 f 是一个可微二元函数，φ 是一个可微一元函数. 令 $u=f(x,\varphi(x))$，求 u'_x.

解 由推论 1，应用(7)式，

$$\begin{aligned}u'_x&=f'_x(x,\varphi(x))x'_x+f'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)\\&=f'_x(x,\varphi(x))+f'_y(x,\varphi(x))\varphi'(x).\quad\square\end{aligned}$$

例 3 设二元函数 f 有连续的一阶偏导数，$u=f(x,y)$，$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$. 证明

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

解 由推论 1，应用(7)式，

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)=-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta.$$

两式平方相加便得所证. $\square$

例 4 设二元函数 f 有连续的一阶偏导数，$u=f(x+y+z,\ x^2+y^2+z^2)$. 求 u 的一阶偏导数.

解 设 $\xi=x+y+z,\ \eta=x^2+y^2+z^2$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+2x\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

同样，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+2y\frac{\partial u}{\partial \eta},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+2z\frac{\partial u}{\partial \eta}.\quad\square$$

例 5 设

$$u=f(x, y), \quad v=g(x, y, u), \quad w=h(x, u, v).$$

求 $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$.

解 我们可以应用推论 1, 作复合函数求导. 也可以应用定理 1, 作复合映射求导. 这里我们用后者求导. 要求导的映射(函数)是

$$(x, y) \longmapsto w. \tag{8}$$

它是下列三个映射复合而成的:

$$(x, y) \longmapsto (x, y, u) \longmapsto (x, u, v) \longmapsto w.$$

由(5),

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial u}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y}\\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial u}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}.$$

所以

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

请注意，上式左右两端的$\frac{\partial w}{\partial x}$是不同的，左端的$\frac{\partial w}{\partial x}$是映射(8)的偏导数，而右端的$\frac{\partial w}{\partial x}$是映射(函数) $(x, u, v)\longmapsto w$ 的偏导数，即

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial x}(x, u, v). \ \Box$$

推论 2 设二元函数 f 在一点 $\boldsymbol{p}_0=(x_0, y_0)$可微，则 f 在 $\boldsymbol{p}_0$ 沿任一方向 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$的方向导数均存在，且

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x_0, y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\sin\alpha=df(\boldsymbol{p}_0)(\boldsymbol{e}). \tag{9}$$

证明 令

$$u(t)=f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha).$$

由§1.1定义1，$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{e}}(x_0, y_0)=u'(0)$. 应用推论1便立即得证. $\Box$

推论2的逆不成立，见§2.1例1.

例6 设 $p=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 求 p 沿任一方向 $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$的方向导数.

解 由推论2,

$$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{e}}=\frac{\partial p}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial p}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial p}{\partial z}\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{p}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$

$$=\left\langle\frac{\boldsymbol{p}}{\|\boldsymbol{p}\|}, \boldsymbol{e}\right\rangle=\cos\theta,$$

其中 θ 是向量 $\boldsymbol{e}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 的夹角(图32).

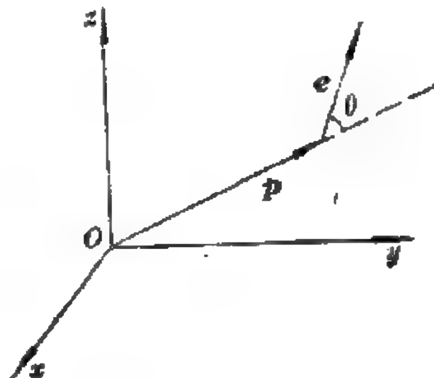


图 32

习　　题

1. 问答下列问题:

(1) 复合求导公式(1)或(5)在什么条件下成立? 如果 Jg 在 $u^{(0)}$ 连续, Jf 在 $x^{(0)}=g(u^{(0)})$ 连续, 则公式(1)是否成立?

(2) 设 f 是可微映射, A 是常数矩阵, $F=Af$, 则 $JF=$?

2. 设 $u=x^2y-xy^2$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial r}$, $\dfrac{\partial u}{\partial\theta}$.

3. 求 u 的一、二阶偏导数, 设

(1) $u=f(x+y, xy)$;　(2) $u=f(x, xy, xyz)$;　(3) $u=f\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{y}{z}\right)$.

4. 设 $u=f(x,y)$ 当 $y=x^2$ 时有

$$u=1,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=x.$$

求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=x^2}$.

5. 设 $u=f(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

和条件

$$\left.u\right|_{y=2x}=x,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=2x}=x^2.$$

求 $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{y=2x}$, $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{y=2x}$, $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=2x}$.

6. 设 $f(x,y,z)=F(u,v,w)$, 其中 $x^2=vw$, $y^2=wu$, $z^2=uv$. 证明

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=uF'_u+vF'_v+wF'_w.$$

7. 证明 Laplace 方程

$$\Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$$

经下列换元后形式不变:

(1) $u=x^2-y^2$, $v=2xy$;

(2) $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y=\dfrac{v}{u^2+v^2}$.

(3) $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$, 且 u,v 满足 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

8. 证明方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

经换元 $x=e^s$, $y=e^t$ 成为 Laplace 方程.

9. 求 $Jf\circ g$, 设

(1) $f(x,y)=(xy,x^2y)$, $g(s,t)=(s+t,s^2-t^2)$, 在 $(2,1)$ 处;

(2) $f(x,y)=(\varphi(x+y),\varphi(x-y))$, $g(s,t)=(e^s,e^{-t})$;

(3) $f(x,y)=(e^{x+2y},\sin(y+2x))$, $g(u,v,w)=(u+2v^2+3w^3,2v-u^2)$, 在 $(1,-1,1)$ 处;

(4) $f(x,y,z)=(x^2+y+z,2x-y-z^2,0)$, $g(u,v,w)=(uv^2w^2,w^2\sin v,u^2e^v)$.

10. 设 $L(x)=Ax$, $A=(c_{ij})$ 为 $n\times n$ 矩阵. f 是 n 元函数, $F=f\circ L$. 证明

(1) $F''_{kl}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}f''_{ij}c_{ki}c_{jl}$.

(2) 若 A 为正交阵, 则

$$F''_{11}+\cdots+F''_{nn}=f''_{11}+\cdots+f''_{nn}.$$

11. (Euler 公式)设 $p\in R$, f: $R^n\to R^m$. 如果

$$f(tx)=t^pf(x)$$

对一切 $x\neq 0$ 和 $t>0$ 成立, 则 f 叫做 p 次"齐次映射". 证明 f 为 p 次齐次映射的充分必要条件是

$$Jf(x)x=pf(x)$$

对一切 $x\neq 0$ 成立. 式中 x 和 f 均是列向量.

提示: 充分性令 $\varphi(t)=\dfrac{f(tx)}{t^p}$.

12. 设 Q 是正定实二次形: $Q(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$, $a_{ij}=a_{ji}$. 又 $f(x)=Q(x)^{p/2}$. 验证上题中的 Euler 公式.

13. 设 f 是 0 次二元齐次函数, 证明 f 的形式为 $f(x,y)=F\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

提示：应用前题Euler 公式，并作极坐标换元.

14. 求 $\frac{\partial u}{\partial e}$. 设

(1) $u=x^2-y^2$ 在点(1, 1)处，e 与 ox 轴的夹角为60°；

(2) $u=xyz$ 在点(1, 1, 1)处；

(3) $u=\ln(x+y)$ 在点(1, 2)处，e 为抛物线 $y^2=4x$ 的切线方向.

15. 设 $u=f(x, y, z)$, $e=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. 计算$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2}$.

16. 设 e_1, e_2, e_3 是 R^3 中相互垂直的单位向量，证明

(1) $\left(\frac{\partial u}{\partial e_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial e_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial e_3}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial e_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial e_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial e_3^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

17. 设 $f(x, y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0, 0)=0$. 证明 f 在(0, 0)存在一阶偏导数，但不存在其它方向导数.

18. 试将方向导数的概念推广到映射，并证明方向导数就是切向量.

§2.4 拟微分平均值定理

我们知道，对于一元可微函数有微分平均值定理成立. 欧氏空间中的可微映射虽然也有“导数”，但微分平均值定理不成立. 然而有类似的定理，这就是下面的定理1.

设 $A\subset R^n$, $a, b\in A$. 则

$$x=(1-t)a+tb \qquad (t\in R)$$

就是通过 a, b 二点的“超直线”. 特别，当 $t\in[0, 1]$时便得联结 a 和 b 的“直线段”，记为 $\overline{ab}$, 即

$$\overline{ab}=\{(1-t)a+tb:\ t\in[0, 1]\}.$$

如果对于 A 中任意二点 a, b 均有 $\overline{ab}\subset A$, 则称 A 为**凸集**. 凸的开集当然是一区域(第五章§2.4定义1和定理2)，就叫做“凸域”. 显然，R 中的凸集就是区间. 所以一元函数的微分平均值定理只对凸集成立.

定理 1 （拟微分平均值定理） 设 $D\subset R^n$ 是一凸域，f：$D\to R^m$ 在 D 上可微，则当 $a,b\in D$ 时存在 $\xi\in\overline{ab}$ 使

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant\|Jf(\xi)\|\|b-a\|.$$

证明 当 $t\in[0,1]$时令

$$\gamma(t)=(1-t)a+tb,$$

$$g(t)=f\circ\gamma(t),$$

$$\varphi(t)=\langle f(b)-f(a),g(t)\rangle.$$

由§2.3 定理 1 知 g 可微．易见

$$\varphi'(t)=\langle f(b)-f(a),g'(t)\rangle.$$

由 Schwarz 不等式（第五章§1.1(2)）

$$|\varphi'(t)|\leqslant\|f(b)-f(a)\|\|g'(t)\|.$$

再由一元函数的微分平均值定理，

$$|\varphi(1)-\varphi(0)|=|\varphi'(\theta)|\leqslant\|f(b)-f(a)\|\|g'(\theta)\|,$$

其中 θ 是$(0,1)$中某数．另一方面，

$$|\varphi(1)-\varphi(0)|=|\langle f(b)-f(a),g(1)-g(0)\rangle|$$
$$=\|f(b)-f(a)\|^2.$$

合并以上二式便得

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant\|g'(\theta)\|.$$

再由复合求导(§2.3 定理 1)，

$$g'(\theta)=Jg(\theta)=Jf(\gamma(\theta))\gamma'(\theta)=Jf(\gamma(\theta))(b-a).$$

令 $\xi=\gamma(\theta)$，则 $\xi\in\overline{ab}$．将此式代入上式便得所证． □

这个定理类似于一元函数微分平均值定理，我们暂称之为"拟微分平均值定理"．它有类似于微分平均值定理的作用，如下面的定理 2．由一元函数的微分平均值定理知道，区间上的一元函数，如果其导函数为 0，则是一常数．这个定理对于多元函数和映射也是成立的，其证明同时也是连通性的一个示范性应用．

定理 2 设 $D\subset R^n$ 是一区域，f： $D\to R^m$．如果 $Jf=0$，也

就是说，对一切 $x\in D$ 有

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)=0,\ i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n,$$

则 f 是一常向量.

证明 我们首先注意到，若 $G\subset D$ 是一凸域，则由定理 1 可见，f 在 G 上是一常向量. 任取 $x^{(0)}\in D$. 令

$$U=\{x\in D:\quad f(x)=f(x^{(0)})\}.$$

我们就是要证 $U=D$. 先证 U 是开集：任取 $x^{(1)}\in U$. 则 $x^{(1)}\in D$. 但 D 是开的，因此有以 $x^{(1)}$ 为球心的开球 $B_1\subset D$. B_1 是凸域，如上所指出，f 在 B_1 上是一常向量. 于是当 $x\in B_1$ 时

$$f(x)=f(x^{(1)})=f(x^{(0)}).$$

上式表明 $x\in U$，由此便知 $B_1\subset U$. 所以 $x^{(1)}$ 是 U 的内点，即 U 是开集. 同样可证 $D\cap U^c$ 也是开集：任取 $x^{(2)}\in D\cap U^c$. 则 $x^{(2)}\in D$，因此有以 $x^{(2)}$ 为球心的开球 $B_2\subset D$. 同样 f 在 B_2 上也是一常向量. 所以当 $x\in B_2$ 时

$$f(x)=f(x^{(2)}).$$

但 $x^{(2)}\bar{\in}U$，所以当 $x\in B_2$ 时 $x\bar{\in}U$. 因此 $B_2\subset D\cap U^c$，即 $D\cap U^c$ 也是开集. 然而 D 是区域，且 $U\neq\varnothing$（因 $x^{(0)}\in U$），所以 $D\cap U^c=\varnothing$（第五章 § 2.4 定理 1），所以 $U=D$. □

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) 微分平均值定理对映射是否成立？

(2) 在定理 1 的假设下，如果 Jf 有界，则 f 的连续性如何？

(3) 如果 D 非区域，定理 2 能否成立？

2. 设 $D\subset R^n$ 是一凸域，f 是 D 上的可微函数. 证明微分平均值定理成立：若 $a,b\in D$，则存在 $\xi\in\overline{ab}$ 使

$$f(b)-f(a)=Jf(\xi)(b-a).$$

3. （多元凸函数）设 $D\subset R^n$ 是一凸集，f: $D\to R$. 如果对于一切 $x_1, x_2 \in D$,

$$f(tx_2+(1-t)x_1)\leqslant tf(x_2)+(1-t)f(x_1)$$

当 $t\in(0,1)$ 时成立，则称 f（在 D 上）为**凸**的. 设 D 是凸域，且 f 可微. 证明 f 为凸的充要条件是对一切 $a, b\in D$ 有

$$f(b)-f(a)\geqslant Jf(a)(b-a).$$

第三节　隐射和逆射定理

§3.1　隐函数定理

本节我们讨论一个在分析学中极为重要的问题，即所谓"隐函数存在定理". 这个定理的最简单形式就是说明一个二元方程

$$F(x, y)=0 \tag{1}$$

在什么条件下有可微解

$$y=f(x) \tag{2}$$

或

$$x=g(y). \tag{3}$$

(2) 是在方程(1)中关于 x 求解 y 所得之解，就是说，固定 x 解 y. 这个解 y 自然依赖于 x，因此 y 关于 x 有函数关系 f. 同样(3)是在(1)中关于 y 求解 x 所得之解，x 关于 y 也有函数关系 g.

例如，从圆的方程

$$x^2+y^2=r^2$$

我们可以立即解得

$$y=\sqrt{r^2-x^2}\text{（上半圆）}\quad 和 \quad y=-\sqrt{r^2-x^2}\text{（下半圆）}$$

或

$$x=\sqrt{r^2-y^2}\text{（右半圆）}\quad 和 \quad x=-\sqrt{r^2-y^2}\text{（左半圆）}.$$

这些解都是定义在区间上的，除端点外均可微. 然而更多的方程如

$$\sin x;\ \ln y - xy^3 = 0$$

就很难求解．但是我们可以根据"隐函数存在定理"回答它是否有可微解以及如何对解求导．由于许多方程虽然有解，但往往无法求解，因此就产生了一个概念：我们把(2)和(3)中的函数 f 和 g 一般地都叫做由方程(1)确定的隐函数．

在几何上，方程(1)在 R^2 中表示一个点集

$$L = \{(x, y) \in R^2: \quad F(x, y) = 0\},$$

通常叫做一条"隐表示"的曲线．和参数曲线一样，它并不一定是我们直观中的一条曲线．它与坐标轴的平行线相交也可以不只一点(图 33)．用方程(2)（或(3)）表示的曲线也叫做"显表示"的曲线；它与平行于 y 轴的直线相交最多一点．因此，如欲使(2)是(1)的解，它只能在局部范围内是(1)的解(图 33)．由此观之，我们的问题只能在局部的范围内解决．

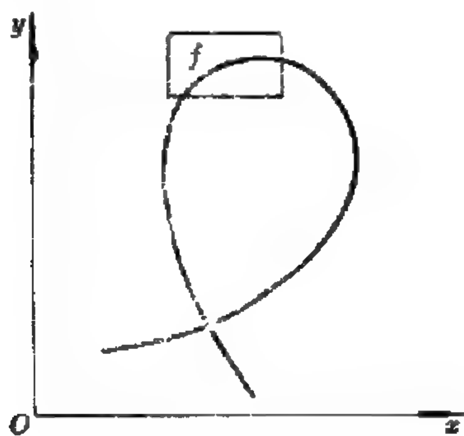


图 33

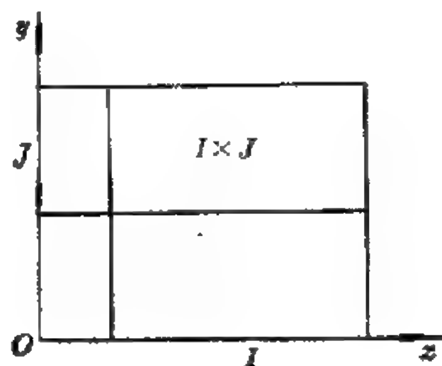


图 34

设 $I, J \subset R$ 是两个区间．则 $I \times J \subset R^2$(图 34)是一个矩形，它的边平行于坐标轴．我们也把它叫做"区间"．同样，若 $I_1, \cdots, I_n \subset R$ 是区间，则 $I = I_1 \times \cdots \times I_n \subset R^n$ 也叫做"区间"．

定理 1(隐函数定理(1))　设 $D \subset R^2$ 是一开集，$F:\ D \to R$．如果

1) $F\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$;

2) $F(x_0, y_0)=0$;

3) $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$.

则存在一个含有(x_0, y_0)的开区间$I\times J\subset D$使得

1° 对于每一个$x\in I$方程(1)在J中有唯一的解$y=f(x)$，其中f是由I到J中的函数(隐函数)，且

2° $f(x_0)=y_0$;

3° $f\in\mathscr{C}^{(1)}(I)$;

4° 当$x\in I$时

$$f'(x)=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \qquad (4)$$

其中$y=f(x)$.

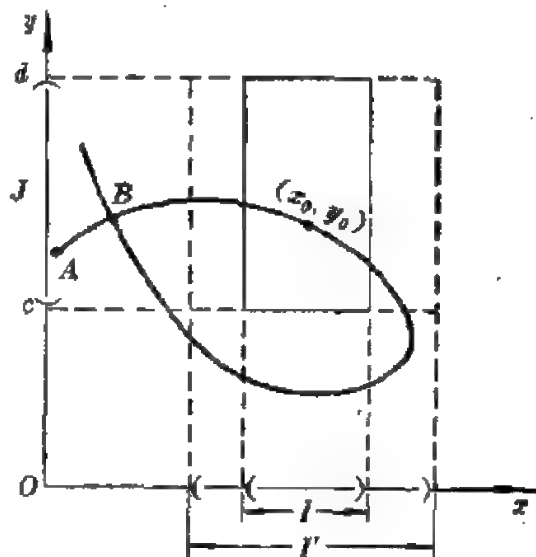


图 35

证明 由假设3)，不妨设$F'_y(x_0, y_0)>0$. 再由假设1)，存在一个含有(x_0, y_0)的开区间$I'\times J$，$I'\times J\subset D$，在$I'\times J$上$F'_y>0$(图35). 于是对于每一个$x\in I'$，函数$F(x, \cdot)$在J上严格增. 设$J=(c, d)$，则由假设2)必须有

$$F(x_0, c)<0, \quad F(x_0, d)>0.$$

又由假设1)，F可微，故F连续，因此存在含有x_0的开区间$I\subset I'$，当$x\in I$时

$$F(x, c)<0, \quad F(x, d)>0.$$

再由介值定理和严格单调性便知，对于每一个$x\in I$唯一地存在一数$y=f(x)\in(c, d)$使$F(x, y)=0$. 这便证明了1°. 显然，f满足2°. 我们注意到，在以上的证明中区间$I'\times J$，从而$I\times J$，可以取得任意小.

为了证明3°和4°，我们先证f在I上连续. 任取$x_1\in I$. 设

$f(x_1)=y_1$，则$(x_1, y_1)\in I\times J$．因为$F(x_1, y_1)=0$，$F'_y(x_1, y_1)>0$，所以(x_1, y_1)和(x_0, y_0)满足同样的条件．因此由上所证，存在含有(x_1, y_1)的开区间$I_1\times J_1\subset I\times J$，当$x\in I_1$时方程(1)在$J_1$中有唯一解$y=g(x)$，$g(x_1)=y_1$．任给$\varepsilon>0$，由于区间$I_1\times J_1$可以取得任意小，所以可取$I_1\times J_1$使$J_1\subset(y_1-\varepsilon, y_1+\varepsilon)$．于是当$x\in I_1$时

$$g(x_1)-\varepsilon<g(x)<g(x_1)+\varepsilon.$$

然而由唯一性显见在I_1上应有$g=f$，这就说明f在x_1是连续的．由x_1的任意性便知f在I上是连续的．

再证f满足3°和4°．设$x\in I$．取h很小使$x+h\in I$．令

$$y=f(x),\quad k=f(x+h)-f(x).$$

于是由§2.1(5)式有

$$\begin{aligned}0&=F(x+h, y+k)-F(x, y)\\&=F'_x(x, y)h+F'_y(x, y)k+\alpha h+\beta k,\end{aligned}$$

其中当$h, k\to 0$时$\alpha, \beta\to 0$．但f是连续的，所以当$h\to 0$时$k\to 0$，从而$\alpha, \beta\to 0$．于是，注意到在$I\times J$上$F'_y\neq 0$，当$h\to 0$时

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\frac{F'_x(x, y)+\alpha}{F'_y(x, y)+\beta}\to-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

即3°和4°成立．□

例1 设

$$x^2y^2-3y+2x^3=0,$$

试求当$x=y=1$时的导数y'．

解 当$x=1$时方程有两个解$y=1$和$y=2$．根据题意，我们求导的是这么一个解$y=f(x)$，当$x=1$时$y=1$．设

$$F(x, y)=x^2y^2-3y+2x^3.$$

因为

$$F'_y(1, 1)=(2x^2y-3)|_{x=y=1}=-1\neq 0,$$

故由定理1所求可微解是存在的．又

$$F'_x(1, 1)=(2xy^2+6x^2)_{x=y=1}=8.$$

所以由(4)式得 $y'=8$. □

上面定理1是隐函数存在定理的最简单情形. 从定理1的证明可以看到, 它与方程(1)中变元 x 的维数无关. 若 $x\in R^n$, 则对于方程(1)有完全同样的定理成立, 而不须再证. 我们叙述如下:

先引进一术语, 若 a 是欧氏空间中的一点, 我们把含有 a 的任一开集都叫做 a 的一个**邻域**.

定理 2(隐函数定理(2)) 设 $D\subset R^{n+1}$ 是一开集, $F:D\to R$. 如果

1) $F\in\mathscr{C}^{(1)}$;

2) $F(x^{(0)}, y_0)=0$, 其中 $x^{(0)}\in R^n$, $y_0\in R$, $(x^{(0)}, y_0)\in D$;

3) $F'_y(x^{(0)}, y_0)\neq 0$.

则存在 $(x^{(0)}, y_0)$ 的一个邻域 $G\times J$ (G 是 $x^{(0)}$ 在 R^n 中的一个邻域, J 是 R 中含有 y_0 的一个开区间)使得

1° 对于每一个 $x\in G$ 方程(1)在 J 中有唯一的解 $y=f(x)$, 其中 f 是由 G 到 J 中的函数(隐函数), 且

2° $f(x^{(0)})=y_0$;

3° $f\in\mathscr{C}^{(1)}$;

4° 当 $x\in G$ 时

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=-\frac{F'_{x_i}(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad i=1, \cdots, n, \tag{5}$$

其中 $y=f(x)$.

例 2 设

$$\sin z-xyz=0,$$

求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解 令

$$F(x, y, z)=\sin z-xyz.$$

由定理 2 和(5)式，当

$$F'_z(x, y, z)=\cos z-xy\neq 0$$

时有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{\cos z-xy}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{\cos z-xy}.$$

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) 如何叙述隐函数定理？

(2) 如何证明隐函数定理(1)？

(3) 设二元函数 F 可微，且方程 $F(x, y)=0$ 有可微解 $y=f(x)$。能否直接从方程计算 f'？

(4) 在图 35 中的 A 点和 B 点上能否有 $F'_y\neq 0$？

(5) 在定理(1)中如果 $F\in\mathscr{C}^{(r)}$，能否得出隐函数 $f\in\mathscr{C}^{(r)}$？

2. 在下列方程中计算 y'：

(1) $x^2+2xy-y^2=a^2$；　　(2) $xy-\ln y=0$，　在 $(0, 1)$ 处；

(3) $y-\varepsilon\sin y=x$，$\varepsilon\in(0, 1)$；　　(4) $x^y=y^x$，$(x\neq y)$。

3. 在下列方程中计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$：

(1) $e^z-xyz=0$；　　(2) $z^2y-xz^3-1=0$，在 $(1, 2, 1)$ 处；

(3) $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$；　　(4) $x+y+z=e^{-(x+y+z)}$；

(5) $x^3+y^3+z^3-4axyz=0$，$a>0$，在 $(1, -1, 2\sqrt{a})$ 处。

4. 设 $F(x, y, z)=0$，证明 $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$。

5. 设 $F(x-y, y-z, z-x)=0$，计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

6. 设 $x^2+2y^2+3z^2+xy-z-9=0$，在 $(1, -2, 1)$ 处计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

7. 设 $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2)=0$，计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

8. 证明隐函数定理(2)。

§3.2 隐射定理

现在我们将§3.1中的隐函数定理推广到m个未知元$y_1, \cdots, y_m$和m个方程的方程组的情形：

$$
\begin{gathered}
F_1(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
F_m(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) = 0.
\end{gathered} \tag{1}
$$

它的解的形式当然是

$$
\begin{gathered}
y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n).
\end{gathered}
$$

如果我们令

$$F = (F_1, \cdots, F_m). \tag{2}$$

则F是一个由R^{n+m}中到R^m中的映射．记$x \in R^n$，$y \in R^m$，则方程组(1)就可以统一为§3.1方程(1)的形式

$$F(x, y) = 0. \tag{3}$$

同样(1)的解也可以统一为§3.1(2)的形式

$$y = f(x),$$

其中f是一个由R^n中到R^m中的映射，我们一般地把它叫做由方程(3)确定的隐射．

设(2)中F的定义域为开集$D \subset R^{n+m}$，又设Jacobian JF在D上存在．在

$$
JF = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}
\end{pmatrix}
$$

中记

$$J_1F=J_xF=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{pmatrix},$$

$$J_2F=J_yF=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{pmatrix}.$$

这是 F 的两个"偏" Jacobian，它们分别是边缘映射 $F(\cdot,\ y)$和 $F(x,\cdot)$的 Jacobian. 于是

$$JF=(J_1F,\ J_2F)=(J_xF,\ J_yF).$$

若 A 是任一方阵，我们记其行列式为 det A.

隐射也有和隐函数完全相同的定理.

定理 1(隐射定理) 设 $D\subset R^{n+m}$ 是一开集，F: $D\to R^m$. 如果

1) $F\in\mathscr{C}^{(1)}$;

2) $F(x^{(0)},y^{(0)})=0$;

3) $\det J_yF(x^{(0)},y^{(0)})\neq 0$.

则存在$(x^{(0)},y^{(0)})$的一个邻域 $G\times H$ 使得

1° 对于每一个 $x\in G$ 方程(3)在 H 中有唯一的解 $y=f(x)$，其中 f 是由 G 到 H 中的映射(隐射)；且

2° $f(x^{(0)})=y^{(0)}$;

3° $f\in\mathscr{C}^{(1)}$;

4° 当 $x\in G$ 时

$$Jf(x)=-J_yF(x,y)^{-1}J_xF(x,y)$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x,y) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x,y) \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x,y) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x,y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(x,y) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

其中 $y=f(x)$.

证明 我们先用归纳法证明命题：在定理的假设条件下，1°，2°和3°成立．由§3.1定理2知此命题当 $m=1$ 时成立．现假定此命题对自然数 $m-1$ 成立，证明它对自然数 m 也成立．

由条件1)和3)，存在 $(x^{(0)}, y^{(0)})$ 的邻域 $D'\subset D$，在 D' 上 $\det J_yF$ 处处不为零．以下我们以 D' 代 D.

由条件3)，$\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x^{(0)}, y^{(0)})$ 不能都为0，为方便起见，设

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x^{(0)}, y^{(0)})\neq 0. \tag{5}$$

改记

$$(x, y)=(x, y_1, \cdots, y_m)=(x, u_1, \cdots, u_{m-1}, y_m)=(x, u, y_m).$$

相应地，

$$(x^{(0)}, y^{(0)})=(x^{(0)}, u^{(0)}, y_m^{(0)}).$$

由条件1)，$F_m\in\mathscr{C}^{(1)}$．又由条件2)，

$$F_m(x^{(0)}, u^{(0)}, y_m^{(0)})=F_m(x^{(0)}, y^{(0)})=0.$$

再由(5)式和§3.1定理2，存在 $(x^{(0)}, u^{(0)}, y_m^{(0)})$ 的邻域 $(G_n\times G_{m-1})\times J\subset D'$ 使得

(1°) 对于每一点 $(x, u)\in G_n\times G_{m-1}$ 方程

$$F_m(x, u, y_m)=0$$

在 J 中有唯一的解 $y_m=\varphi(x, u)$，其中 φ 是由 $G_n\times G_{m-1}$ 到 J 中的函数，且

(2°)　$\varphi(x^{(0)}, u^{(0)})=y_m^{(0)}$;

(3°)　$\varphi\in\mathscr{C}^{(1)}$.

这就是说，我们从方程组(1)的最后一个方程得到解 y_m. 下面我们再把这个解 y_m 代入 (1) 的前 $m-1$ 个方程以解 $y_1, \cdots, y_{m-1}$. 为此，令

$$F_i(x, u, \varphi(x, u))=\Phi_i(x, u),$$

$$(x, u)\in G_n\times G_{m-1},\quad i=1, \cdots, m-1.$$

考虑映射

$$\Phi=(\Phi_1, \cdots, \Phi_{m-1}):\quad G_n\times G_{m-1}\to R^{m-1}.$$

如果我们证明了 Φ 满足条件 1), 2) 和 3)，则就可以对 Φ 用归纳假设，得知定理的结论 1°, 2° 和 3° 对方程

$$\Phi(x, u)=0 \tag{6}$$

成立. 由此就很容易证得命题对自然数 m 成立.

显然，由 Φ 的定义和(3°)有 $\Phi\in\mathscr{C}^{(1)}$.

再由(2°)和条件 2) 有

$$\Phi_i(x^{(0)}, u^{(0)})=F_i(x^{(0)}, u^{(0)}, y_m^{(0)})=F_i(x^{(0)}, y^{(0)})=0,$$

$$i=1, \cdots, m-1.$$

所以 $\Phi(x^{(0)}, u^{(0)})=0$.

令

$$\psi(x, u)=(x, u, \varphi(x, u)),\ (x, u)\in G_n\times G_{m-1}.$$

则由 Φ 的定义和(1°)有

$$\begin{pmatrix}\Phi(x, u)\\ 0\end{pmatrix}=F\circ\psi(x, u),\quad (x, u)\in G_n\times G_{m-1}.$$

对此式复合求导得

$$\begin{pmatrix} J\Phi(x,u) \\ 0 \end{pmatrix} = JF(\psi(x,u))J\psi(x,u),\ (x,u)\in G_n\times G_{m-1},$$

即

$$\begin{pmatrix} J_x\Phi & J_u\Phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,u)} = (J_xF, J_uF, J_{y_m}F)_{\psi(x,u)}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ J_x\varphi & J_u\varphi \end{pmatrix}_{(x,u)},$$

其中 I 表示单位阵. 因此得

$$\begin{pmatrix} J_u\Phi \\ 0 \end{pmatrix}_{(x,u)} = J_uF(\psi(x,u)) + J_{y_m}F(\psi(x,u))J_u\varphi(x,u).$$

另一方面, 由条件 3), 并应用上式得

$$\begin{aligned}
0 &\neq \det\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial y_m}\right)_{(x^{(0)},\ y^{(0)})} \\
&= \det\left(\frac{\partial F}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial u_{m-1}}, \frac{\partial F}{\partial y_m}\right)_{(x^{(0)},\ u^{(0)},\ y_m^{(0)})} \\
&= \det\Big(\frac{\partial F}{\partial u_1} + \frac{\partial F}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \cdots, \\
&\qquad \frac{\partial F}{\partial u_{m-1}} + \frac{\partial F}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi}{\partial u_{m-1}}, \frac{\partial F}{\partial y_m}\Big)_{(x^{(0)},\ u^{(0)},\ y_m^{(0)})} \\
&= \det\left(J_uF + J_{y_m}FJ_u\varphi, \frac{\partial F}{\partial y_m}\right)_{(x^{(0)},\ u^{(0)},\ y_m^{(0)})}, \\
&= \det\begin{pmatrix} J_u\Phi & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ & \vdots \\ 0 & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}_{(x^{(0)},\ u^{(0)},\ y_m^{(0)})} \\
&= \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x^{(0)}, y^{(0)})\det J\Phi_u(x^{(0)}, u^{(0)}).
\end{aligned}$$

因此, 由(5)式即得 $\det J\Phi_u(x^{(0)}, u^{(0)})\neq 0$.

所以 Φ 关于点$(x^{(0)}, u^{(0)})$满足条件1)，2)和3)．由归纳假设，定理的结论 1°，2° 和 3° 对方程(6)成立，即存在$(x^{(0)}, u^{(0)})$的邻域 $G\times H_{m-1}\subset G_n\times G_{m-1}$ 使得

[1°] 当 $x\in G$ 时方程(6)在 H_{m-1} 中有唯一解 $u=g(x)$，其中 g 是由 G 到 H_{m-1} 中的映射，且

[2°] $g(x^{(0)})=u^{(0)}$;

[3°] $g\in\mathscr{C}^{(1)}$.

令

$$f(x)=(g(x), \varphi(x, g(x))), \quad x\in G.$$

$$H=H_{m-1}\times J.$$

于是 f 是由 G 到 H 中的映射．我们要证明命题对自然数 m 成立，即要证明 f 满足 1°，2° 和 3°．

当 $x\in G$ 时 $(x, g(x))\in G\times H_{m-1}\subset G_n\times G_{m-1}$．于是由[1°]，

$$F_i(x, f(x))=F_i(x, g(x), \varphi(x, g(x)))=\Phi_i(x, g(x))=0,$$

$$i=1, \cdots, m-1.$$

由(1°)又有

$$F_m(x, f(x))=F_m(x, g(x), \varphi(x, g(x)))=0.$$

再由 φ 和 g 的唯一性即知当 $x\in G$ 时 $y=f(x)$ 是方程(3)在 H 中的唯一解，即 f 满足 1°．

由[2°]和(2°)，

$$f(x^{(0)})=(g(x^{(0)}), \varphi(x^{(0)}, g(x^{(0)}))=(u^{(0)}, y_m^{(0)})=y^{(0)},$$

即 2° 成立．

再由[3°]和(3°)即知 f 满足 3°．

以上我们证明了在定理的条件下存在隐射 f 满足 1°，2° 和 3°．下面我们再证明 f 满足 4°．事实上，当 $x\in G$ 时

$$F(x, f(x))=0.$$

对此复合求导得

$$JF(x,f(x))\begin{pmatrix} I \\ Jf(x) \end{pmatrix}=0, \quad x\in G,$$

即

$$J_xF(x,f(x))+J_yF(x,f(x))Jf(x)=0, \quad x\in G.$$

由于在 D' 上 $\det J_yF$ 处处非零，所以上式中的 J_yF 是可逆阵，因此由上式即得(4)式. □

隐射定理和隐函数定理通称"隐函数存在定理".

例 1 设

$$x_1y_2-4x_2+2e^{y_1}+3=0,$$
$$2x_1-x_3-6y_1+y_2\cos y_1=0.$$

计算当 $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $y_1=0$, $y_2=1$ 时的 Jacobian $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$.

解 令

$$F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_2-4x_2+2e^{y_1}+3,$$
$$F_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=2x_1-x_3-6y_1+y_2\cos y_1,$$
$$\boldsymbol{F}=(F_1,F_2).$$

于是 $J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$

$$=\left(\begin{pmatrix} y_2 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2e^{y_1} & x_1 \\ -6-y_2\sin y_1 & \cos y_1 \end{pmatrix}\right).$$

令 $\boldsymbol{a}=(-1,1,-1)$, $\boldsymbol{b}=(0,1)$. 现在就是计算当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}$ 时的 Jacobian $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$. 因为

$$J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(J_x\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),J_y\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}))$$
$$=\left(\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

所以由(4)式便得

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3}\end{pmatrix}_{(a,b)} = -\begin{pmatrix}2 & -1\\ -6 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -4 & -1\\ 10 & -24 & -2\end{pmatrix}. \quad \square$$

例 2 设

$$z=f(x, y),\ g(x, y)=0,$$

其中 f 和 g 都是可微二元函数. 求$\frac{dz}{dx}$.

解 令

$$F_1(x, y, z)=f(x, y)-z,\ F_2(x, y, z)=g(x, y),$$

$$F=(F_1, F_2).$$

于是

$$JF=(J_x F, J_{(y,z)} F)$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & -1\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & 0\end{pmatrix}.$$

因此由(4)式, 当

$$\det J_{(y,z)}F(x, y, z)=\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\neq 0$$

时,

$$\begin{pmatrix}y'_x\\ z'_x\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & -1\\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\end{pmatrix}.$$

所以

$$z'_x = \frac{1}{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{vmatrix}. \square$$

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 如何叙述隐射定理?

(2) 能否概述隐射定理的证明?

(3) 在方程(3)中 F 满足定理1的条件，能否直接从方程(3)计算隐射 f 的 Jacobian?

(4) 在定理1中，如果 $F\in\mathscr{C}^{(r)}$，能否得出隐射 $f\in\mathscr{C}^{(r)}$?

2. 在下列方程中计算 y'_x 和 z'_x:

(1) $x+y+z=0,\ x^2+y^2+z^2=1$.

(2) $z=x^2+y^2,\ x^2+2y^2+3z^2=20$.

(3) $x=t+t^{-1},\ y=t^2+t^{-2},\ z=t^3+t^{-3}$.

3. 在下列方程中计算 (u,v) 的 Jacobian:

(1) $xu-yv=0,\ yu+xv=1$.

(2) $x+y=u+v,\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{\sin u}{\sin v}$.

4. 设 $u^2-v\cos xy+w^2=0,\ u^2+v^2-\sin xy+2w^2=2,\ uv-\sin x\cos y+w=0$. 在 $x=\dfrac{\pi}{2},\ y=0,\ u=v=1,\ w=0$ 处计算 (u,v,w) 的 Jacobian.

5. 设 $u=f(x,y,z,t),\ g(y,z,t)=0,\ h(z,t)=0$. 计算 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

6. 设 $u=f(z),\ z=x+y\varphi(z)$. (用归纳法)证明

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\varphi(z)^n\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

§3.3 逆射定理

在第一章§1.3中我们已经讲过逆射的概念，随后在第二章

§1.3 中我们又讨论了反函数的求导问题：即一元函数在什么条件下有可导的反函数，反函数如何求导．现在我们同样的问题是，若 f 是一个由 R^n 中到 R^n 中的映射，在什么条件下 f 有可微的逆射？如何对逆射求导？

定理 1(局部逆射定理)　设$D\subset R^n$ 是一开集，f：$D\to R^n$．如果

1) $f\in\mathscr{C}^{(1)}$；

2) $f(y^{(0)})=x^{(0)}$；

3) $\det Jf(y^{(0)})\neq 0$．

则存在 $x^{(0)}$的邻域U 和 $y^{(0)}$的邻域V 使得

1°　$f(V)=U$，且 f 在 V 上是单射；

2°　设 g 为 f 在V 上的逆射，则 $g\in\mathscr{C}^{(1)}$，且当 $x\in U$ 时

$$Jg(x)=Jf(y)^{-1},\tag{1}$$

其中 $y=g(x)$．

证明　令

$$F(x,y)=x-f(y),\ (x,y)\in R^n\times D.$$

则由假设 1)，$F\in\mathscr{C}^{(1)}$．由假设 2)，$F(x^{(0)},y^{(0)})=0$．由假设 3)，

$$\det J_yF(x^{(0)},y^{(0)})=(-1)^n\det Jf(y^{(0)})\neq 0.$$

因此由 §3.2 定理 1，存在$(x^{(0)},y^{(0)})$的邻域 $U\times H$ 使得对于每一个 $x\in U$ 方程

$$F(x,y)=0,$$

即方程

$$f(y)=x$$

在H 中有唯一的解 $y=g(x)$．$g\in\mathscr{C}^{(1)}(U)$，且当 $x\in U$ 时

$$Jg(x)=-J_yF(x,y)^{-1}J_xF(x,y)=Jf(y)^{-1},$$

其中 $y=g(x)$．

令 $V=g(U)$．易见 $f(V)=U$，f 在V 上是单射，逆射就是 g．所以剩下要证明V 为开集．

事实上,易见

$$V=H\cap f^{-1}(U),$$

这里 $f^{-1}(U)$ 是 U 关于 f 的逆像. 但 U 是开集, 而 f 是连续的, 因此由第五章 § 3.2 习题 17, $f^{-1}(U)$ 是开集, 所以 V 是开集. □

上面这一定理只是一个局部性质的定理. 需要注意的是, 即使在 D 上 $\det Jf$ 处处不为零, 不能从这一定理得到 f 有逆射 (习题 1(4)).

定理 2(逆射定理) 设 $D\subset R^n$ 是一开集, f: $D\to R^n$. 如果

1) $f\in\mathscr{C}^{(1)}$;

2) 当 $y\in D$ 时 $\det Jf(y)\neq 0$.

则 $G=f(D)$ 是一开集. 如果又有

3) f 是单射,

则 $f^{-1}\in\mathscr{C}^{(1)}$, 且当 $x\in G$ 时

$$Jf^{-1}(x)=Jf(y)^{-1}, \tag{2}$$

其中 $y=f^{-1}(x)$.

证明 由定理 1, $f^{-1}\in\mathscr{C}^{(1)}$ 和(2)式的成立是显然的. 所以我们只须证明由条件 1) 和 2) 可得 $G=f(D)$ 是一开集. 任取 $x\in G$, 则有 $y\in D$ 使 $x=f(y)$. 由定理 1, 存在 x 的邻域 U 和 y 的邻域 V 使得 $f(V)=U$, 因此 $U\subset G$, 所以 x 是 G 的内点, 故 G 是开集. □

注 由定理显见, 若条件 1) 和 2) 成立, 则开集的像是开集, 即 f 把开集映成开集. 把开集映成开集的映射叫做**开射**. 因此, 若条件 1) 和 2) 成立, 则 f 是一开射.

在定理 1 或定理 2 的假设下, 如果 f 的坐标函数为 $f_1, \cdots, f_n$, 令

$$x_1=f_1(y_1,\cdots,y_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n=f_n(y_1,\cdots,y_n),$$

则(1)式或(2)式就是

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}^{-1}. \tag{3}$$

人们习惯常常把 Jacobian 的行列式记为

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

于是由(3)式又得

$$\frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)}}. \tag{5}$$

例 1(极坐标) 设

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

求 r 和 θ 关于 x 和 y 的偏导数.

解 由(3)式

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

所以

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta, \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

事实上，由 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$，同样可以算得上述结果. □

例 2 设 $y^2=ux$，$x^2=vy$. 求 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

解 因为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\dfrac{y^2}{x^2} & 2\dfrac{y}{x}\\[2mm] 2\dfrac{x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2}\end{vmatrix}=-3,$$

所以由(5)式便得 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\dfrac{1}{3}$. □

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) 逆射定理(局部的和非局部的)有哪些内容？

(2) 如何从隐射定理得局部逆射定理？

(3) 在定理 1 中如果 $f\in\mathscr{C}^{(r)}$，是否有 $g\in\mathscr{C}^{(r)}$？

(4) 在定理 2 中为何要有单射的假定？研究例子

$$f(r,\theta)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta),\ r>0.$$

(5) 试将定理 1 和定理 2 与一元函数的情形比较，有何异同？

(6) 何谓开射？在定理 2 的条件 1) 和 2) 成立时，为什么说 f 是一开射？

(7) 若映射 f 有连续的逆射，则 f 是不是开射？

2. 下列映射 f 是不是开射？$Jf^{-1}=$？设

(1) $f(x,y)=\left(x^2,\ \dfrac{y}{x}\right)$.

(2) $f(x,y)=(e^x\cos y,\ e^x\sin y)$.

(3) $f(x,y)=(x+y,\ 2xy^2)$.

§3.4 曲线和曲面的隐表示

前面我们讲了曲线和曲面的参数表示，在 §3.1 中我们又提

出了平面曲线的"隐表示"，这是曲线和曲面的另一种常用表示方法.

设$D\subset R^2$是一开集，$F: D\to R$. 则方程

$$F(x,y)=0 \tag{1}$$

在D中表示一条隐表示的曲线L.

定理 1 设$(x_0,y_0)\in L$. 如果$F\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$，且

$$JF(x_0,y_0)=(F'_x(x_0,y_0),F'_y(x_0,y_0))\neq\mathbf{0},$$

则存在(x_0,y_0)的邻域U使得$U\cap L$是一段显表示的光滑曲线. 这时L在(x_0,y_0)的切线是

$$F'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0. \tag{2}$$

证明 由所设不妨假定$F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. 则由隐函数存在定理(§3.1 定理 1)，存在(x_0,y_0)的邻域$U=G\times H$使得方程(1)在U内有唯一解(图 36)

$$y=f(x),\quad x\in G,$$

且f'连续. 因此$U\cap L=f$是一段光滑的显表示曲线. 再由§3.1(4)式

$$f'(x_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)},$$

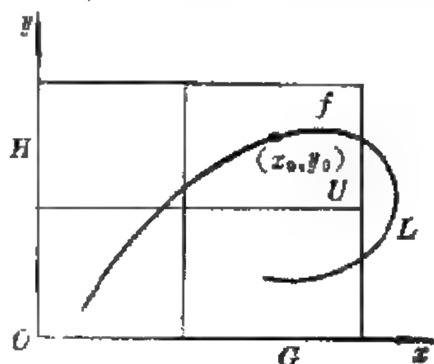


图 36

所以L在(x_0,y_0)有切向量

$$\left(1,\ -\frac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}\right).$$

因此L在(x_0,y_0)的切线为(2). □

例 1 求§3.1 例 1 中的曲线在(1, 1)的切线.

解 因为

$$F'_x(1,1)=8,\ F'_y(1,1)=-1.$$

代入(2)式得所求切线为

$$8x-y=7.\quad\square$$

如果 $F\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$，且 JF 在 L 上处处非$\mathbf{0}$，则说 L 是一条**光滑**的隐表示曲线．由定理 1 我们看到，若 $(x,y)\in L$，这时

$$(F'_y(x,y),\ -F'_x(x,y))$$

就是 L 在 (x,y) 的一个切向量．所以光滑的隐表示曲线也有一个连续的切向场 $(F'_y,\ -F'_x)$．定理 1 还告诉我们，光滑的隐表示曲线可以分成很多局部，每一个局部是一段光滑的显表示曲线，所以它是很多段直观中的曲线联结起来的．

同样，由方程

$$F(x,y,z)=0 \tag{3}$$

表示的点集 $\Sigma\subset R^3$，即

$$\Sigma=\{(x,y,z)\in R^3:\quad F(x,y,z)=0\}$$

叫做“隐表示”的曲面．设 $D\subset R^3$ 是一开集，$F:\quad D\to R$．则和定理 1 一样有下面的定理．

定理 2 设 $\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$．如果 $F\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$，且

$$JF(\boldsymbol{p}_0)=(F'_x(\boldsymbol{p}_0),F'_y(\boldsymbol{p}_0),F'_z(\boldsymbol{p}_0))\neq\mathbf{0},$$

则存在 $\boldsymbol{p}_0$ 的邻域 U 使得 $U\cap\Sigma$ 是一块光滑的显表示曲面．这时 Σ 在 $\boldsymbol{p}_0$ 的切面是

$$F'_x(\boldsymbol{p}_0)(x-x_0)+F'_y(\boldsymbol{p}_0)(y-y_0)+F'_z(\boldsymbol{p}_0)(z-z_0)=0. \tag{4}$$

证明 由所设不妨假定 $F'_z(\boldsymbol{p}_0)\neq0$．于是由 § 3.1 定理 2，存在 (x_0,y_0) 的邻域 G 和 z_0 的邻域 H 使方程(3)在 $\boldsymbol{p}_0$ 的邻域 $U=G\times H$ 中有唯一解

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in G,$$

且 $f\in\mathscr{C}^{(1)}(G)$，所以 $U\cap\Sigma=f$ 是一块光滑的显表示曲面．由 § 3.1 (5)式，

$$(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0))=-\frac{1}{F'_z(\boldsymbol{p}_0)}(F'_x(\boldsymbol{p}_0),F'_y(\boldsymbol{p}_0)).$$

代入§1.2(20)式即得(4)式. □

例 2 求球面的切面.

解 球面方程是

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

令

$$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2,$$

则

$$JF(x,y,z)=2(x,y,z).$$

应用(4)式即得球面上任意一点(x_0,y_0,z_0)处的切面是

$$x_0x+y_0y+z_0z=R^2. \quad \square$$

对于方程(3)定义的隐表示曲面 Σ, 如果 $F\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$, 且 JF 在 Σ 上处处非 $\mathbf{0}$, 则说 Σ 是一张光滑的隐表示曲面. 于是和曲线一样, 光滑的隐表示曲面有一个连续的法向场 JF; 并且可以分成很多局部, 每一个局部是一块光滑的显表示曲面, 因而它是很多块直观中的曲面拼接起来的.

由联立方程

$$F(x,y,z)=0,\ G(x,y,z)=0 \tag{5}$$

表示的点集 $L\subset R^3$ 是两张隐表示曲面的交线, 叫做"隐表示"的空间曲线. 在直观上, 这两张曲面的切面交成曲线的切线, 这就是下面的定理. 我们设 $D\subset R^3$ 是一开集, $F,G:\ D\to R$.

定理 3 设 $\boldsymbol{p}_0=(x_0,y_0,z_0)\in L$. 如果 $F,G\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$, 且

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{p}_0)=JF(\boldsymbol{p}_0)\times JG(\boldsymbol{p}_0)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ F'_x & F'_y & F'_z\\ G'_x & G'_y & G'_z\end{vmatrix}_{\boldsymbol{p}_0}\neq\mathbf{0},$$

则存在 $\boldsymbol{p}_0$的邻域 U 使得 $U\cap L$ 是一段光滑的参数曲线. 这时 L 在 $\boldsymbol{p}_0$的切线是

$$\begin{cases} F'_x(p_0)(x-x_0)+F'_y(p_0)(y-y_0)+F'_z(p_0)(z-z_0)=0, \\ G'_x(p_0)(x-x_0)+G'_y(p_0)(y-y_0)+G'_z(p_0)(z-z_0)=0. \end{cases} \tag{6}$$

证明 由所设不妨假定

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{p_0}\neq 0.$$

于是由§3.2定理1，存在 x_0 的邻域 G 和 (y_0,z_0) 的邻域 H 使得方程组(5)在 p_0 的邻域 $U=G\times H$ 内有唯一解

$$y=f(x),\ z=g(x),\quad x\in G, \tag{7}$$

且 $(f,g)\in\mathscr{C}^{(1)}(G)$. 因此 $U\cap L$ 是一段光滑的参数曲线，其方程是(7). $U\cap L$ 的连续切向量场是 $(1,f',g')$. 将(7)代入(5)在 x_0 求导得

$$F'_x(p_0)+F'_y(p_0)f'(x_0)+F'_z(p_0)g'(x_0)=0,$$

$$G'_x(p_0)+G'_y(p_0)f'(x_0)+G'_z(p_0)g'(x_0)=0.$$

由此

$$(1,f'(x_0),g'(x_0))\,/\!/\,\boldsymbol{t}(p_0).$$

所以 $\boldsymbol{t}(p_0)$ 也是 L 在 p_0 的切向量，因此得(6). □

同样，如果 $(F,G)\in\mathscr{C}^{(1)}$，且 $\boldsymbol{t}$ 在 L 上处处非 $\mathbf{0}$，则称 L 为**光滑的隐表示曲线**.

现在我们对曲线和曲面(以及超曲面)已经有了初步的概念，在此作一简单小结. 平面上的显表示曲线和空间中的显表示曲面，如果是连续的，则就是我们直观中的曲线和曲面. 但是参数表示和隐表示的曲线和曲面，即使是连续的，也可以全无曲线和曲面的样子. 如果隐表示是光滑的，则在每一点的一个局部都可以显表示，都是直观的曲线和曲面. 参数表示也是这样(习题1(3)). 然而显表示是特殊的参数表示，也是特殊的隐表示，亦即参数表示和隐表示都是一般的表示. 我们讨论曲线和曲面时选择以参数表示为主. 从欧氏空间中到欧氏空间中的映射，其几何意义就在于它

是曲线和曲面的参数表示．映射微分的一个重要作用就是它向我们提供了切向量的统一概念．

习　　题

1．回答下列问题：

(1) 隐表示的曲线和曲面在什么条件下有什么局部性质？

(2) 隐表示曲线和曲面的光滑性是如何定义的？光滑时它们有什么连续的切向场和法向场？它们处处有何局部特征？

(3) 为什么说光滑的参数曲线和曲面处处可以局部显表示？

2．求出平面曲线 $x^3y+y^3x=3-x^2y^2$ 在点(1, 1)处的切线方程．

3．求出椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上法线与坐标轴成等角的点．

4．求出曲面 $x^2-2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切面。

5．求出曲面 $x^2+2y^2+3z^2+2xy+4yz+2zx=8$ 上切面平行于坐标平面的各点．

6．求曲面 $x^2+y^2=a^2$ 和 $bz=xy$ 的夹角．

7．证明曲面 $xyz=a^3$ 的切面与坐标平面构成的四面体体积为 $9a^3/2$．

8．证明曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ 的切面在坐标轴上割下的诸线段之和为常数．

9．求 $u=x+y+z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 外法向方向的导数，并问此导数何时最大，何时最小，何时为零．

10．求下列曲线在指定点上的切线：

(1) $x^2+y^2+z^2=3x$, $2x-3y+5z=4$ 在点(1, 1, 1)。

(2) $x^2+y^2=10$, $y^2+z^2=10$ 在点(1, 1, 3)．

(3) $3x^2+3y^2-z^2=25$, $x^2+y^2=z^2$ 在点($\sqrt{7}$, 3, 4)．

第四节　Taylor 公式和极值

§ 4.1　Taylor 公式

一元函数的 Taylor 公式(第二章 § 3.1)可以直接推广到 n

元函数.

定理1 设$D\subset R^n$是一凸域，函数f: $D\to R$在D上有$m+1$阶连续偏导数. 设

$$x^{(0)}=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\in D,\qquad x=(x_1,\cdots,x_n)\in D.$$

则存在$\xi\in\overline{x^{(0)}x}$使

$$f(x)=f(x^{(0)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})(x_i-x_i^{(0)})$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(x^0)(x_{i_1}-x_{i_1}^{(0)})(x_{i_2}-x_{i_2}^{(0)})$$

$$+\cdots+\frac{1}{m!}\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}(x^{(0)})(x_{i_1}-x_{i_1}^{(0)})\cdots(x_{i_m}-x_{i_m}^{(0)})$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1,\cdots,i_{m+1}=1}^{n}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{m+1}}}(\xi)$$

$$\cdot(x_{i_1}-x_{i_1}^{(0)})\cdots(x_{i_{m+1}}-x_{i_{m+1}}^{(0)}).\qquad(1)$$

证明 直线段$\overline{x^{(0)}x}$可以表示为

$$y=x^{(0)}+t(x-x^{(0)}),\quad t\in[0,1].$$

令

$$g(t)=f(y)=f(x^{(0)}+t(x-x^{(0)})),\quad t\in[0,1].$$

则由§2.3定理1的推论1易见，一元函数g有$m+1$阶连续导数. 对g应用Taylor公式得

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\cdots+\frac{g^{(m)}(0)}{m!}+\frac{g^{(m+1)}(\theta)}{(m+1)!},\qquad(2)$$

其中θ是$(0,1)$中某数. 但

$$g'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)(x_i-x_i^{(0)}),$$

$$g''(t)=\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(y)(x_{i_1}-x_{i_1}^{(0)})(x_{i_2}-x_{i_2}^{(0)}),$$

……………………………………………………………………

代入(2)式，并令 $\xi=x^{(0)}+\theta(x-x^{(0)})$，则 $\xi\in\overline{x^{(0)}x}$ 即得所证. □

推论 在定理 1 的假设下，当 $x\to x^{(0)}$ 时有

$$f(x)=f(x^{(0)})+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^{(0)})(x_i-x_i^{(0)})$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i_1,i_2=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}(x^{(0)})(x_{i_1}-x_{i_1}^{(0)})(x_{i_2}-x_{i_2}^{(0)})$$

$$+\cdots+\frac{1}{m!}\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n}\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}(x^{(0)})(x_{i_1}-x_{i_1}^{(0)})\cdots$$

$$(x_{i_m}-x_{i_m}^{(0)})+o(\|x-x^{(0)}\|^m).$$

证明 以 $x^{(0)}$ 为中心作小闭球 $K\subset D$，由于 f 在 D 上有连续的 $m+1$ 阶偏导数，而 K 是紧致集，因此(第五章 § 3.2 定理 3)有一数 M 使

$$\left|\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{m+1}}}(x)\right|\leqslant M$$

对一切 $x\in K$ 和 $i_1,\cdots,i_{m+1}=1,\cdots,n$ 成立. 记

$$r_x=\max(|x_1-x_1^{(0)}|,\cdots,|x_n-x_n^{(0)}|),$$

则 $r_x\leqslant\|x-x^{(0)}\|$. 我们来估计 Taylor 公式(1)中的最后一项(余项)的数量级. 当 $x\in K$ 时

$$\frac{1}{\|x-x^{(0)}\|^m}\left|\sum_{i_1,\cdots,i_{m+1}=1}^{n}\frac{\partial^{m+1} f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{m+1}}}(\xi)(x_{i_1}-x_{i_1}^{(0)})\cdots(x_{i_{m+1}}-x_{i_{m+1}}^{(0)})\right|$$

$$\leqslant\frac{M}{\|x-x^{(0)}\|^m}\sum_{i_1,\cdots,i_{m+1}=1}^{n}|x_{i_1}-x_{i_1}^{(0)}|\cdots|x_{i_{m+1}}-x_{i_{m+1}}^{(0)}|$$

$$\leqslant \frac{MC_n^{m+1} r_x^{m+1}}{\|x - x^{(0)}\|^m} \leqslant MC_n^{m+1} \|x - x^{(0)}\|,$$

右端当 $x \to x^{(0)}$ 时趋向于 0，故得证。 ▯

习 题

1. 回答下列问题：

(1) 你能否写出（多元函数的）Taylor 公式？

(2) Taylor 公式的余项有何数量级特征？

2. 写出下列函数 f 在指定点的 Taylor 公式，并说明在原点的 Taylor 公式是什么。设

(1) $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$，在 $(1, -2)$.

(2) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$，在 $(1, 1, 1)$.

3. 设

$$f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cy^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx.$$

试按 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 的正整数幂展开 $f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

4. 写出 x^y 在点 $(1, 1)$ 的 Taylor 公式到二次项.

5. 证明当 $|x|$ 和 $|y|$ 充分小时有

$$\frac{\cos x}{\cos y} \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

§ 4.2 极值

现在我们要应用 Taylor 公式来研究多元函数的"极值"，或者说，"相对的"或"局部的"最大值和最小值. 我们先就二元函数来讨论极值的必要条件，n 元函数同此. 这不必用到 Taylor 公式.

定义 1 设二元函数 f 的定义域为 $D \subset R^2$，$\boldsymbol{p}_0 \in D^0$. 如果存在 $\boldsymbol{p}_0$ 的一个邻域 $U \subset D$ 使

$$f(\boldsymbol{p}_0) = \max f(U),$$

则说 $f(\boldsymbol{p}_0)$ 为 f 的一个**极大值**. 同样定义**极小值**. 极大值和极小值统称**极值**.

定理 1 若二元函数 f 在一点 p_0 取极值，且 $Jf(p_0)$ 存在，则 $Jf(p_0)=0$. 使这个等式成立的点 p_0 叫做 f 的**驻点**.

证明 由定义，存在 p_0 的邻域(取为开区间，图 37)$U=I\times J\subset D$ 使 $f(p_0)$ 为 f 在 U 上的最大值或最小值. 设 $p_0=(x_0,y_0)$. 令 $\varphi(x)=f(x,y_0)$，则一元函数 φ 在 x_0 取到在开区间 I 上的最大值或最小值. 由 Fermat 定理(第二章 § 2.1)，$\varphi'(x_0)=0$，即 $f'_x(p_0)=0$. 同理知 $f'_y(p_0)=0$. 这便证明了定理. □

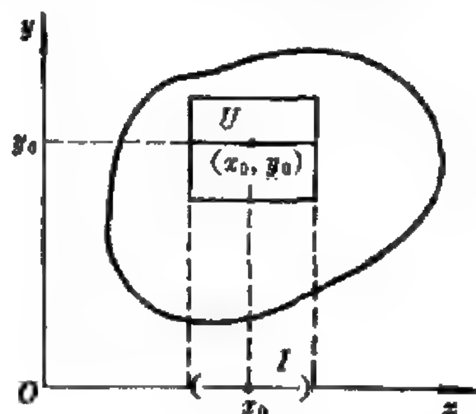


图 37

我们应特别注意:

1° 驻点是极值点的必要条件，并非充分条件(试举出反例).

2° 如果函数 f 在其定义域 D 上存在一阶偏导数，且在一点 $p_0\in D$ 取到它(在 D 上)的最大值或最小值. 若 $p_0\in D^\circ$，则 p_0 是驻点；若 $p_0\in\partial D$，则 p_0 未必是驻点.

例 1 设

$$f(x,y)=\sin x\sin y\sin(x+y),\quad x\geqslant0,y\geqslant0,x+y\leqslant\pi.$$

求函数 f (在其定义域上)的最大值和最小值.

解 因为 f 的定义域 D 是一有界闭集，故 f 有最大值和最小值. 又因 $f\geqslant0$，而当 $p\in\partial D$ 时 $f(p)=0$，所以 f 在整个边界上取最小值. 但 f 非常值函数，故 f 的最大值不为 0，因此 f 在内部取到最大值. 求驻点：解方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sin y \sin(2x+y) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin x \sin(x+2y) = 0.$$

但在内部 $0<x<\pi, 0<y<\pi$，因此得方程

$$\sin(2x+y)=0, \qquad \sin(x+2y)=0.$$

又在内部 $0<2x+y<2\pi, \quad 0<x+2y<2\pi$，所以

$$2x+y=\pi, \quad x+2y=\pi.$$

因此内部有唯一的驻点是$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$. 由定理 1 即知 $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ $=\sin^3\frac{\pi}{3}=\frac{3}{8}\sqrt{3}$ 为最大值. □

例 2 体积为 2 的长方体，尺寸为何时表面积最小？

解 设长方体的长、宽、高为 x, y, z，则体积为 $xyz=2$，面积为

$$S(x, y)=2(xy+yz+zx)=2\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right), \quad x>0, y>0.$$

记 S 的定义域为 D. 显然 $\sup S(D)=+\infty$，因此 S 无最大值. 记 $\alpha=\inf S(D)$，则 $0\leqslant\alpha<+\infty$. 于是有点列 $p_n\in D(n\in N)$ 使

$$\lim S(p_n)=\alpha.$$

但因

$$\lim_{|p|\to+\infty} S(p)=+\infty,$$

所以 (p_n) 有界. 由第五章 §2.3 定理 2 可知 (p_n) 有收敛子列收敛于一点 p. 又当 $a\geqslant 0$ 时

$$\lim_{(x,y)\to(0,a)} S(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a,0)} S(x,y)=+\infty,$$

所以 $p\bar{\in}\partial D$，因此 $p\in D^\circ$. 再由 S 的连续性即知 $S(p)=\alpha$. 因此 $S(p)$ 是最小值，且 p 是驻点. 求驻点：解方程

$$\frac{\partial S}{\partial x}(x,y)=2y-\frac{4}{x^2}=0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}(x,y)=2x-\frac{4}{y^2}=0,$$

得$x=y=\sqrt[3]{2}$，即D中有唯一的驻点$(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$，所以$p=(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$．故所求尺寸为$x=y=\sqrt[3]{2}$，$z=\frac{2}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$，即是一正立方体． ‖

下面我们再来研究极值的充分条件．设$x^{(0)}\in R^n$是n元函数f的极值点，则由定理1，$x^{(0)}$是f的驻点，因此Taylor公式（§4.1(1)）当$m=1$时成为

$$f(x)-f(x^{(0)})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\xi)(x_i-x_i^{(0)})(x_j-x_j^{(0)}),\qquad(1)$$

其中$\xi\in\overline{x^{(0)}x}$．欲知$f(x^{(0)})$是否极值，只须知$f(x)-f(x^{(0)})$在$x^{(0)}$附近是否不变号．因此我们考虑

$$Q(x,t)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)t_it_j,\quad x\in R^n,\ t=(t_1,\cdots,t_n)\in R^n.$$

定理2 设n元函数f在一点$x^{(0)}$的附近有二阶连续偏导数，且$x^{(0)}$是其驻点．

1° 如果当$t\neq 0$时$Q(x^{(0)},t)>0$，则$f(x^{(0)})$是极小；

2° 如果当$t\neq 0$时$Q(x^{(0)},t)<0$，则$f(x^{(0)})$是极大；

3° 如果$Q(x^{(0)},t)$变号，则$f(x^{(0)})$不是极值．

证明 先证明1°．设$Q(x^{(0)},t)>0$对一切$t\neq 0$成立．因$Q(x^{(0)},\cdot)$是连续函数，而单位球面

$$C=\{t\in R^n:\ \|t\|=1\}$$

是有界闭集，即紧致集，所以（第五章§3.2定理3的推论）

$$m=\min Q(x^{(0)}, C)>0.$$

令 $\varepsilon=m/2n^2$. 因 f 的二阶偏导数连续, 故有 $\delta>0$, 当 $\|x-x^{(0)}\|<\delta$ 时

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^{(0)})\right|<\varepsilon, \qquad i, j=1, \cdots, n.$$

于是当 $\|x-x^{(0)}\|<\delta$, $\|t\|=1$ 时

$$|Q(x, t)-Q(x^{(0)}, t)|\leqslant \varepsilon \sum_{i, j=1}^{n}|t_i t_j|\leqslant \varepsilon n^2=m/2.$$

因此当 $\|x-x^{(0)}\|<\delta$, $\|t\|=1$ 时有

$$Q(x, t)\geqslant m/2.$$

再应用(1)式($x^{(0)}$是驻点), 当 $0<\|x-x^{(0)}\|<\delta$ 时存在 ξ, $\|\xi-x^{(0)}\|<\delta$,

$$\begin{aligned} f(x)-f(x^{(0)}) &= \frac{1}{2}Q(\xi, x-x^{(0)}) \\ &= \frac{1}{2}\|x-x^{(0)}\|^2 Q\left(\xi, \frac{x-x^{(0)}}{\|x-x^{(0)}\|}\right)\geqslant \frac{1}{2}\|x-x^{(0)}\|^2\cdot\frac{m}{2}>0. \end{aligned}$$

所以 $f(x^{(0)})$ 是极小. 同理证明 2°.

再证明 3°. 设 $Q(x^{(0)}, t)$ 变号. 于是存在 $t^{(1)}, t^{(2)}\in R^n$ 使

$$Q(x^{(0)}, t^{(1)})<0, \qquad Q(x^{(0)}, t^{(2)})>0.$$

因为 f 有连续二阶偏导数, 所以函数 $Q(\cdot, t^{(1)})$ 和 $Q(\cdot, t^{(2)})$ 均在 $x^{(0)}$ 连续. 因此存在 $\delta>0$, 当 $\|x-x^{(0)}\|<\delta$ 时

$$Q(x, t^{(1)})<0, Q(x, t^{(2)})>0.$$

当 $0<\alpha<\min\left(\frac{\delta}{\|t^{(1)}\|}, \frac{\delta}{\|t^{(2)}\|}\right)$ 时应用 (1) 式, 存在 $\xi^{(1)}$ 和 $\xi^{(2)}$, $\|\xi^{(1)}-x^{(0)}\|<\delta$, $\|\xi^{(2)}-x^{(0)}\|<\delta$,

$$\begin{aligned} f(x^{(0)}+\alpha t^{(1)})-f(x^{(0)}) &= \frac{1}{2}Q(\xi^{(1)}, \alpha t^{(1)}) \\ &= \frac{\alpha^2}{2}Q(\xi^{(1)}, t^{(1)})<0, \end{aligned}$$

$$f(x^{(0)}+\alpha t^{(2)})-f(x^{(0)})=\frac{1}{2}Q(\xi^{(2)},\alpha t^{(2)})$$

$$=\frac{\alpha^2}{2}Q(\xi^{(2)},t^{(2)})>0.$$

所以 $f(x^{(0)})$ 非极值. □

推论 设二元函数 f 在一点 p_0 的附近有连续二阶偏导数, 且 p_0 是其驻点. 记

$$a=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0),\quad b=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(p_0),\quad c=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0).$$

1° 若 $a>0$, $ac-b^2>0$, 则 $f(p_0)$ 是极小;

2° 若 $a<0$, $ac-b^2>0$, 则 $f(p_0)$ 是极大;

3° 若 $ac-b^2<0$, 则 $f(p_0)$ 非极值.

证明 令

$$Q(p_0,t)=at_1^2+2bt_1t_2+ct_2.$$

如所周知, 若 $a>0$, $ac-b^2>0$, 则二次形 $Q(p_0,\cdot)$ 正定, 由定理 2 的 1°, $f(p_0)$ 是极小. 若 $a<0$, $ac-b^2>0$, 则 $Q(p_0,\cdot)$ 负定, 由定理 2 的 2°, $f(p_0)$ 是极大. 若 $ac-b^2<0$, 则 $Q(p_0,\cdot)$ 在 $t=0$ 附近变号, 由定理 2 的 3°, $f(p_0)$ 非极值. □

注 推论中的方法自然同样适用于 n 元函数, 不过这时是用 $Q(x^{(0)},\cdot)$ 的系数行列式来判别其变号与否.

例 3 设

$$f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2.$$

求 f 的极值点.

解 解方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=8x^3-4x=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=4y^3-4y=0,$$

得 9 个驻点:

1. $(0,0)$, 2. $(0,1)$, 3. $(0,-1)$,

4. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, 5. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, 6. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$,

7. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, 8. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, 9. $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$.

又

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 24x^2 - 4, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12y^2 - 4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

立表:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	-4	-4	-4	8	8	8	8	8	8
c	-4	8	8	-4	8	8	-4	8	8
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$ac-b^2$	16	-32	-32	-32	64	64	-32	64	64

由定理 2 的推论，(0, 0)是极大值点；$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$，$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$ 是极小值点；(0, 1)，(0, −1)，$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$，$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$非极值点。 □

例4 设 $f(x, y) = x^2 - 3x^2y + y^3$，求 f 的极值点。

解 解方程

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 6xy = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3x^2 + 3y^2 = 0$$

得驻点(0, 0)，$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$，$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$。又

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2-6y,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-6x.$$

立表:

	$(0,0)$	$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
a	2	0	0
c	0	2	2
b	0	-2	2
$ac-b^2$	0	4	4

由定理 2 的推论，$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$和$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$都不是极值点. 但定理 2 推论不能回答$(0,0)$是否是极值点. 然而$f(0,y)=y^3$，故$(0,0)$也非极值点. □

例 5 （最小二乘法，经验配线）在平面上有 n 个点(图 38) $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$，求一条直线

$$y=ax+b \qquad (2)$$

使

$$\lambda(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

为最小. 这就好比要求作一条直线(2)，最近似地"通过"所给的 n 个点.

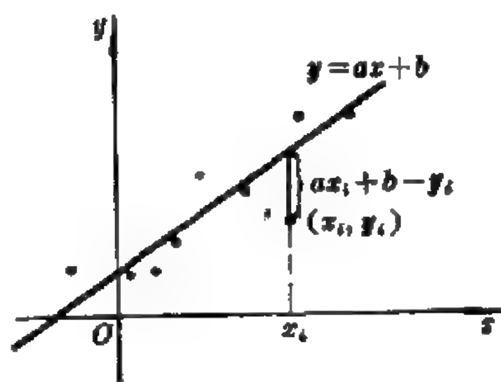


图 38

解 函数 λ 的定义域为整个 R^2. 求驻点:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a}(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i^2+bx_i-x_iy_i)=0,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial b}(a,b)=2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)=0. \qquad (3)$$

如果

$$\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程(3)有唯一解，即λ有唯一的一个驻点，因此λ有唯一的一个可能的极值点．如果λ在这个点上为极小，则λ在这个点上必然是最小．所以我们再应用定理2的推论来判断λ是否在这个驻点上为极小．由(3)，

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial a^2}(a, b) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial a \partial b}(a, b) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial b^2}(a, b) = 2\sum_{i=1}^{n} 1 = 2n.$$

因为

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0,$$

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j}(x_i - x_j)^2 > 0.$$

由定理2的推论，λ确实在其驻点上为极小．再由(2)和(3)知所求直线(2)为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_i & n \\ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \end{vmatrix} = 0.$$

例如，“通过”点(1, 2)，(0, 0)，(2, 2)的直线为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -6x+6y-2=0. \qquad \square$$

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 多元函数的极值是什么意思? 它与最大值和最小值有什么关系?

(2) 何谓驻点? 它与极值点有什么关系? 它与最大值和最小值有什么关系?

(3) 二阶偏导数对寻找极值点有什么作用? 与一元函数的情形是否相似?

2. 求下列函数 f 的极值, 设

(1) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$. (2) $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$.

(3) $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-y+1$. (4) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

(5) $f(x,y)=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, $a,b>0$.

(6) $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y)$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$.

3. 设

$$f(x,y)=3x^4-4x^2y+y^2.$$

证明在每一条直线 $y=mx$ 上 $(0,0)$ 是 f 的极小值点, 但 f 在 $(0,0)$ 不取极小值. 画出使 $f(x,y)>0$ 和使 $f(x,y)<0$ 的点集.

4. 设 $x^{(1)},\cdots,x^{(n)}$ 是 R^m 中 n 个不同的点, 令

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\|x-x^{(k)}\|^2,\quad x\in R^m.$$

问 f 在何处取最小值?

4. 设 $0<a<b$. 试在 (a,b) 中选取 n 个点 $x_1,\cdots,x_n$ 使

$$u=\frac{x_1\cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)}$$

为最大。

5. 设 $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \cdots \geqslant c_n > 0$. 令

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

其中 $x_i \in [0,1]$, $i=1,\cdots,n$, $\sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant a$. 令 $k=[a]$, $\varepsilon = a-k$. 证明当 $x_1 = \cdots = x_k = 1$, $x_{k+1} = \varepsilon$, $x_{k+2} = \cdots = x_n = 0$ 时 u 为最大.

6. 设 $D \subset R^2$ 是一凸域. D 上的函数 $f \in \mathscr{C}^{(2)}$. 证明 f 为凸的（§2.4 习题 3）充分必要条件是对一切 $x \in D$ 函数 $Q(x,\cdot)$ 非负.

§4.3 Lagrange 乘数法

在 §4.2 例 2 中, 我们要得出一个尺寸 x, y, z 使长方体的表面积 $S(x,y,z)$ 最小, 但给定了一个"约束条件", 即体积 $xyz=2$. 由于这个约束条件, 我们实际上是要得出 x, y 使二元函数

$$S: \quad S(x,y)=2\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)$$

在区域 $\{(x,y)\in R^2: x, y>0\}$ 上取最小值. 这种在一定约束条件下求函数的最大或最小值的问题, 显然不受空间维数的限制, 它同样存在于高维空间中.

定义 1 设 $D \subset R^{n+m}$ 是一开集, $f: \quad D \to R$, $\Phi: \quad D \to R^m$. 又

$$L = \{x \in D: \quad \Phi(x) = 0\}.$$

如果 $x^{(0)} \in L$ 有一个邻域 U（图 39）使

$$f(x^{(0)}) = \min f(L \cap U)$$

或 $$f(x^{(0)}) = \max f(L \cap U),$$

则说 $f(x^{(0)})$ 为 f 在条件

$$\Phi(x) = 0, \qquad (1)$$

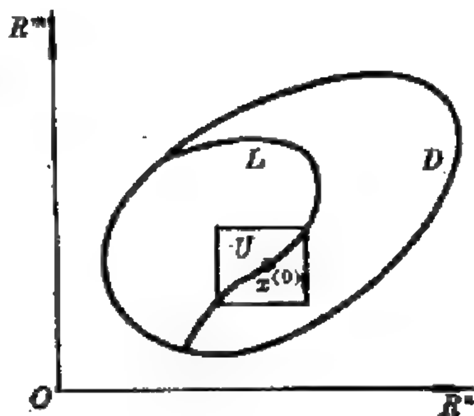


图 39

也就是条件

$$\begin{cases}\Phi_1(x_1, \cdots, x_{n+m}) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Phi_m(x_1, \cdots, x_{n+m}) = 0\end{cases} \tag{2}$$

下的**条件极值**.

我们以 $y=(x_1, \cdots, x_n)$ 表示 R^n 中的点, 以 $z=(x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})$ 表示 R^m 中的点, 以 $x=(y, z)$ 表示 $R^{n+m}=R^n\times R^m$ 中的点. 于是方程(1)成为

$$\Phi(y, z)=0. \tag{3}$$

我们在 §3.1 中已经知道, 在一定条件下这个方程可以局部解出

$$z=\varphi(y).$$

在定义 1 中记 $x^{(0)}=(y^{(0)}, z^{(0)})$, 则 $y^{(0)}$就使 n 元函数

$$h:\quad h(y)=f(y, \varphi(y))$$

取到极值. 所以求条件极值的问题实际上就是求极值的问题. 这是把$n+m$ 维的问题降为 n 维的问题. 在 §4.2 中我们就是用这个办法解 § 4.2 例 2 的. 现在我们要介绍一种方法, 可以不通过降低维数求条件极值. 这是隐函数存在定理的一个具体应用.

定理 1(Lagrange 乘数法) 在定义 1 的假设下, 又设

1) $f, \Phi\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$;

2) $\Phi(x^{(0)})=0$;

3) $J\Phi(x^{(0)})$的秩为 m.

在以上的假设下, 如果 f 在 $x^{(0)}$取到在条件(1)下的条件极值, 则存在 $\lambda^{(0)}\in R^m$ 使 $x^{(0)}$和 $\lambda^{(0)}$满足方程

$$Jf(x)+\lambda J\Phi(x)=0, \tag{4}$$

也就是满足方程组

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_i}(x)=0, \quad i=1, \cdots, n+m. \tag{5}$$

证明 设 f 在 $x^{(0)}$ 取到在条件(1)下的条件极值. 由 3)不妨设

$$\frac{\partial(\Phi_1, \cdots, \Phi_m)}{\partial(x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})}(x^{(0)}) \neq 0. \tag{6}$$

再由 § 3.2 定理 1, 存在 $x^{(0)} = (y^{(0)}, z^{(0)})$ 的邻域 $U = G \times H$ 使方程(1)在 U 中有唯一解

$$z = \varphi(y), \qquad y \in G,$$

且 $\varphi \in \mathscr{C}^{(1)}(G)$. 令

$$\widetilde{\varphi}(y) = (y, \varphi(y)), \qquad y \in G.$$

则当 $y \in G$ 时

$$\Phi \circ \widetilde{\varphi}(y) = 0.$$

复合求导得

$$\begin{aligned} 0 = J(\Phi \circ \widetilde{\varphi})(y^{(0)}) &= J\Phi(y^{(0)}, z^{(0)}) \begin{pmatrix} I \\ J\varphi(y^{(0)}) \end{pmatrix} \\ &= J_y\Phi(y^{(0)}, z^{(0)}) + J_z\Phi(y^{(0)}, y^{(0)}) J\varphi(y^{(0)}). \end{aligned} \tag{7}$$

另一方面, $f \circ \widetilde{\varphi}$ 在 $y^{(0)}$ 达到极值, 所以

$$\begin{aligned} 0 &= J(f \circ \widetilde{\varphi})(y^{(0)}) \\ &= J_y f(y^{(0)}, z^{(0)}) + J_z f(y^{(0)}, z^{(0)}) J\varphi(y^{(0)}). \end{aligned} \tag{8}$$

因为由(6)式, $J_z\Phi(y^{(0)}, z^{(0)})$ 是可逆阵, 所以存在 $\lambda^{(0)} \in R^m$ 使

$$J_z f(y^{(0)}, z^{(0)}) + \lambda^{(0)} J_z\Phi(y^{(0)}, z^{(0)}) = 0. \tag{9}$$

由(8)加上 $\lambda^{(0)}$ 乘以(7)得

$$J_y f(y^{(0)}, z^{(0)}) + \lambda^{(0)} J_y\Phi(y^{(0)}, z^{(0)}) = 0. \tag{10}$$

合并(9)和(10)便得

$$Jf(y^{(0)}, z^{(0)}) + \lambda^{(0)} J\Phi(y^{(0)}, z^{(0)}) = 0.$$

即 $\lambda^{(0)}$ 和 $x^{(0)} = (y^{(0)}, z^{(0)})$ 满足方程(4). □

例 1 设 $f(x, y) = xy$. 求 f 在圆周

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \tag{11}$$

上的最大值和最小值.

解 令

$$\Phi(x, y)=(x-1)^2+y^2-1.$$

作方程(4)得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)+\lambda\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y)=y+2\lambda(x-1)=0,\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)+\lambda\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y)=x+2\lambda y=0.\end{cases} \tag{12}$$

解方程(11)和(12)得三组解:

$$x_1=y_1=0;\quad x_2=\frac{3}{2},\quad y_2=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3=\frac{3}{2},\quad y_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

显然,(0,0)不是 f 在圆周上的极值点, f 当然不能在该点取到最大或最小. 圆周是一紧致集. 因此 f 一定取到最大和最小. 由定理 1,只能分别在(x_2, y_2)和(x_3, y_3)取到. 而

$$f(x_2, y_2)=\frac{3}{4}\sqrt{3},\quad f(x_3, y_3)=-\frac{3}{4}\sqrt{3}.$$

前者就是最大,后者就是最小.

例 2 用乘数法解§4.2 例 2.

解 长方体表面积为

$$S(x, y, z)=2(xy+yz+zx),\quad x, y, z>0.$$

又

$$xyz=2. \tag{13}$$

令

$$\Phi(x, y, z)=xyz-2,\quad x, y, z>0.$$

作方程(4)得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial S}{\partial x}(p)+\lambda\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}(p)=2(y+z)+\lambda yz=0, \\
\dfrac{\partial S}{\partial y}(p)+\lambda\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}(p)=2(z+x)+\lambda zx=0, \\
\dfrac{\partial S}{\partial z}(p)+\lambda\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}(p)=2(x+y)+\lambda xy=0.
\end{cases}
\tag{14}
$$

由(13)和(14)得

$$
zx-yz=0, \quad xy-zx=0.
$$

所以

$$
x=y=z.
$$

代入(13)得 $x=y=z=\sqrt[3]{2}$. □

例 3 将一个正数 a 分解为 n 个非负数之和，并使其乘积为最大.

解 即是求函数

$$
f:\quad f(x_1, \cdots, x_n)=x_1\cdots x_n, \quad x_1, \cdots, x_n\geqslant 0
$$

在条件

$$
x_1+\cdots+x_n=a \tag{15}
$$

下的最大值. 我们注意到，它的最小值显然是 0. 令

$$
\Phi(x_1, \cdots, x_n)=x_1+\cdots+x_n-a.
$$

作方程(4)得

$$
\begin{cases}
x_2\cdots x_n+\lambda=0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_1\cdots x_{n-1}+\lambda=0.
\end{cases}
\tag{16}
$$

解(15)和(16)得 $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{a}{n}$. 即等分时 n 个数的乘积最大. 同时我们得到

$$
x_1\cdots x_n\leqslant\left(\frac{a}{n}\right)^n=\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n
$$

即

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

对一切 x_1, …, $x_n\geqslant 0$ 成立，且等号当且只当 $x_1=\cdots=x_n$ 时成立.]

例 4 求椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ Ax+By+Cz=0\end{cases}\tag{17}$$

的半轴之长.

解 令

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=r^2.$$

就是要求函数 f 在条件(17)下的最大和最小值. 令

$$\Phi_1(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

$$\Phi_2(x,y,z)=Ax+By+Cz.$$

作方程(4)得

$$\begin{cases}2x+2\lambda_1\dfrac{x}{a^2}+\lambda_2 A=0,\\ 2y+2\lambda_1\dfrac{y}{b^2}+\lambda_2 B=0,\\ 2z+2\lambda_1\dfrac{z}{c^2}+\lambda_2 C=0.\end{cases}\tag{18}$$

三式分别乘以 x, y, z 相加，由(17)得

$$r^2+\lambda_1=0.$$

因此由方程(18)可以解得

$$x=\lambda_2\frac{Aa^2}{r^2-a^2},\qquad y=\lambda_2\frac{Bb^2}{r^2-b^2},\qquad z=\lambda_2\frac{Cc^2}{r^2-c^2}.$$

三式分别乘以 A, B, C 相加，再由(17)便得

$$\frac{A^2a^2}{r^2-a^2}+\frac{B^2b^2}{r^2-b^2}+\frac{C^2c^2}{r^2-c^2}=0.$$

解 r^2 即得 f 的最大和最小值. □

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 何谓条件极值?

(2) 应用 Lagrange 乘数法须解哪些方程?

2. 求 u 在指定条件下的条件极值, 设

(1) $u=xy$, $x+y=1$.

(2) $u=\cos^2x+\cos^2y$, $x-y=\dfrac{\pi}{4}$.

(3) $u=x-2y+2z$, $x^2+y^2+z^2=1$.

(4) $u=3x^2+3y^2+z^2$, $x+y+z=1$.

(5) $u=x^ay^bz^c$, $x+y+z=1$, 其中 $a, b, c>0$.

3. 求点 $(a, 0)$ 到抛物线 $y^2=4x$ 的距离.

4. 求原点到曲面 $z^2-xy=1$ 的距离.

5. 求由点 (a, b, c) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离.

6. 试讨论由点 (a, b, c) 到曲面 $\varphi(x, y, z)=0$ 的距离.

7. 在直径为 R 的球内作出体积最大的长方体.

8. 帐蓬的下部为圆柱, 顶盖是圆锥. 圆柱半径为 R, 高为 H, 锥高为 h. 证明 $R=\sqrt{5}H$, $h=2H$ 时用料最省.

9. 修建一容积为 V_0 的地下仓库, 仓顶和四壁的单位面积造价分别是地面的 3 倍和 2 倍, 试选出造价最小的尺寸.

10. 求出椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限中的切面与坐标平面所成四面体的最小体积.

11. 求原点到直线 $2x+2y+z+9=0$, $2x-y-2z-18=0$ 的距离.

12. 求原点到曲线 $x^2-xy+y^2-z^2=1$, $x^2+y^2=1$ 的距离.

13. 求抛物线 $y=x^2$ 到直线 $x-y=1$ 的距离.

14. 求椭圆 $x^2+4y^2=4$ 到直线 $x+y=4$ 的距离.

15. 求椭圆 $x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2=1,\ x+2y+z=0$ 的长轴和短轴.

16. 求二直线

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},\quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

的距离.

17. 求圆内接三角形中之面积最大者.

18. 设 n 为自然数, $x, y\geqslant 0$. 证明

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

提示: 在 $x+y=a$ 的条件下求 $z=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ 的最小值.

19. 设 $a_1, \cdots, a_n\geqslant 0$, 求 $u=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ 在超球 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=r^2$ 上的最大值.

20. 设 $a_i, x_i\geqslant 0$, $i=1, \cdots, n$; $p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

第七章　多元函数的积分

第一节　二 重 积 分

§1.1　区间上的二重积分

欧氏空间中多元函数的积分，它的概念和理论基本上都与空间的维数无关，因此为简明起见，我们就二元函数来讨论这个问题.

二元函数的积分(即"二重积分")也和一元函数的积分一样，有直观的几何意义. 如图 40，设非负二元函数 f 的定义域为 D，我们要计算以 D 为底，以 f 为上盖的柱体"体积". 为此，采用计算曲边梯形面积的方法，将 D 分为许多小块 $D_1, \cdots, D_n$，在每一小块 D_i 上任取一点 ξ_i，以 $\sigma(D_i)$ 记 D_i 的面积，则所求体积(以直近曲)

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma(D_i).$$

分之越细，近似越好，无限细分应得

$$V = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\sigma(D_i).$$

这个无限细分得来的极限，就是二重积分的概念，记为

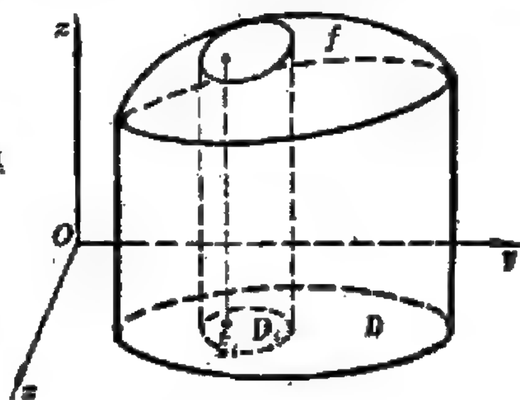


图　40

$$V = \int_D f = \int_D f d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

回想在讨论一元函数的积分时，函数是定义在区间上的，我们考虑的是区间上的积分. 但在 R^2 中，函数的定义域可以是一个有

任意形状的集合. 这样我们就遇到很大的困难: 对于 R^2 中的一个集合 D, 究竟应该怎样去细分? 细分后 D_i 的面积又是什么意思? 应该如何定义平面点集的面积呢? 这些就是在定义二元函数的积分时须解决的问题. 下面分两步来定义二重积分就是为了克服这些困难而设计出来的. 现在我们先讨论区间上的二重积分, 这和一元函数的积分是一样的. 到 §1.4 中再定义任意集上的二重积分.

设 $I=[a,b]\times[c,d]$ 是 R^2 中的一个闭区间, 我们定义 I 的面积为

$$\sigma(I)=(b-a)(d-c).$$

在初等数学里就是这样定义矩形面积的. 在这个基础上, 我们曾经算出了许多平面图形的面积, 例如, 若 B 是半径为 r 的圆盘, 则其面积为 $\sigma(B)=\pi r^2$. 还提出了曲边梯形面积的计算方法(定积分). 但是, 我们缺乏一个关于平面点集面积的统一定义, 对于一般一个平面点集 $B\subset R^2$, 它的面积 $\sigma(B)$ 意味着什么? 这是等待着我们去回答的. 我们将在下面 §1.4 中在给出一般集合上二重积分概念的同时也给出面积的定义.

定义 1 设 $I=[a,b]\times[c,d]$ 是 R^2 中的一个闭区间。设

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,\quad c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d.$$

于是直线 $x=x_i(i=0,\cdots,m)$ 和 $y=y_j(j=0,\cdots,n)$ 将 I 分成 $k=mn$ 个小区间 $I_1,\cdots,I_k$ (图 41). 这样的一组区间

$$\pi=\{I_1,\cdots,I_k\}$$

叫做 I 的一个分割. 记

$$\|\pi\|=\max\{\mathrm{diam}I_1,\cdots,\mathrm{diam}I_k\},$$

其中 $\mathrm{diam}\,I_j$ 是 I_j 的直径, 即其对角线长. 再设 f: $I\to R$. 在每个 I_j 中任取一点 ξ_j 得

$$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_k)\in I_1\times\cdots\times I_k.$$

记

$$S(f,\pi,\xi)=\sum_{j=1}^{k}f(\xi_j)\sigma(I_j).$$

如果有一数 A 满足：任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $\|\pi\|<\delta$ 时对一切 $\xi\in I_1\times\cdots\times I_k$ 有

$$|S(f,\pi,\xi)-A|<\varepsilon,$$

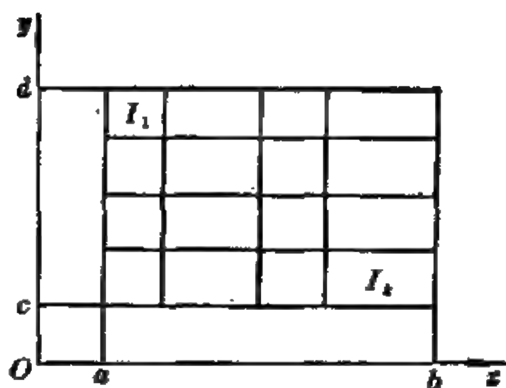


图 41

则记

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}S(f,\pi,\xi)=A;$$

并称 f 在 I 上为(Riemann)**可积**，A 为 f 在 I 上的(Riemann)**积分**，记为

$$A=\int_I f=\int_I f d\sigma=\iint_I f(x,y)dxdy.$$

定理1 1° 若函数 f 在区间 $I\subset R^2$ 上可积，则对于任何常数 c，cf 也在 I 上可积，且

$$\int_I cf=c\int_I f.$$

2° 若函数 f_1 和 f_2 都在 I 上可积，则 f_1+f_2 也在 I 上可积，且

$$\int_I (f_1+f_2)=\int_I f_1+\int_I f_2.$$

3° 若函数 $f\geqslant 0$ 在 I 上可积，则

$$\int_I f\geqslant 0.$$

特别，若函数 f_1 和 f_2 都在 I 上可积，且 $f_1\geqslant f_2$，则

$$\int_I f_1\geqslant\int_I f_2.$$

证明 因为

$$S(cf,\pi,\xi)=cS(f,\pi,\xi),$$

$$S(f_1+f_2,\pi,\xi)=S(f_1,\pi,\xi)+S(f_2,\pi,\xi)$$

所以 1° 和 2° 成立. 若 $f\geqslant 0$, 则 $S(f,\pi,\xi)\geqslant 0$, 所以 3° 中第一式成立. 若 $f_1\geqslant f_2$, 则 $f_1-f_2\geqslant 0$, 再由 2° 便得 3° 中第二式. □

定理 2 设 f: $I\to R$ 在闭区间 $I\subset R^2$ 上可积, 则 f 在 I 上有界.

证明 与第三章 § 2.2 定理 2 的证明完全相同. □

在讨论一元函数的积分时我们已经看到, 可积与连续有着密切的关系. 多元函数的积分也是如此. 我们将在下面 §1.2 中研究这个问题, 现在先建立一个与此紧密联系的概念.

定义 2 设 $l\subset R^2$. 如果任给 $\varepsilon>0$, 存在有限个闭区间 I_1, $\cdots$, I_n 使 $\bigcup\limits_{j=1}^{n} I_j\supset l$, 且 $\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma(I_j)<\varepsilon$, 则说 l 为一**零面积集**.

同样定义 R 中的"零长度集"和 R^3, R^n 中的"零体积集".

例 1 设 f: $[a,b]\to R$ 是一连续函数, 则集合 f 是一零面积集.

证明 任给 $\varepsilon>0$. 由第四章 § 2.2 定理 1 知道, f 在 $[a, b]$ 上一致连续, 因此存在 $[a, b]$ 的一个分割(图 42)

$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 当 t_1, $t_2\in[x_{j-1},x_j]$ $(j=1,\cdots,n)$ 时

$$|f(t_1)-f(t_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

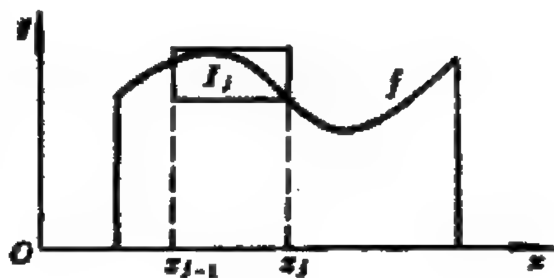


图 42

令

$$m_j=\min f([x_{j-1},x_j]),\quad M_j=\max f([x_{j-1},x_j]),$$

则

$$M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad j=1, \cdots, n.$$

设$I_j=[x_{j-1}, x_j]\times[m_j, M_j]$($j=1, \cdots, n$)，则显见$f\subset\bigcap_{j=1}^{n} I_j$，且

$$\sum_{j=1}^{n}\sigma(I_j)<\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_{j-1})\cdot\frac{\varepsilon}{b-a}=\varepsilon.$$

根据定义 2，f 是零面积集. □

例 2 设 $l\subset R^2$ 是一光滑参数曲线，则 l 是零面积集.

证明 设 l 的方程为

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad t\in[\alpha, \beta].$$

任给 $\varepsilon>0$. 由假设 φ 和 ψ 在$[\alpha, \beta]$上都有连续的导函数. 作分割

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta,$$

使当 $s, t\in[t_{j-1}, t_j]$($j=1, \cdots, n$)时

$$|\varphi(s)-\varphi(t)|<\varepsilon.$$

令

$$a_j=\min\varphi([t_{j-1}, t_j]), \quad b_j=\max\varphi([t_{j-1}, t_j]),$$

则

$$b_j-a_j<\varepsilon, \quad j=1, \cdots, n$$

再令

$$c_j=\min\psi([t_{j-1}, t_j]), \quad d_j=\max\psi([t_{j-1}, t_j]),$$
$$I_j=[a_j, b_j]\times[c_j, d_j], \quad j=1, \cdots, n.$$

于是当 $t\in[t_{j-1}, t_j]$时

$$(\varphi(t), \psi(t))\in I_j, \quad j=1, \cdots, n,$$

所以

$$l\subset\bigcup_{j=1}^{n} I_j.$$

设$|\psi'(t)|\leqslant M$($\alpha\leqslant t\leqslant\beta$)，则由微分平均值定理

$$d_j - c_j \leqslant M(t_j - t_{j-1}),\ j=1, \cdots, n.$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma(I_j) < \sum_{j=1}^{n} \varepsilon M(t_j - t_{j-1}) = \varepsilon M(\beta - \alpha).$$

因为 ε 是任意的，所以 l 是零面积集. □

定理 3 设 $I \subset R^2$ 是一闭区间，f: $I \to R$ 有界. 若 $l = \{p \in I: f(p) \neq 0\}$ 为一零面积集，则 f 在 I 上可积，且 $\int_I f = 0$.

证明 任给 $\varepsilon > 0$. 因为 l 是零面积集，所以有区间 $J_1, \cdots, J_n$，$\bigcup_{i=1}^{n} J_i \supset l$，且 $\sum_{i=1}^{n} \sigma(J_i) < \varepsilon$. 将每一个区间 J_i 均匀地向四方稍事扩大成为区间 $\bar{J}_i$，且仍有 $\sum_{i=1}^{n} \sigma(\bar{J}_i) < \varepsilon$. 这样可使 l 和 $\partial\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{J}_i\right)$ 之间的距离(图 43)

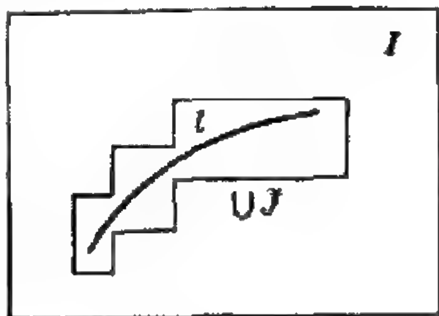


图 43

$$\delta = \inf\left\{|p - q|: \quad p \in l,\ q \in \partial\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bar{J}_i\right)\right\} > 0.$$

设 π 是 I 的一个分割，则

$$S(f, \pi, \xi) = \sum_{I_j \cap l \neq \varnothing} f(\xi_j) \sigma(I_j) + \sum_{I_j \cap l = \varnothing} f(\xi_j) \sigma(I_j).$$

但当 $I_j \cap l = \varnothing$ 时 $f(\xi_j) = 0$，所以

$$S(f, \pi, \xi) = \sum_{I_j \cap l \neq \varnothing} f(\xi_j) \sigma(I_j).$$

如果 $\|\pi\|<\delta$，则易见当 $I_j\cap l\neq\varnothing$ 时 $I_j\subset\bigcup_{i=1}^{n}\tilde{J}_i$. 设 $|f(p)|\leqslant M$ $(p\in I)$，则当 $\|\pi\|<\delta$ 时，

$$|S(f,\pi,\xi)|=\left|\sum_{I_j\cap l\neq\varnothing}f(\xi_j)\sigma(I_j)\right|\leqslant M\sum_{I_j\cap l\neq\varnothing}\sigma(I_j)$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\sigma(\tilde{J}_i)<\varepsilon M.$$

所以

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}S(f,\pi,\xi)=0. \quad \square$$

推论 设 $I\subset R^2$ 为一闭区间，$f,g: I\to R$ 有界，又 $\{p\in I: f(p)\neq g(p)\}$ 为一零面积集. 若 f 在 I 上可积，则 g 在 I 上也可积，且 $\int_I g=\int_I f$.

证明 因为 f 可积，又由定理 3，$g-f$ 也可积，再由定理 1 的 2° 即得 $g=f+(g-f)$ 可积. 又

$$\int_I g=\int_I f+\int_I(g-f)=\int_I f. \quad \square$$

习　题

1. 回答下列问题

(1) $S(f,\pi,\xi)=$? $\lim\limits_{\|\pi\|\to 0}S(f,\pi,\xi)=A$ 是什么意思？函数 f 在闭区间 I 上可积是什么意思？积分是什么？怎样表示？

(2) 函数 f 在闭区间 I 上可积的必要条件是什么？

(3) 何谓零面积集？零面积集是否有界？

(4) 有限集是否都是零面积集？有限个零面积集的并是不是零面积集？无限个呢？

(5) 是否存在开的零面积集？零面积集是否都是闭集？

(6) 如果 $\{p\in R^2:\ f(p)\neq 0\}$ 是零面积集，且 f 有界，则 f 有何积分性质？

2. 证明定理 2.

3. 证明 $A\subset R^2$ 是零面积集，设

(1) $A=\{p_1, p_2, \cdots\}$，且 (p_n) 收敛.

(2) A 有界，且其极限点构成零面积集.

(3) $A(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $0<x\leqslant 1$.

4. 证明 $[0,1]^2$ 中有理点的全体不是零面积集。

提示：考虑函数 f：

$$f(p)=\begin{cases}1, & p \text{ 为有理点}, \\ 0, & p \text{ 非有理点}.\end{cases}$$

§ 1.2 可积性问题

现在我们来研究二元函数的可积性问题. 设 $I\subset R^2$ 为一闭区间. 我们已经知道，可积函数是有界的，因此以下一律假定 f: $I\to R$ 有界，即有常数 M 使 $|f(x)|\leqslant M$ $(x\in I)$. 设 $\pi=\{I_1, \cdots, I_n\}$ 是 I 的任一分割，记

$$\overline{S}(f, \pi)=\sum_{j=1}^{n}\sup f(I_j)\sigma(I_j),$$

$$\underline{S}(f, \pi)=\sum_{j=1}^{n}\inf f(I_j)\sigma(I_j).$$

显然，当 $\xi\in I_1\times\cdots\times I_n$ 时

$$\underline{S}(f, \pi)\leqslant S(f, \pi, \xi)\leqslant\overline{S}(f, \pi). \tag{1}$$

又记

$$\overline{\int}_I f=\inf_{\pi}\overline{S}(f, \pi), \qquad \underline{\int}_I f=\sup_{\pi}\underline{S}(f, \pi),$$

分别叫做 f 在 I 上的**上积分**和**下积分**.

设 π_1 和 π_2 是 I 的两个分割，如果 π_1 中的区间都是 π_2 中若干区间的并集，则记 $\pi_1\leqslant\pi_2$. 以下自引理 1 至引理 3 与第四章 § 2.3 中引理 1 至引理 3 的证明完全相同，因此我们只述不证。

引理 1 若 $\pi_1 \leqslant \pi_2$，则

$$\underline{S}(f, \pi_1) \leqslant \underline{S}(f, \pi_2) \leqslant \overline{S}(f, \pi_2) \leqslant \overline{S}(f, \pi_1).$$

引理 2 若 π_1 和 π_2 是 I 的任意两个分割，则

$$\underline{S}(f, \pi_1) \leqslant \overline{S}(f, \pi_2).$$

引理 3

$$\underline{\int}_I f \leqslant \overline{\int}_I f.$$

因此对一切分割 π 有

$$\underline{S}(f, \pi) \leqslant \underline{\int}_I f \leqslant \overline{\int}_I f \leqslant \overline{S}(f, \pi). \tag{2}$$

引理 4 等式

$$\underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f \tag{3}$$

成立的充分必要条件是，任给 $\varepsilon > 0$，存在分割 π_ε 使

$$\overline{S}(f, \pi_\varepsilon) - \underline{S}(f, \pi_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{4}$$

证明 （必要性） 设等式 (3) 成立，记

$$A = \underline{\int}_I f = \overline{\int}_I f. \tag{5}$$

任给 $\varepsilon > 0$，由上、下积分的定义，存在分割 $\pi_1 = \{I_1, \cdots, I_n\}$ 和 $\pi_2 = \{J_1, \cdots, J_m\}$ 使

$$\overline{S}(f, \pi_1) < A + \frac{\varepsilon}{2}, \ \underline{S}(f, \pi_2) > A - \frac{\varepsilon}{2}.$$

作分割

$$\pi_\varepsilon = \{I_j \cap J_i: \quad i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n\},$$

则 $\pi_1 \leqslant \pi_\varepsilon$，$\pi_2 \leqslant \pi_\varepsilon$。由引理 1 便得

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{S}(f, \pi_2) \leqslant \underline{S}(f, \pi_\varepsilon) \leqslant \overline{S}(f, \pi_\varepsilon) \leqslant \overline{S}(f, \pi_1) < A + \frac{\varepsilon}{2},$$

即 π_ε 使(4)式成立.

(充分性) 任给 $\varepsilon>0$. 设有分割 π_ε 使(4)式成立. 以此 π_ε 代入(2)式便得

$$0\leqslant\overline{\int_I} f-\underline{\int_I} f<\varepsilon.$$

而 ε 是任意的, 所以(3)式成立. □

定理 1 f 在 I 上可积的充分必要条件是等式(3)成立, 这时

$$\int_I f=\underline{\int_I} f=\overline{\int_I} f. \tag{6}$$

证明 (必要性)设 f 在 I 上可积. 任给 $\varepsilon>0$. 由 §1.1 定义 1, 存在分割 $\pi_\varepsilon=\{J_1,\cdots,J_m\}$ 使

$$\left|S(f,\pi_\varepsilon,\xi)-\int_I f\right|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对一切 $\xi\in J_1\times\cdots\times J_m$ 成立. 上式即

$$\int_I f-\frac{\varepsilon}{3}<\sum_{i=1}^{m}f(\xi_i)\sigma(J_i)<\int_I f+\frac{\varepsilon}{3}.$$

由于 ξ 是任意的, 易见

$$\int_I f-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\underline{S}(f,\pi_\varepsilon)\leqslant\overline{S}(f,\pi_\varepsilon)\leqslant\int_I f+\frac{\varepsilon}{3}.$$

即(4)式成立. 从而由引理 4 得知(3)式成立.

(充分性) 设等式(3)成立. 任给 $\varepsilon>0$. 由引理 4, 有分割 $\pi_\varepsilon=\{J_1,\cdots,J_m\}$ 使(4)式成立. 设 A 由(5)式定义. 在每一个 J_i

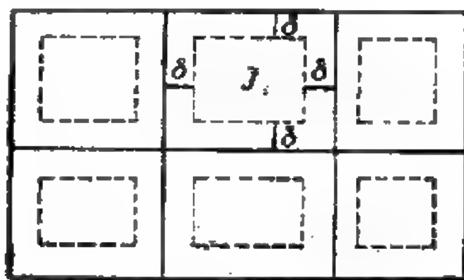


图 44

内部作开区间$\tilde{J}_i \subset J_i$（图 44），并使$\tilde{J}_i$和J_i的对应边之间有相同的距离$\delta>0$. 记$K=I\cap\left(\bigcup_{i=1}^{m}\tilde{J}_i\right)^c$. 取$\delta$很小使$\sigma(K)<\varepsilon$. 设$\pi=\{I_1, \cdots, I_n\}$是$I$的任一分割满足$\|\pi\|<\delta$. 则由(1)和(2)式，对一切$\xi\in I_1\times\cdots\times I_n$有

$$|S(f,\pi,\xi)-A|\leqslant \bar{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}[\sup f(I_j)-\inf f(I_j)]\sigma(I_j)$$

$$=\sum_{I_j\cap K\neq\varnothing}[\sup f(I_j)-\inf f(I_j)]\sigma(I_j)$$

$$+\sum_{I_j\not\subset K}[\sup f(I_j)-\inf f(I_j)]\sigma(I_j)=\Sigma_1+\Sigma_2.$$

由f有界的假设有

$$\Sigma_1\leqslant 2M\sum_{I_j\cap K\neq\varnothing}\sigma(I_j)\leqslant 2M\sigma(K)<2M\varepsilon.$$

在Σ_2中$I_j\not\subset K$, 则I_j必与某$\tilde{J}_i$相交，由$\tilde{J}_i$的作法可知$I_j\subset J_i$. 因此

$$\Sigma_2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{I_j\subset J_i}[\sup f(I_j)-\inf f(I_j)]\sigma(I_j)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}[\sup f(J_i)-\inf f(J_i)]\sum_{I_j\subset J_i}\sigma(I_j)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{m}[\sup f(J_i)-\inf f(J_i)]\sigma(J_i)$$

$$=\bar{S}(f,\pi_\varepsilon)-\underline{S}(f,\pi_\varepsilon)<\varepsilon.$$

所以

$$|S(f,\pi,\varepsilon)-A|<(2M+1)\varepsilon.$$

即f在I上可积, 且(6)式成立. □

定理 2 若f在I上的间断点集是一零面积集，则f在I上可积.

证明 设 l 是 f 在 I 上的间断点集. 任给 $\varepsilon>0$. 由所设, 有区间(见 §1.1 定理 3 的证明)$J_1, \cdots, J_m$ 使 $\left(\bigcup_{i=1}^{m} J_i\right)^{\circ} \supset l$, 且 $\sum_{i=1}^{m}\sigma(J_i)<\varepsilon$. 记

$$K=\bigcup_{i=1}^{m} J_i.$$

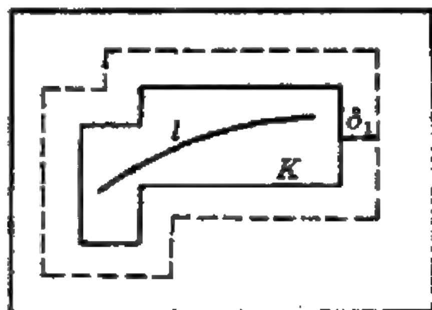


图 45

将 K 的边界向四周平行移动距离 δ_1 (图 45), 得到集合 $\tilde{K}\supset K$. 取 δ_1 很小使 $\sigma(\tilde{K})<\varepsilon$.

因为 f 在 $I\cap(K^{\circ})^c$ 上连续, 而 $I\cap(K^{\circ})^c$ 是紧致集, 所以有 $\delta_2>0$, 当 $p_1, p_2\in I\cap(K^{\circ})^c$, $\|p_1-p_2\|<\delta_2$ 时

$$|f(p_1)-f(p_2)|<\varepsilon$$

(第五章 §3.2 定理 4). 设 $\pi=\{I_1, \cdots, I_n\}$ 是 I 的任一分割, 于是

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, \pi)-\underline{S}(f, \pi)&=\sum_{I_j\cap K^{\circ}=\varnothing}[\sup f(I_j)-\inf f(I_j)]\sigma(I_j)\\&\quad+\sum_{I_j\cap K^{\circ}\neq\varnothing}[\sup f(I_j)-\inf f(I_j)]\sigma(I_j)\\&=\Sigma_1+\Sigma_2.\end{aligned}$$

设 $\|\pi\|<\delta=\min(\delta_1, \delta_2)$. 因为在 Σ_1 中 $I_j\subset I\cap(K^{\circ})^c$, 所以

$$\Sigma_1\leqslant\varepsilon\sum_{I_j\cap K^{\circ}=\varnothing}\sigma(I_j)\leqslant\varepsilon\sigma(I).$$

由 $\tilde{K}$ 的作法可知, 在 Σ_2 中 $I_j\subset\tilde{K}$, 所以

$$\Sigma_2\leqslant 2M\sum_{I_j\cap K^{\circ}\neq\varnothing}\sigma(I_j)\leqslant 2M\sigma(\tilde{K})<2M\varepsilon,$$

其中 M 是 $|f|$ 的上界. 因此当 $\|\pi\|<\delta$ 时

$$\overline{S}(f, \pi)-\underline{S}(f, \pi)<\varepsilon(\sigma(I)+2M).$$

由定理 1 和引理 4，f 在 I 上可积. □

例 1 设

$$f(x, y)=\sin\frac{1}{(x^2-1)^2+(y^2-1)^2}.$$

证明 f 在区间 $I=[-2, 2]^2$ 上可积.

证明 函数 f 在 I 中的四个点

$$(-1, -1), \quad (-1, 1), \quad (1, -1), \quad (1, 1)$$

上无定义. 但这四个点构成一个零面积集，而 f 在 I 上除此四点外有界，由§ 1.1 定理 3，我们在此四点上赋予 f 以任何值不影响 f 的可积性和积分值. 赋值以后，上述四点就是 f 的间断点，再根据定理 2，f 在 I 上可积. □

例 2 设

$$f(x, y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y-x^2}.$$

证明 f 在区间 $I=[0, 1]^2$ 上可积.

证明 函数 f 在抛物线

$$l: \quad y=x^2$$

上无定义. 而 $I\cap l$ 是一零面积集(§ 1. 1 例 1)，f 在 $I\cap l^c$ 上有界. 我们在 l 上给 f 赋值，只要使 f 在 I 上保持有界，f 便在 I 上可积，且积分值不变. □

在第三章§2. 2中我们给出了一个不可积函数的经典例子——Dirichlet 函数. 这个例子同样适用于二重积分，也就是函数

$$f: \quad f(p)=\begin{cases}0, & p \text{ 为有理点},\\ 1, & p \text{ 非有理点}\end{cases}$$

在区间$[0, 1]^2$ 上是不可积的 (§ 1. 1 习题 4). 这个函数没有连续点，全是间断点. 那么可积和连续究竟是什么关系呢？要弄清楚这个问题，只要在现有的基础上稍作深入讨论就够了，不过我们还是把它留至实函数论中去解决. 我们注意到，上述二元 Dirichlet

函数只有两个函数值，因此属最简单的函数，然而它竟是不可积的．这个事实告诉我们，Riemann 积分的可积函数类太窄了，必然不敷应用，这是 Riemann 积分的一个严重缺陷．然而它有明确的几何和物理意义，比较简单，适合初学，这又是它的极大优点．

习　题

以下 1 至 5 题设 $I\subset R^2$ 是闭区间，$f:\ I\to R$．

1．回答下列问题：

(1) $\overline{S}(f,\pi)$ 和 $\underline{S}(f,\pi)$ 是什么意思？它们与 f 的可积性有何关系？

(2) 上积分 $\overline{\int}_I f$ 和下积分 $\underline{\int}_I f$ 是什么意思？它们是否总是存在的？它们与 f 的可积性有何关系？

(3) f 的可积性与连续性有何关系？

(4) f 可积（记积分为 A）的充分必要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在分割 $\pi_\varepsilon=\{I_1,\cdots,I_n\}$ 使

$$|S(f,\pi_\varepsilon,\xi)-A|<\varepsilon$$

对一切 $\xi\in I_1\times\cdots\times I_n$ 成立．这个说法是否正确？

2．设 $f\geqslant0$ 连续，$\int_I f=0$，证明 $f=0$．

3．设闭区间 $J\subset I$，f 在 I 上可积，证明 f 在 J 上也可积．

4．设 $\int_I f>0$，证明存在区间 $J\subset I$ 使 f 在 J 上为正．

5．设 $f>0$ 可积，证明 $\int_I f>0$．

6．研究下列函数 f 在区间 I 上的可积性．设

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{xy}, & x\neq0,\quad y\neq0,\\ 0, & x=0\text{ 或 }y=0,\end{cases}\quad I=[0,1]^2$．

(2) $\{p_1,p_2,\cdots\}\subset I$，

$$f(p)=\begin{cases}0, & p\overline{\in}\{p_1,p_2,\cdots\},\\ \dfrac{1}{n}, & p=p_n,\ n\in N.\end{cases}$$

7. 设 f 和 g 同是区间 I 上的可积函数. 证明

(1) $|f|$ 可积. (2) fg 可积.

8. 设区间 $[a,b]$ 上的一元函数 f 有界, 证明 f 为零面积集的充分必要条件是 f 可积.

9. 设闭区间 I 上的连续函数序列 (f_n) 是一非增序列, 且 $\lim f_n=0$. 证明

$$\lim\int_I f_n=0.$$

提示: 应用 I 的紧致性.

§ 1.3 区间上化累次积分

设 $I=[a,b]\times[c,d]$, f: $I\to R$. 考虑函数 $f(x,\cdot)$, 它的定义域为 $[c,d]$. 如果对于每一个 $x\in[a,b]$, $f(x,\cdot)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 则得

$$f_1(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy, \qquad x\in[a,b].$$

如果函数 f_1 又在 $[a,b]$ 上可积, 则又得积分

$$\int_a^b f_1(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx.$$

这个积分叫做**累次积分**. 习惯记为

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

同样, 还有累次积分

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx.$$

我们自然要问: 等式

$$\int_I f=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

能否成立? 如果这个等式能够成立, 则就解决了二重积分的计算问题: 计算二重积分就是计算累次积分, 即先后计算两个一重积分

(一元函数的积分).

设 f 有界. 令

$$\varphi(x)=\underline{\int_c^d} f(x, y)\,dy, \qquad \psi(x)=\overline{\int_c^d} f(x, y)\,dy.$$

则对于每一个 $x\in[a, b]$, $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 均有定义, 因此我们得到两个函数 φ 和 ψ, 定义域为 $[a, b]$.

定理 1 如果 f 可积, 则 φ 和 ψ 均可积, 且

$$\int_I f=\int_a^b \varphi=\int_a^b \psi.$$

证明 分别作 $[a, b]$ 和 $[c, d]$ 的分割

$$\pi': \quad a=x_0<x_1<\cdots<x_m=b,$$

$$\pi'': \quad c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d.$$

于是得到 I 的分割

$$\begin{aligned}\pi&=\{[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]: \quad i=1, \cdots, m, j=1, \cdots, n\}\\&=\{J_i\times I_j: \quad i=1, \cdots, m, j=1, \cdots, n\}.\end{aligned}$$

由假设, 任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\|\pi\|<\delta$ 时

$$\int_I f-\varepsilon<\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_{ij})\sigma(J_i\times I_j)<\int_I f+\varepsilon,$$

其中 $(\xi_i, \mu_{ij})\in J_i\times I_j$. 取 π' 和 π'' 满足 $\|\pi'\|<\delta/\sqrt{2}$, $\|\pi''\|<\delta/\sqrt{2}$, 则 $\|\pi\|<\delta$, 因此上式成立. 于是

$$\begin{aligned}\int_I f-\varepsilon&\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\inf f(\xi_i, I_j)\Delta x_i\Delta y_j\\&\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sup f(\xi_i, I_j)\Delta x_i\Delta y_j\leqslant\int_I f+\varepsilon.\end{aligned}$$

但 $\sum\limits_{j=1}^{n}\inf f(\xi_i, I_j)\Delta y_j$ 是函数 $f(\xi_i, \cdot)$ 在 $[c, d]$ 上的下和, 所以

$$\sum_{j=1}^{n}\inf f(\xi_i, I_j)\Delta y_j \leqslant \int_c^d f(\xi_i, y)\,dy = \varphi(\xi_i).$$

同理

$$\sum_{j=1}^{n}\sup f(\xi_i, I_j)\Delta y_j \geqslant \psi(\xi_i).$$

所以

$$\int_I f - e \leqslant \sum_{i=1}^{m}\varphi(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{m}\psi(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \int_I f + e.$$

这就是说,

$$\lim_{\|\pi'\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\varphi(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\|\pi'\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\psi(\xi_i)\Delta x_i = \int_I f.$$

即 φ 和 ψ 在 $[a, b]$ 上可积, 且定理中的等式成立. □

由此我们立即得到:

推论 设 f 在 I 上可积. 如果对于每一个 $x\in[a, b]$ 函数 $f(x, \cdot)$ 在 $[c, d]$ 上可积, 则

$$\int_I f = \int_a^b dx\int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{1}$$

同样, 如果对于每一个 $y\in[c, d]$ 函数 $f(\cdot, y)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则又有

$$\int_I f = \int_c^d dy\int_a^b f(x, y)\,dx. \tag{2}$$

例如, 若 f 在 I 上连续, 则(1)式和(2)式都成立.

例 1 计算二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1}} xe^{xy}\,dx\,dy$.

解 用(1)式, 所计算的积分为

$$A = \int_0^1 dx\int_0^1 xe^{xy}\,dy = \int_0^1 dx\int_0^1 e^{xy}\,dxy = \int_0^1 (e^x - 1)\,dx = e - 2. \quad □$$

习　　题

1. 在什么条件下区间上的二重积分可以化累次积分？为什么？

2. 证明：若一元函数 f 和 g 分别在区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 上可积，则

(1) $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)\,dxdy=\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$.

(2) $\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} f(x)f(y)\,dxdy=\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2$.

3. 设函数 f 在区间 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上有连续二阶偏导数，计算积分

$$\iint\limits_I \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,dxdy.$$

4. 计算下列积分：

(1) $\iint\limits_I e^{x+y}dxdy$，　$I=[0,1]^2$.

(2) $\iint\limits_I \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$，　$I=[0,1]^2$.

(3) $\iint\limits_I x\sin xy\,dxdy$，　$I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,1]$.

(4) $\iint\limits_I \sin(x+y)\,dxdy$，　$I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^2$.

(5) $\iint\limits_I \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy$，　$I=[-1,1]\times[0,2]$.

(6) $\iint\limits_I [x+y]\,dxdy$，　$I=[0,2]^2$.

5. 计算积分 $\iint\limits_I f(x,y)\,dxdy$，$I=[0,1]^2$，$f$ 为

(1) $f(x,y)=\begin{cases}1, & y\leqslant x^2,\\ 0, & y>x^2.\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases}1-x-y, & x+y\leqslant 1,\\ 0, & x+y>1.\end{cases}$

(3) $f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x^2\leqslant y\leqslant 2x^2,\\ 0, & y<x^2 \text{ 或 } y>2x^2.\end{cases}$

6. 试作出一个点集 $B\subset[0,1]^2$，它与坐标轴的每一条平行线相交最多一点，且 $\bar{B}=[0,1]^2$. 令

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in B,\\ 0, & (x,y)\notin B.\end{cases}$$

证明

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx=0,$$

但 f 在$[0,1]^2$ 上不可积.

§ 1.4　有界集合上的二重积分

前面我们已经比较充分地讨论了区间上的二重积分，这样就很容易过渡到任意有界集合上的积分.

定义 1　设 $B\subset R^2$ 是一有界集，$f:\ B\to R$. 记

$$f_B(p)=\begin{cases}f(p), & p\in B,\\ 0, & p\notin B.\end{cases}$$

任取闭区间 $I\supset B$. 如果函数 f_B 在 I 上可积，则说 f 在 B 上可积，$\int_I f_B$ 叫做 f 在 B 上的积分，记为

$$\int_B f=\int_B f\,d\sigma=\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy=\int_I f_B.$$

我们注意到，这个定义不依赖于区间 I 的选取.

定理 1　设 $B\subset R^2$ 是一有界集，$f:\ B\to R$ 有界. 如果 ∂B 和 f(在 B 上)的间断点集都是零面积集，则 f 在 B 上可积.

证明　任取闭区间 $I\supset B$. 记 E_f 为 f（在 B 上）的间断点集，E_{f_B} 为 f_B 的间断点集. 因为$(B^c)^\circ$ 中的点均是 f_B 的连续点，所以由第五章 § 2.1(1)，

$$E_{f_B}\subset B^\circ\cup\partial B.$$

但当 $p\in B^\circ$ 时 $f_B(p)=f(p)$，所以

$$E_{f_B} \subset E_f \cup \partial B.$$

然而 E_f 和 ∂B 均是零面积集，故 E_{f_B} 也是零面积集. 由§1.2定理 2, f_B 在 I 上可积. 再由定义 1, f 在 B 上可积. □

例如, 若 $B \subset R^2$ 为一有界集, 且 ∂B 是零面积集, 则§1.2例1和例2中的函数均在 B 上可积.

定理 2 §1.1 中的定理 1 和定理 2 对于有界集上的积分也成立.

证明 定理 2 的成立是显然的. 我们证明定理 1 的 2°. 设函数 f 和 g 都在有界集 B 上可积. 任取闭区间 $I \supset B$. 则 f_B 和 g_B 都在 I 上可积, 因此 $f_B + g_B$ 也在 I 上可积. 但

$$(f+g)_B = f_B + g_B.$$

由定义 1, 这就是说 $f+g$ 在 B 上可积, 且

$$\int_B (f+g) = \int_I (f+g)_B = \int_I f_B + \int_I g_B = \int_B f + \int_B g.$$

同样证明 1° 和 3°. □

定理 3 设集合 $B_1, B_2 \subset R^2$ 有界, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. 若函数 f 在 B_1 和 B_2 上都可积, 则在 $B_1 \cup B_2$ 上也可积, 且

$$\int_{B_1 \cup B_2} f = \int_{B_1} f + \int_{B_2} f.$$

证明 由 $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ 可见

$$f_{B_1 \cup B_2} = f_{B_1} + f_{B_2}.$$

任取闭区间 $I \supset B_1 \cup B_2$. 由假设, f_{B_1} 和 f_{B_2} 都在 I 上可积, 所以 $f_{B_1 \cup B_2}$ 也在 I 上可积. 因此由定义 1, f 在 $B_1 \cup B_2$ 上可积, 且

$$\int_{B_1 \cup B_2} f = \int_I f_{B_1 \cup B_2} = \int_I f_{B_1} + \int_I f_{B_2} = \int_{B_1} f + \int_{B_2} f. \quad \square$$

引理 1 设 $B \subset R^2$ 是一有界集, 则

$$\int_B 1 = 0 \tag{1}$$

的充分必要条件为B是一零面积集.

证明 记

$$1_B(p)=\begin{cases}1, & p\in B,\\ 0, & p\in B.\end{cases}$$

(充分性) 若B是零面积集,则由§1.1定理3,函数1_B在闭区间$I\supset B$上可积,且

$$\int_I 1_B=0. \tag{2}$$

由定义1,函数1在B上可积,且(1)式成立.

(必要性) 若1在B上可积,且(1)式成立.考虑区间$I\supset B$的分割$\pi=\{I_1,\cdots,I_n\}$.若$I_j\cap B\neq\varnothing$,取$\xi_j\in B$.则

$$S(1_B,\pi,\xi)=\sum_{I_j\cap B\neq\varnothing}\sigma(I_j).$$

由假设,(2)式应成立,所以

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}S(1_B,\pi,\xi)=0.$$

因此,任给$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,当$\|\pi\|<\delta$时

$$\sum_{I_j\cap B\neq\varnothing}\sigma(I_j)<\varepsilon.$$

显然$\bigcup\{I_j:\ I_j\cap B\neq\varnothing\}\supset B$.所以$B$是零面积集. □

定义2 设$B\subset R^2$是一有界集,若函数1在B上可积,则说B有面积,并定义B的**面积**为

$$\sigma(B)=\int_B 1=\iint_B dx\,dy.$$

根据这个定义和引理1,零面积集就是面积为0的集合.由定义还易知(习题2):

定理4 设$B\subset R^2$是一有界集,则B有面积的充分必要条件是对于闭区间$I\supset B$上的分割π有

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{I_j\cap B\neq\varnothing}\sigma(I_j)=\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{I_j\subset B}\sigma(I_j). \tag{3}$$

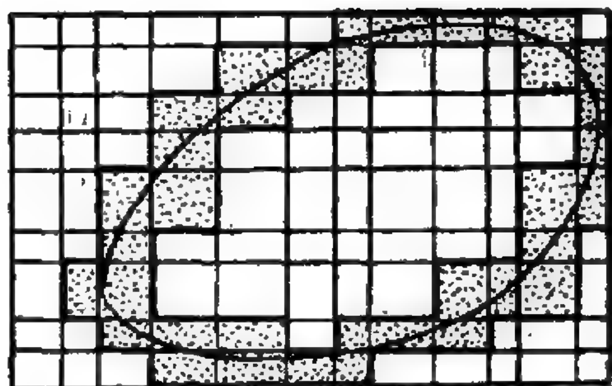


图 46

此时 $\sigma(B)$就是这个极限。

从图 46 可以看到，(3)式有着明显的几何意义。事实上，就是传统的面积定义。

定理 5 设$B\subset R^2$是一有界集，则 B 有面积的充分必要条件为 $\sigma(\partial B)=0$。

证明 （充分性） 若 $\sigma(\partial B)=0$，则由定理 1，函数 1 在 B 上可积。根据定义 2，B 有面积。

（必要性） 若 B 有面积，任给 $\varepsilon>0$，则由(3)式，当$\|\pi\|$充分小时有

$$\sum_{I_j\cap B\neq\varnothing}\sigma(I_j)-\sum_{I_j\subset B}\sigma(I_j)<\varepsilon.$$

但是容易明白

$$\bigcup\{I_j\in\pi:\quad I_j\cap B\neq\varnothing,I_j\not\subset B\}\supset\partial B.$$

所以

$$\sigma(\partial B)=0.\qquad\square$$

根据这个定理和§1.1 例 1，例 2，如果 B 是由有限个连续函数围成的集合（图 47），或是由有限段光滑参数曲线围成的集合（图 48），则 B 有面积。这些是微积分学计算中常见的集合。但是并非一切有界集均有面积，例如，若 B 是$[0,\ 1]^2$中有理点的全体，则 B 就没有面积。

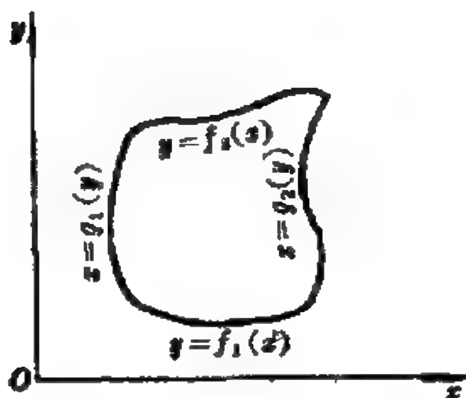


图 47

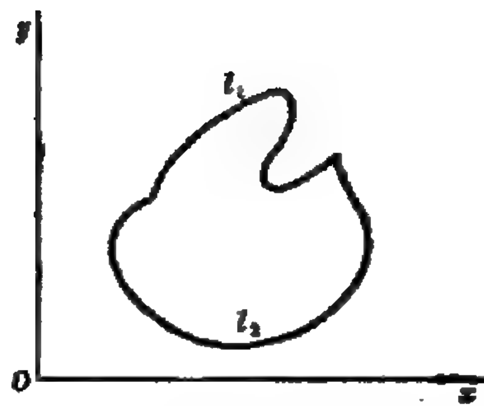


图 48

定理 6 (积分平均值定理) 设 $K\subset R^2$ 是有面积的连通紧致集, f,g: $K\to R$ 连续, 且 $g\geqslant 0$. 则存在 $\xi\in K$ 使

$$\int_K fg=f(\xi)\int_K g.$$

特别, 取 $g=1$, 有 $\xi\in K$ 使

$$\int_K fg=f(\xi)\sigma(K).$$

证明 由定理 1 和定理 5 可知, fg 和 g 在 K 上都可积. 因为 K 是紧致的, 由第五章 § 3.2 定理 3 的推论, f 有最小值 $f(a)$ 和最大值 $f(b)$. 所以

$$f(a)\int_K g\leqslant\int_K fg\leqslant f(b)\int_K g.$$

如果 $\int_K g=0$, 则定理的结论显然成立. 不然, $\int_K g>0$. 于是

$$f(a)\leqslant\left(\int_K g\right)^{-1}\int_K fg\leqslant f(b).$$

而 K 是连通的, 由第五章 § 3.2 定理 2 的推论, 存在 $\xi\in K$ 使

$$f(\xi)=\left(\int_K g\right)^{-1}\int_K fg.$$

即定理的结论也成立. □

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 设 $B\subset R^2$ 是一有界集, 函数 f 在 B 上可积是什么意思? 积分 $\int_B f$ 是如何定义的? ∂B 和函数 f 的连续性对 f 在 B 上的可积性有什么关系?

(2) 有界集的面积是如何定义的? 有界集有面积与其边界有什么关系?

(3) $[0,1]^2$ 中全体有理点所成之集为什么没有面积?

(4) 若 $B\subset R^2$ 有面积, 则 B^- 有没有面积? 反过来呢?

(5) 设 $B\subset R^2$ 是有界集, 如果 B 上有一函数 $f\neq 0$ 可积, 则 B 是否一定有面积?

2. 证明定理 4.

3. 设 $B\subset R^2$ 是有界集, $\pi=\{I_1,\cdots,I_n\}$ 是闭区间 $I\supset B$ 的任意分割。证明 B 有面积的充分必要条件是

$$\inf_{\pi}\sum_{I_j\cap B\neq\varnothing}\sigma(I_j)=\sup_{\pi}\sum_{I_j\subset B}\sigma(I_j).$$

这时 $\sigma(B)$ 就是这两个相等的确界.

4. 试用 § 1.2 引理 4 证明定理 5 的必要性.

5. 设 $A,B\subset R^2$ 都有面积. 证明:

(1) 若 $A\cap B=\varnothing$, 则 $\sigma(A\cup B)=\sigma(A)+\sigma(B)$.

(2) $A\cap B$ 和 $A\cap B^c$ 都有面积.

(3) $\sigma(A\cup B)=\sigma(A)+\sigma(B)-\sigma(A\cap B)$.

6. 设 $D\subset R^2$ 是一开集, 函数 f: $D\to R$ 连续非负, 且 $\int_D f=0$. 证明 $f=0$. 若 D 非开集, 这个结论对否?

7. 判定下列积分的符号:

(1) $\displaystyle\iint\limits_{r\leqslant|x|+|y|\leqslant 1}\ln(x^2+y^2)dxdy$

(2) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,dxdy$

(3) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1-x}}\arcsin(x+y)dxdy$

8. 证明

$$1.96<\iint\limits_{|x|+|y|\leq 10}\frac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}<2.$$

9. 设 f 为一连续函数. 求极限

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2} f(x,y)dxdy.$$

§1.5 有界集上化累次积分

在§1.3的基础上, 我们很容易把有界集上的二重积分化为累次积分.

定理1 设 $D\subset R^2$ 有面积, $f:\ D\to R$ 连续有界. 记 D 在 x 轴上的垂直投影为(图49)

$$I=\{x\in R:\ 存在\ y\ 使(x,y)\in D\}.$$

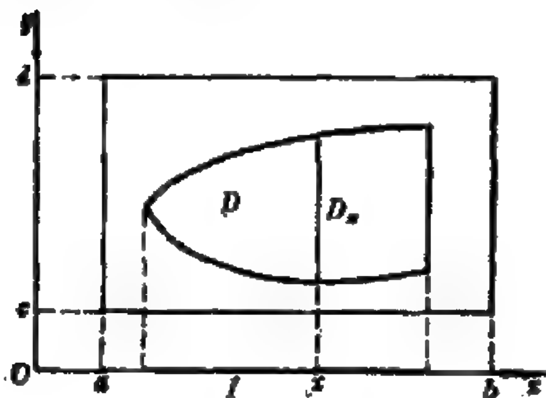


图 49

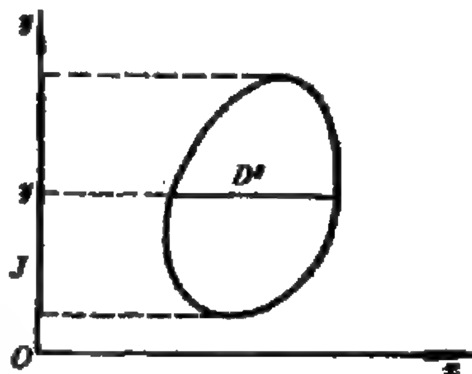


图 50

如果对于每一个 $x\in I$, 截 D_x 是一区间(可以退化为一点), 则

$$\int_D f=\int_I dx\int_{D_x} f(x,y)dy. \tag{1}$$

同样, 记 D 在 y 轴上的投影为(图50)

$$J=\{y\in R:存在\ x\ 使(x,y)\in D\}.$$

如果对于每一个 $y\in J$, 截 D^y 是一区间, 则

$$\int_D f=\int_J dy\int_{D^y} f(x,y)dx. \tag{2}$$

证明 作区间$[a,b]\times[c,d]\supset D$(图49). 因为 f 在 D 上连续

有界，所以 f 在 D 上可积（§1.4 定理 1 和定理 5）。由 §1.4 定义 1，函数 f_D 在 $[a, b]\times[c, d]$ 上可积，且

$$\int_D f=\int_{[a,b]\times[c,d]} f_D.$$

当 $x\in I$ 时函数 $f(x,\cdot)$ 在区间 D_x 上连续有界，而 D_x 的端点当然是零长度集，所以 $f(x,\cdot)$ 在 D_x 上可积（§1.4 定理 1），且

$$\int_{D_x} f(x, y)\,dy=\int_c^d f_D(x, y)\,dy.$$

当 $x\in[a, b]\cap I^c$ 时 $f_D(x,\cdot)=0$，所以

$$\int_c^d f_D(x, y)\,dy=0.$$

因此对于每一个 $x\in[a, b]$，函数 $f_D(x,\cdot)$ 在 $[c, d]$ 上可积．由 §1.3 定理 1 的推论，

$$\begin{aligned}\int_D f&=\int_{[a,b]\times[c,d]} f_D=\int_a^b dx\int_c^d f_D(x, y)\,dy\\&=\int_I dx\int_c^d f_D(x, y)\,dy\\&=\int_I dx\int_{D_x} f(x, y)\,dy.\quad\square\end{aligned}$$

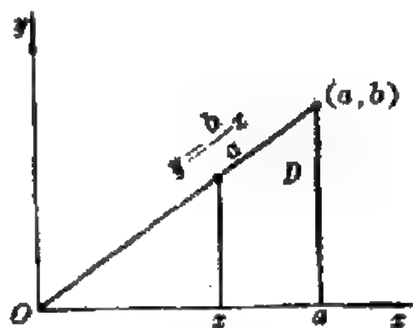


图 51

例 1 计算积分

$$A=\iint_D x^2y^2\,dx\,dy.$$

其中 D 如图 51 所示三角形．

解 应用(1)式，$I=[0, a]$，$D_x=\left[0, \dfrac{b}{a}x\right]$，所以

$$\begin{aligned}A&=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}x} x^2y^2\,dy=\frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\int_0^a x^5\,dx\\&=\frac{1}{18}a^3b^3.\quad\square\end{aligned}$$

例 2 计算积分

$$A=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

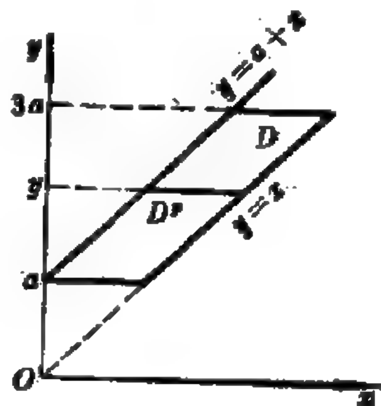


图 52

其中D如图 52 所示.

解 应用(2)式, $J=[a,3a]$, $D^y=[y-a,y]$, 所以

$$\begin{aligned}A&=\int_a^{3a}dy\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\,dx\\&=\int_a^{3a}\left[\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{3}(y-a)^3+ay^2\right]dy\\&=14a^4.\quad\square\end{aligned}$$

例 4 计算积分

$$A=\iint\limits_D y^2\sqrt{1-x^2}\,dx\,dy,$$

其中D是由圆 $x^2+y^2=1$, 正x轴和直线 $y=x$ 围成的集合(图 53).

解 如图 53 将D分为$D=D_1\cup D_2$. 分别计算D_1和D_2上的积分得

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_1} y^2\sqrt{1-x^2}\,dx\,dy&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}dx\int_0^x y^2\sqrt{1-x^2}\,dy\\&=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt2}}x^3\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=\frac{2}{45}-\frac{7}{360}\sqrt2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint\limits_{D_2} y^2\sqrt{1-x^2}\,dx\,dy&=\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^1\sqrt{1-x^2}\,dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}y^2\,dy\\&=\frac{1}{3}\int_{\frac{1}{\sqrt2}}^1(1-x^2)^2\,dx\end{aligned}$$

$$=\frac{8}{45}-\frac{43}{360}\sqrt{2}.$$

所以

$$A=\frac{2}{9}-\frac{5}{36}\sqrt{2}. \quad \square$$

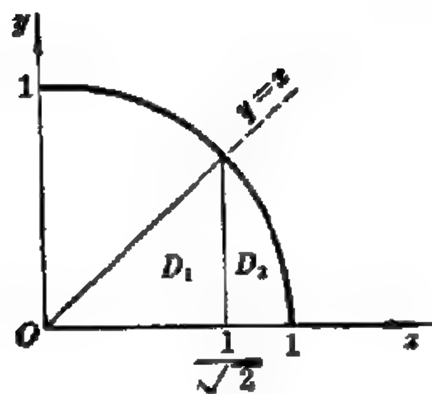


图 53

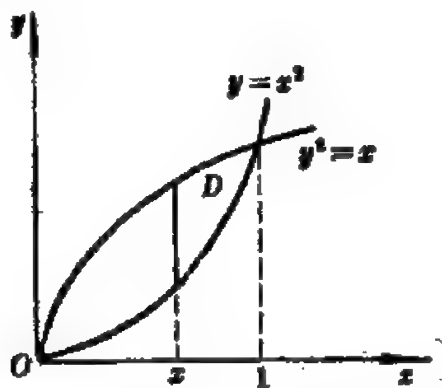


图 54

例 4 用二重积分计算由抛物线 $y=x^2$ 和 $y^2=x$ 围成的面积。

解 如图 54, 由面积定义

$$\sigma(D)=\int_D 1=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{3}. \quad \square$$

例 5 计算由两个圆柱体 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+z^2\leqslant R^2$ 交成的“体积”。

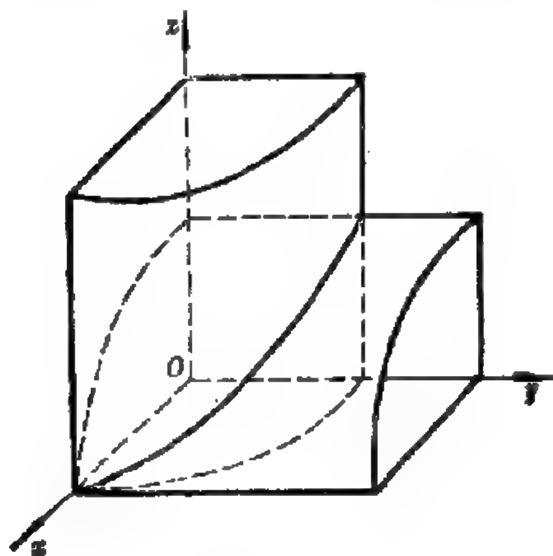


图 55

解 如图 55, 所求之体积为

$$V=8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\x,y\geqslant 0}}\sqrt{R^2-x^2}\,dx\,dy$$

$$=8\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy$$

$$=8\int_0^R(R^2-x^2)\,dx=\frac{16}{3}R^3.\quad\square$$

习　　题

1. 如何对化累次积分作出几何解释?

2. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_D\cos(x+y)\,dxdy$, 　　D 由 $x=0, y=x, y=\pi$ 围成.

(2) $\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dxdy$, 　　D 由 $y=\frac{b}{a}x$, $y=\frac{c}{a}x$, $x=a$ 围成 $(c>b)$.

(3) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, 　　D 由 $y^2=4x$, $x=1$ 围成.

(4) $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy$, 　　$D=\{(x,y):\ |x|+|y|\leqslant 1\}$.

(5) $\iint\limits_D |xy|\,dxdy$, 　　$D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant a^2\}$.

(6) $\iint\limits_D x\cos(xy)^2\,dxdy$, 　　D 同上.

(7) $\iint\limits_D x^2y^2\,dxdy$, 　　D 由 $xy=1, xy=2, y=x, y=4x$ 第一卦限部分围成.

(8) $\iint\limits_D |\cos(x+y)|\,dxdy$, 　　$D=[0,\pi]^2$.

(9) $\iint\limits_D y^2\,dxdy$, D 由摆线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 和 $y=0$ 围成, $a>0$.

3. 改变下列累次积分的次序:

(1) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)\,dy$　　(2) $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$

(3) $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy$　　(4) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy$

(5) $\int_0^\pi dx\int_0^{\cos x} f(x,y)\,dy$　　(6) $\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$

4. 计算下列平面曲线围成的面积:

(1) $xy=a^2$, $x+y=\frac{5}{2}a$　$(a>0)$.

(2) $y^2=2px+p^2$, $y^2=-2qx+q^2$　$(p,q>0)$.

(3) $x=\sin(xy)$,　$y=(x+1)^2\left(\frac{x}{2}+1\right)$, $y=-1$.

5. 计算下列曲面围成的体积:

(1) $x+y+z=a$, 和坐标平面.

(2) $z=x^2+y^2$, $|x|=1$, $|y|=1$.

(3) $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

(4) $z=xy$, $x+y+z=1$, $z=0$.

6. 设函数 f 连续, 证明

$$\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)\,dy=\int_a^b dy\int_y^b f(x,y)\,dx,\quad 0<a<b.$$

7. 设函数 f 连续, 证明

$$\int_0^a dx\int_0^x f(x)f(y)\,dy=\frac{1}{2}\left[\int_0^a f(x)\,dx\right]^2.$$

8. 设函数 f 连续, 证明

$$\int_0^a dx\int_0^x f(y)\,dy=\int_0^a (a-x)f(x)\,dx.$$

9. 设函数 f: $[a,b]\to R$ 非负, 记

$$A_f=\{(x,y)\in R^2:\ a\leqslant x\leqslant b,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\}.$$

证明集合 A_f 有面积的充分必要条件为 f 可积, 这时

$$\sigma(A_f)=\int_a^b f.$$

§1.6 二重积分换元

我们知道, 在适当的条件下, 一元函数的积分有换元公式

$$\int_a^b F(x)dx=\int_\alpha^\beta F(f(t))f'(t)dt. \tag{1}$$

对于二重积分也有类似的公式. 设有方程组

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\quad (u,v)\in\Omega. \tag{2}$$

这就定义了一个映射

$$f=(\varphi,\psi):\quad \Omega\to R^2. \tag{3}$$

这个映射把 uv 平面上的集合 Ω 映成 xy 平面上的集合 $f(\Omega)$. 设 $\Delta\subset\Omega$. 我们要证明, 在一定的条件下, 一个二元函数 F 在集合 $f(\Delta)$上的积分也有类似于(1)的换元公式. 可以预想到, f的Jacobi行列式 $\det Jf$ 将取代(1)式中的 f'. 这是一个极为重要的公式, 但建立起来很不容易.

定理 1 设 $\Omega\subset R^2$ 是一开集, (3)中的映射 $f\in\mathscr{C}^{(1)}$. 如果 $l^-\subset\Omega$, 且 l 是一零面积集, 则 $f(l)$也是零面积集.

证明 因为 l 必须有界, 所以 l^- 有界. 用第五章 § 3.2 习题 18(4), 容易知道存在有界开集 Ω_0 使

$$l^-\subset\Omega_0\subset\Omega_0^-\subset\Omega.$$

于是 l^- 与 $\partial\Omega_0$ 的距离 $\delta=\rho(l^-,\ \partial\Omega_0)>0$(第五章 § 3.2 习题 19 (3)).

任给 $\varepsilon>0$. 因为 l 是零面积集, 由 § 1.4 定理 4 容易明白, 可以作有限个大小相等的正方形区间 $I_1,\cdots,I_n$, $\bigcup_{j=1}^n I_j\supset l$ 且

$$\sum_{j=1}^n\sigma(I_j)<\varepsilon.$$

设诸 I_j 的边长为 $2a$, 于是

$$4na^2<\varepsilon.$$

假定 I_j 的直径都小于 δ, 于是 I_j 均在 Ω_0 中. 我们有

$$f(l)\subset\bigcup_{j=1}^{n}f(I_j). \tag{4}$$

因为 $f\in\mathscr{C}^{(1)}$，所以$\|Jf\|$在紧致集 Ω_0^- 上有界(第五章 § 3.2 定理3的推论)，设其上界为M. 应用拟微分平均值定理(第六章 § 2.4定理 1)便得当 p_j 是 I_j 的中心，$p\in I_j$ 时

$$\|f(p)-f(p_j)\|\leqslant M\|p-p_j\|\leqslant\sqrt{2}Ma.$$

这就是说，$f(I_j)$包含于一个边长为$2\sqrt{2}Ma$，中心在 $f(p_j)$的正方形区间之中. 因此由(4)式 $f(l)$ 包含于 n 个正方形区间之中，它们的面积总和为 $n\cdot4\cdot2M^2a^2<2M^2\varepsilon$. 而 ε 是任意的，所以 $f(l)$ 是一零面积集. □

定理 2 设 $\Omega\subset R^2$ 是一开集，映射(3)满足

1) $f\in\mathscr{C}^{(1)}$;

2) 当 $p\in\Omega$ 时 $\det Jf(p)\neq0$;

3) f 是一单射.

如果有界集Δ满足 $\Delta^-\subset\Omega$，则 $\partial f(\Delta)=f(\partial\Delta)$.

证明 因为 Δ^- 是一紧致集，所以 $f(\Delta^-)$是紧致集（第五章 § 3.2 定理 3）. 又因

$$f(\Delta)\subset f(\Delta^-),$$

所以

$$f(\Delta)^-\subset f(\Delta^-),$$

因此

$$\partial f(\Delta)\subset f(\Delta^-)=f(\Delta^\circ)\cup f(\partial\Delta).$$

但由第六章 § 3.3 定理 2 的注，$f(\Delta^\circ)$是一开集，而

$$f(\Delta^\circ)\subset f(\Delta),$$

所以

$$f(\Delta^\circ)\subset f(\Delta)^\circ,$$

于是得

$$\partial f(\Delta) \subset f(\partial\Delta). \tag{5}$$

另一方面，若 $p \in f(\partial\Delta)$，则有 $t \in \partial\Delta$ 使 $p = f(t)$。于是存在 Δ 中的点列 (t_n) 和 Δ^c 中的点列 (r_n) 使

$$t_n \to t, \ r_n \to t.$$

由 f 的连续性，

$$f(t_n) \to p, \ f(r_n) \to p. \tag{6}$$

但 $f(t_n) \in f(\Delta)$，$f(r_n) \in f(\Delta^c)$，$n = 1, 2, \cdots$；而 f 是一对一的，所以 $f(\Delta^c) \subset f(\Delta)^c$。因此 (6) 式说明 $p \in \partial f(\Delta)$，即 $f(\partial\Delta) \subset \partial f(\Delta)$。定理得证。 □

定理 3 在定理 2 的假设下，如果 $\Delta^- \subset \Omega$，且 Δ 有面积，则 $f(\Delta)$ 也有面积。

证明 因为 Δ^- 是紧致集，所以 $f(\Delta^-)$ 也是紧致集，所以 $f(\Delta) \subset f(\Delta^-)$ 有界。另一方面，由 §1.4 定理 5，$\partial\Delta$ 是零面积集，所以由定理 1 和定理 2，$\partial f(\Delta) = f(\partial\Delta)$ 也是零面积集。再由 §1.4 定理 5，便知 $f(\Delta)$ 有面积。 □

引理 1 设

$$L(u, v) = J\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + c, \quad (u, v) \in R^2.$$

其中 J 是二阶可逆方阵，c 是一个二维列向量。则映射 L 将区间 $I \subset R^2$ 映成平行四边形，面积为

$$\sigma(L(I)) = |\det J| \sigma(I). \tag{7}$$

证明 设 $I = [u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$。令

$$t_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} u_1 - u_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 - v_0 \end{pmatrix}.$$

则 I 可以表示为

$$I = \{t_0 + u u_0 + v v_0: \quad 0 \leqslant u, v \leqslant 1\}$$

(图 56)。于是

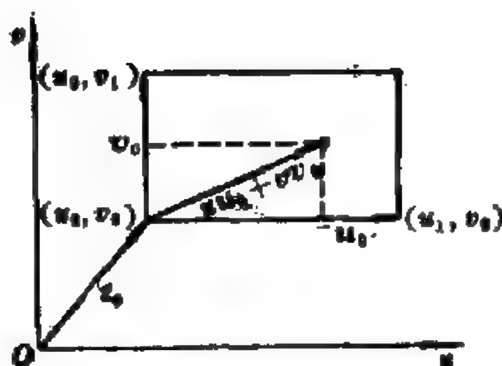


图 56

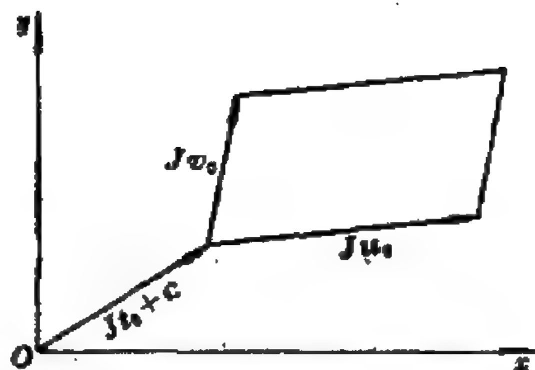


图 57

$$L(I)=\{(Jt_0+c)+uJu_0+vJv_0:\quad 0\leqslant u,v\leqslant 1\}.$$

(图 57). 它的面积就是向量 Ju_0 和 Jv_0 张成的平行四边形的面积，即

$$\sigma(L(I))=\|Ju_0\times Jv_0\|.$$

设

$$J=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix},$$

则

$$Ju_0\times Jv_0=\begin{vmatrix}a_1(u_1-u_0) & b_1(v_1-v_0)\\ a_2(u_1-u_0) & b_2(v_1-v_0)\end{vmatrix}k.$$

所以显见(7)式成立. ］

引理 2 在定理 2 的假设下，设 F 是 $f(\Omega)$ 上的非负连续函数. 任给 $\tau_0\in\Omega$ 和 $\varepsilon>0$, 则存在 τ_0 的邻域 G, 当正方形闭区间 $I\subset G$ 且 $\tau_0\in I$ 时有

$$\int_{f(I)}F\leqslant\int_I F\circ f\,|\det Jf|+\varepsilon\sigma(I).\tag{8}$$

证明 由假设，(8)式两端的被积函数都是连续的，而 $f(I)$ 是有面积(定理 3)的紧致集. 所以(8)式两端的积分都是存在的.

设 $\tau_0\in\Omega$, $\varepsilon>0$. 取两个数 ξ 和 η 都很小使

$$\xi>0,\ 0<\eta<|\det Jf(\tau_0)|,$$

$$[F\circ f(\tau_0)+\eta]|\det Jf(\tau_0)|(1+\xi)^2$$
$$-[F\circ f(\tau_0)-\eta][|\det Jf(\tau_0)|-\eta]<\varepsilon. \tag{9}$$

因为上式右端当 $\xi=\eta=0$ 时为 0, 所以这是可以做到的。

取 τ_0 的邻域 G_1, 当 $\tau\in G_1$ 时

$$|\det Jf(\tau)|>|\det Jf(\tau_0)|-\eta, \tag{10}$$

$$F\circ f(\tau_0)-\eta<F\circ f(\tau)<F\circ f(\tau_0)+\eta. \tag{11}$$

令

$$L(\tau)=f(\tau_0)+Jf(\tau_0)(\tau-\tau_0).$$

因为 $f\in\mathscr{C}^{(1)}$, 所以存在 τ_0 的邻域 $G\subset G_1$, 当 $\tau\in G$ 时

$$\|f(\tau)-L(\tau)\|\leqslant\frac{\xi}{2\sqrt{2}\,\|Jf(\tau_0)^{-1}\|}\|\tau-\tau_0\|. \tag{12}$$

任取正方形闭区间 $I\subset G$, 且 $\tau_0\in I$. 设 I 的边长为 l. 任取 $p\in f(I)$. 于是有 $\tau\in I$ 使 $p=f(\tau)$. 令 $\lambda=L^{-1}(p)$. 于是

$$L(\lambda)-L(\tau)=Jf(\tau_0)(\lambda-\tau),$$

所以

$$\lambda-\tau=Jf(\tau_0)^{-1}[L(\lambda)-L(\tau)].$$

由(12)式便得

$$\begin{aligned}\|\lambda-\tau\|&\leqslant\|Jf(\tau_0)^{-1}\|\|L(\lambda)-L(\tau)\|\\&=\|Jf(\tau_0)^{-1}\|\|f(\tau)-L(\tau)\|\\&<\frac{\xi}{2\sqrt{2}}\|\tau-\tau_0\|.\end{aligned}$$

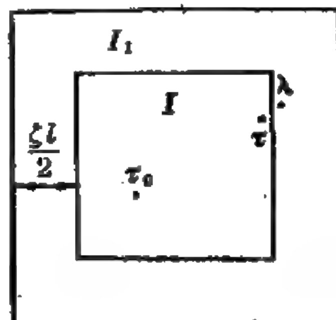


图 58

因为 $\tau,\tau_0\in I$, 所以

$$\|\tau-\tau_0\|\leqslant\sqrt{2}\,l.$$

于是

$$\|\lambda-\tau\|\leqslant\frac{\xi l}{2}.$$

设 I_1 是和 I 同中心的正方形闭区间(图 58), 边长为$(1+\xi)l$, 则由

上式可知 $\lambda\in I_1$. 所以 $p\in L(I_1)$, 因此 $f(I)\subset L(I_1)$. 再由引理 1 (7)式便知

$$\sigma(f(I))\leqslant\sigma(L(I_1))=|\det Jf(\tau_0)|\sigma(I_1)$$
$$=|\det Jf(\tau_0)|(1+\zeta)^2\sigma(I).$$

由此式和(11)式我们有

$$\int_{f(I)}F\leqslant[F\circ f(\tau_0)+\eta]\sigma(f(I))$$
$$\leqslant[F\circ f(\tau_0)+\eta]|\det Jf(\tau_0)|(1+\zeta)^2\sigma(I). \tag{13}$$

另一方面, 由(10)和(11)式, 若 $F\circ f(\tau_0)-\eta\geqslant 0$, 则

$$\int_I F\circ f|\det Jf|\geqslant[F\circ f(\tau_0)-\eta][|\det Jf(\tau_0)|-\eta]\sigma(I).$$

若 $F\circ f(\tau_0)-\eta<0$, 则上式右端为负, 而左端因 F 非负, 所以上式也成立. 再由(13)式和(9)式即知(8)式成立. □

引理 3 在定理 2 的假设下, 设 F 是 $f(\Omega)$ 上的非负连续函数, 则对一切正方形闭区间 $I\subset\Omega$ 有

$$\int_{f(I)}F\leqslant\int_I F\circ f|\det Jf|. \tag{14}$$

证明 (反证)设有正方形闭区间 $I\subset\Omega$ 使(14)式不成立. 令

$$\int_{f(I)}F-\int_I F\circ f|\det Jf|=\alpha,$$

则 $\alpha>0$. 将 I 等分为四个闭区间, 则四个区间中必有一个, 记为 I_1, 使

$$\int_{f(I_1)}F-\int_{I_1}F\circ f|\det Jf|\geqslant\frac{\alpha}{4}.$$

再将 I_1 等分为四个闭区间, 其中又必有一个 I_2 使

$$\int_{f(I_2)}F-\int_{I_2}F\circ f|\det Jf|\geqslant\frac{\alpha}{4^2}.$$

这样我们便得闭区间序列 $I_1\supset I_2\supset\cdots$. 显然 $\operatorname{diam}I_n\to 0$. 因此它

们有唯一的公共点 τ_0(第五章§2.2定理5). 于是, $\tau_0\in\Omega$. 任给 $\varepsilon>0$, 由引理2, 存在 τ_0 的邻域 $G\subset\Omega$ 使(8)式成立. 当 n 充分大时便有 $I_n\subset G$, 于是由(8)式得

$$\varepsilon\sigma(I_n)\geqslant\left|\int_{f(I_n)}F-\int_{I_n}F\circ f\,|\det Jf|\right|\geqslant\frac{\alpha}{4^n}.$$

但 $\sigma(I_n)=\frac{1}{4^n}\sigma(I)$, 所以得

$$\varepsilon\sigma(I)\geqslant\alpha>0.$$

而 ε 是任意的, 这是矛盾. □

定理5(二重积分换元) 在定理2的假设下, 如果集合 Δ 有面积, 且 $\Delta^-\subset\Omega$, F 是 $f(\Omega)$ 上的连续函数, 则

$$\int_{f(\Delta)}F=\int_{\Delta}F\circ f\,|\det Jf|, \tag{15}$$

也就是

$$\iint_{f(\Delta)}F(x,y)\,dx\,dy$$
$$=\iint_{\Delta}F(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|_{(u,v)}du\,dv. \tag{16}$$

证明 因为 Δ^- 有界闭, 所以 $f(\Delta^-)$ 紧致; 而 F 连续, 所以 F 在 $f(\Delta)$ 上连续有界. 又 $f\in\mathscr{C}^{(1)}$, 显见(15)式右端的被积函数也在 Δ 上连续有界. 又 Δ 和 $f(\Delta)$ 都是有面积的集合(定理3), 所以(15)式两端的积分都存在. 以下分两种情况来证明.

(一) 设 F 非负.

因为 Δ^- 有界闭, 如定理1的证明中所指出, 我们可以作出有界开集 Ω_0 使得

$$\Delta^-\subset\Omega_0\subset\Omega_0^-\subset\Omega.$$

记 $|\det Jf|$ 在 Ω_0^- 上的上界为 M, F 在 $f(\Delta)$ 上的上界为 N.

作平行于坐标轴的两族直线将 R^2 分割成大小相等的正方形闭区间，其中与 Δ 相交者构成区间族(图 59)

$$\pi=\{I_1,\cdots,I_n\}.$$

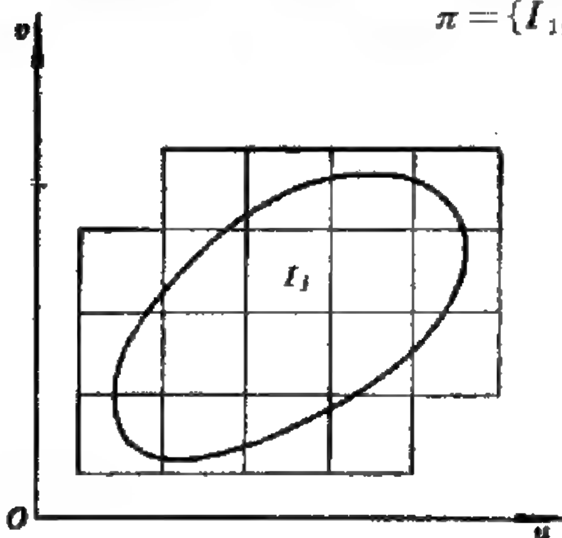


图 59

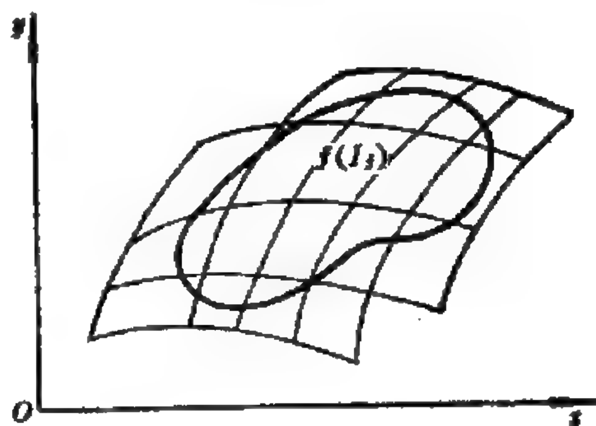


图 60

假定其中 $I_1,\cdots,I_m\subset\Delta$, $I_{m+1},\cdots,I_n$ 均同时含有 Δ 和 Δ^c 中之点. 假定 $\|\pi\|$ 很小，致使 $I_j\subset\Omega_0(j=1,\cdots,n)$. 于是我们得到映像(图 60)

$$f(I_1),\cdots,f(I_n).$$

其中 $f(I_1),\cdots,f(I_m)\subset f(\Delta)$, $f(I_{m+1}),\cdots,f(I_n)$ 均同时含有 $f(\Delta)$ 和 $f(\Delta)^c$ 中之点(注意 f 为一对一的). 这样 $f(\Delta)$ 被分成

$$f(I_1),\cdots,f(I_m),f(I_{m+1}\cap\Delta),\cdots,f(I_n\cap\Delta).$$

它们都有面积(定理 3)，它们只在边界上相交(定理 2)，因此相交成零面积集.

因为 F 非负，由引理 3 (14)式便得

$$\sum_{j=1}^m\int_{f(I_j)}F\leqslant\sum_{j=1}^m\int_{I_j}F\circ f|\det Jf|. \tag{17}$$

另一方面

$$\int_{f(\Delta)}F=\sum_{j=1}^m\int_{f(I_j)}F+\sum_{j=m+1}^n\int_{f(I_j\cap\Delta)}F=\Sigma_1+\Sigma_2,$$

$$\int_\Delta F\circ f|\det Jf|$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\int_{I_j} F\circ f|\det Jf| + \sum_{j=m+1}^{n}\int_{I_j\cap\Delta} F\circ f|\det Jf|$$

$$=\Sigma_1' + \Sigma_2'.$$

但由引理 3 又有

$$\Sigma_2 \leqslant N\sum_{j=m+1}^{n}\int_{f(I_j)} 1 \leqslant N\sum_{j=m+1}^{n}\int_{I_j}|\det Jf|$$

$$\leqslant MN\sum_{j=m+1}^{n}\sigma(I_j),$$

$$\Sigma_2' \leqslant MN\sum_{j=m+1}^{n}\sigma(I_j).$$

再由 § 1.4 定理 4 即知

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\Sigma_2 = \lim_{\|\pi\|\to 0}\Sigma_2' = 0.$$

所以

$$\int_{f(\Delta)} F = \lim_{\|\pi\|\to 0}\Sigma_1, \quad \int_{\Delta} F\circ f|\det Jf| = \lim_{\|\pi\|\to 0}\Sigma_1'.$$

因此在(17)式中令$\|\pi\|\to 0$便得

$$\int_{f(\Delta)} F \leqslant \int_{\Delta} F\circ f|\det Jf|.$$

对函数 $F\circ f|\det Jf|$ 和映射 f^{-1} 在集合 $f^{-1}(f(\Delta))=\Delta$ 上再应用这一不等式, 根据第六章 § 3.3(2) 式又得

$$\int_{\Delta} F\circ f|\det Jf| \leqslant \int_{f(\Delta)} F\circ f\circ f^{-1}|(\det Jf)\circ f^{-1}|\,|\det Jf^{-1}|$$

$$=\int_{f(\Delta)} F.$$

所以对于非负函数换元公式(15)成立.

(二) 如果 F 不是非负的, 则

$$F = F^{+} - F^{-}, \tag{18}$$

其中

$$F^{+}(p)=\max(F(p),0),\quad F^{-}(p)=-\min(F(p),0).$$

因为F在$f(\Omega)$上连续，所以F^{+}和F^{-}在$f(\Omega)$上也都连续．而F^{+}和F^{-}均是非负，由(一)中所证有

$$\int_{f(\Delta)}F^{+}=\int_{\Delta}F^{+}\circ f\,|\det Jf|,$$

$$\int_{f(\Delta)}F^{-}=\int_{\Delta}F^{-}\circ f\,|\det Jf|.$$

两式相减，由(18)式即知对于F换元公式(15)成立． □

例1　设D是由四支抛物线

$$y^2=px,\ y^2=qx,\ x^2=ay,\ x^2=by$$

围成的集合(图61)，其中$0<p<q$，$0<a<b$．试计算D的面积和积分

$$\iint_D xy\,dx\,dy.$$

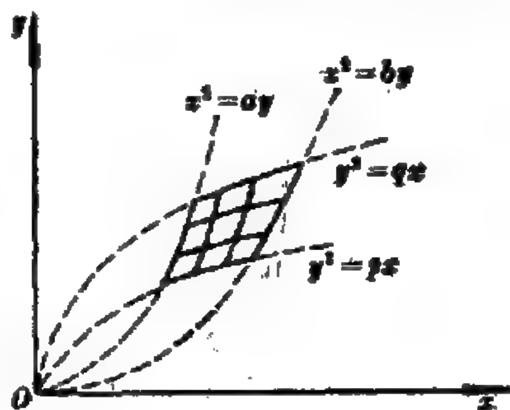


图　61

解　在D中引入两族抛物线

$$y^2=ux,\quad x^2=vy.\qquad(19)$$

当u从p变到q，v从a变到b时两族抛物线交织成集合D．由(19)解得

$$x=(uv^2)^{1/3},\quad y=(u^2v)^{1/3}.$$

此式定义了一个从uv平面到xy平面的映射，这个映射把uv平面上的区间$\Delta=[p,q]\times[a,\ b]$映成$xy$平面上的集合$D$．它在一个包含$\Delta$的开集$\Omega=\{(u,v):\ u,v>0\}$上是一对一的，且属于$\mathscr{C}^{(1)}$．我们在第六章§3.3例2中已经算得在$\Omega$上

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{3}\neq 0.$$

因此我们可以应用换元公式(16)．在(16)中取$F=1$得

$$\sigma(D)=\iint_{\Delta}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=\frac{1}{3}\sigma(\Delta)=\frac{1}{3}(q-p)(b-a).$$

再令 $F(x,y)=xy$ 得

$$\iint_{D}xy\,dx\,dy=\frac{1}{3}\iint_{\Delta}(uv^2)^{1/3}(u^2v)^{1/3}du\,dv$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\Delta}uv\,du\,dv=\frac{1}{3}\int_p^q u\,du\int_a^b v\,dv$$

$$=\frac{1}{12}(q^2-p^2)(b^2-a^2).\quad \square$$

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 换元公式(15)在哪些条件下成立?

(2) 在换元公式(15)中,如果映射 f 不是单射,则会出现什么现象?

2. 计算下列积分:

(1) $\iint_D (x-y)^2\sin(x+y)dxdy$, D 由顶点为 $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$, $(0,\pi)$ 的平行四边形围成.

(2) $\iint_D (x+y)dxdy$, D 由曲线 $y^2=2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ 围成.

(3) $\iint_D 4xydxdy$, D 由曲线 $x=y$, $x=-y$, $(x+y)^2-x-y=1$ 围成.

(4) $\iint_D xydxdy$, D 由曲线 $xy=a$, $xy=b$, $y^2=cx$, $y^2=dx$ 在第一卦限内围成。

(5) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, D 由曲线 $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=2$, $xy=1$, $xy=2$ 围成.

(6) $\iint_D xdxdy$, D 由曲线 $x=-y^2$, $x=2y-y^2$, $x=2-2y-y^2$ 围成.

(7) $\iint_D (x-y^2)dxdy$, D 由曲线 $y=2$, $y^2-y-x=0$, $y^2+2y-x=0$ 围成.

(8) $\iint\limits_D e^{(y-x)/(y+x)}dxdy,\ D=\{(x,y):\quad x+y\leqslant 2,\ x,y\geqslant 0\}$.

3. 计算由下列曲线围成的面积:

(1) $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1,\ a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

(2) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a},\quad x=0,\ y=0$.

4. 证明

(1) $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)dxdy=\int_{-1}^{1}f(u)du$.

(2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)dxdy=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-u^2}f(u\sqrt{a^2+b^2}+c)du,\ a^2+b^2\neq 0$.

(3) $\iint\limits_D f(xy)dxdy=\ln 2\int_1^2 f(u)du$, D 由曲线 $xy=1,\quad xy=2,\ y=x,\ y=4x$ 在第一卦限内围成.

5. 仔细观察我们关于积分换元问题的研究，除一个问题外全部与维数无关. 因此欲知换元公式(15)在 R^n 中也成立, 只须解决什么问题?

§ 1.7 极坐标换元

现在我们要讨论二重积分的一个特殊换元——极坐标换元，即由方程

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi \tag{1}$$

定义的映射. 这是我们在解析几何中已经熟知的映射，它把 $r\varphi$ 平面上的直线 $r=r_0$ 和 $\varphi=\varphi_0$ 分别映成 xy 平面上的圆和射线. 我们把这个映射记为 $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}(r,\varphi)=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi),$$

它在整个 $r\varphi$ 平面上有定义, 把整个 $r\varphi$ 平面映成整个 xy 平面. 但存在如下问题: 它一方面严重地失去一对一性，例如，它把区间 $[0,+\infty)\times[0,2\pi)$ 和 $[0,+\infty)\times[2\pi,4\pi)$ 都映成整个 xy 平面; 另一方面它的 Jacobi 行列式

$$\det J\boldsymbol{P}(r,\varphi)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r \qquad (2)$$

当 $r=0$ 时为 0. 因此，为了满足 §1.6 定理 2 的条件，我们暂先考虑开区间

$$\Omega=(0,+\infty)\times(0,2\pi).$$

在此 Ω 上，$\boldsymbol{P}$ 满足 §1.6 定理 2 的全部条件。因此，如果 $\Delta^{-}\subset\Omega$，且 Δ 有面积，则换元公式 § 1.6(15)成立，其中 Jacobi 行列式为(2).

但又有一个问题，即 $\boldsymbol{P}(\Omega)$ 不再是整个 R^2，它是 xy 平面除去原点和正 x 轴，而 $\boldsymbol{P}(\Omega^{-})=R^2$. 因此，如果 xy 平面上的集合 D 含有原点或与正 x 轴相交(例如 D 是以原点为中心的圆域)，则就不存在 $\Delta\subset\Omega$ 使 $\boldsymbol{P}(\Delta)=D$; 只存在 $\Delta\subset\Omega^{-}$ 使 $\boldsymbol{P}(\Delta)=D$. 欲计算 D 上的积分，能否应用换元公式 § 1.6(15)呢？下面的定理作了肯定的回答。

定理 1 如果 $\Delta\subset\Omega^{-}$ 有面积，则 $\boldsymbol{P}(\Delta)$ 有面积；这时，如果函数 F 在 R^2 上连续，则

$$\iint\limits_{\boldsymbol{P}(\Delta)}F(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{\Delta}F(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,rdrd\varphi \qquad (3)$$

证明 因为 $\boldsymbol{P}\in\mathscr{C}^{(1)}(R^2)$，所以 § 1.6 定理 1 成立：若 $l\subset\Omega^{-}$ 为零面积集，则 $\boldsymbol{P}(l)$ 也为零面积集。但 § 1.6 定理 2 不成立。例如，$\boldsymbol{P}$ 把区间 $I_0=[0,r_0]\times[0,2\pi]$ 映成以原点为中心，以 r_0 为半径的圆盘 B_0，但 I_0 的边界 $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ 和 $r=0$ 映到了 B_0 的内部. 然而，观察 § 1.6(5)式，它的成立无须 f 是单射，只须 $\det Jf$ 在 $\Delta^{\circ}\subset\Omega$ 上处处不为零，所以

$$\partial\boldsymbol{P}(\Delta)\subset\boldsymbol{P}(\partial\Delta)$$

是成立的. 因此 § 1.6 定理 3 也成立：若 $\Delta\subset\Omega^{-}$ 有面积，则 $\boldsymbol{P}(\Delta)$ 也有面积.

考虑Ω中的区间(图 62)

$$I_\varepsilon=[\varepsilon,+\infty)\times[\varepsilon,2\pi-\varepsilon],$$

其中 $0<\varepsilon<2\pi$，则 $P(I_\varepsilon)$为图 63 中非阴影部份。因为 $(\Delta\cap I_\varepsilon)^-$

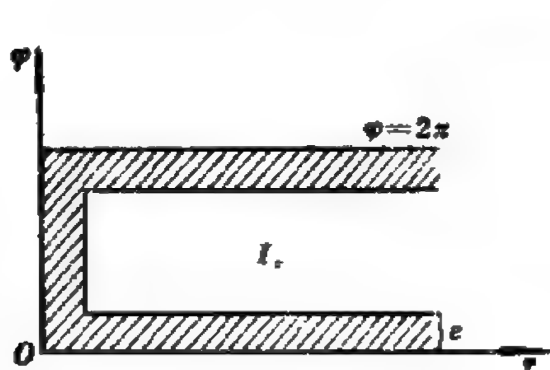


图 62

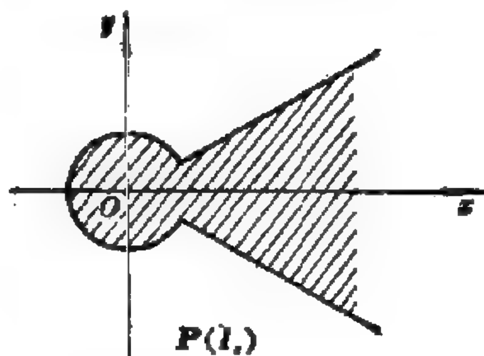


图 63

$\subset\Omega$(图 64)，所以§1.6 换元公式(15)在 $\Delta\cap I_\varepsilon$ 上成立，即(3)式在 $\Delta\cap I_\varepsilon$ 上成立：

$$\int\limits_{P(\Delta\cap I_\varepsilon)}F=\iint\limits_{\Delta\cap I_\varepsilon}F(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi. \tag{4}$$

而

$$\int\limits_{P(\Delta)}F=\int\limits_{P(\Delta\cap I_\varepsilon)}F+\int\limits_{P(\Delta\cap I_\varepsilon^c)}F,$$

$$\iint\limits_{\Delta}F(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

$$=\iint\limits_{\Delta\cap I_\varepsilon}+\iint\limits_{\Delta\cap I_\varepsilon^c}F(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

但 F 在$P(\Delta)$上有界($P(\Delta)^-$ 是紧致集)，Δ中的横坐标 r 也有界(Δ有界)，所以易见当 $\varepsilon\to0$ 时下列式子成立(图 65)：

$$\left|\int\limits_{P(\Delta\cap I_\varepsilon^c)}F\right|\leqslant M\sigma(P(\Delta\cap I_\varepsilon^c))\to0,$$

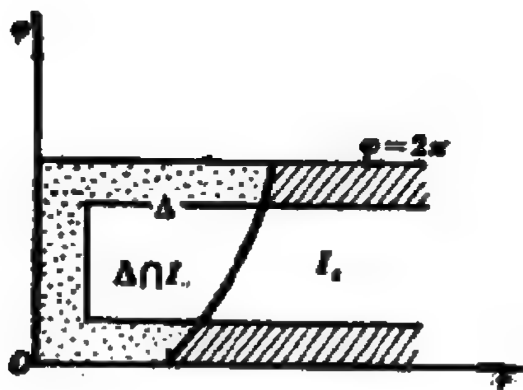


图 64

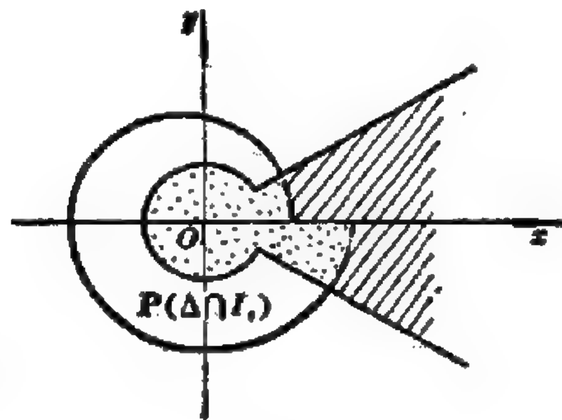


图 65

$$\left|\iint\limits_{\Delta\cap I_\varepsilon^c} F(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi\right| \leqslant MR\sigma(\Delta\cap I_\varepsilon^c)\to 0.$$

因此，在(4)式中令 $\varepsilon\to 0$ 即得(3)式. □

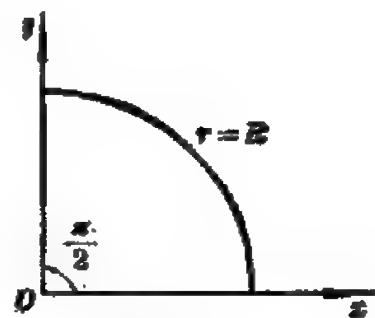


图 66

例 1 计算积分

$$A=\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x,y\geqslant 0}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

解 用极坐标换元 (1). 由图66 易见 (1)把 $r\varphi$ 平面上的区间$[0,R]\times[0,\frac{\pi}{2}]$映成题中的积分域。由(3)式,

$$A=\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant R\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}} e^{-r^2}rdrd\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^R e^{-r^2}rdr$$

$$=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}). \quad □$$

例 2 计算积分

$$A=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\ 0\leqslant y\leqslant a}} (x^2+y^2)^{1/2}dxdy.$$

解 用极坐标换元. 将积分域如图 67 分成 D_1 和 D_2 两个集

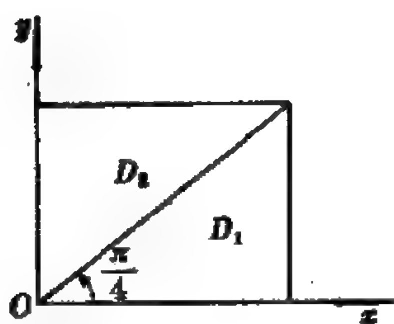


图 67

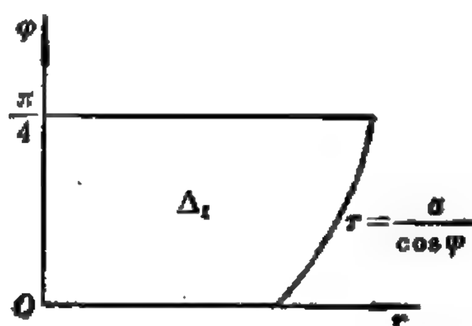


图 68

合。易见 D_2 上的积分与 D_1 上的相等. 在 D_1 上, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$. 又直线 $x=a$ 的极坐标方程是 $r=a/\cos\varphi$. 因此 D_1 的对应集合 Δ_1 如图 68. 由(3)式,

$$
\begin{aligned}
A &= 2\iint_{D_1}(x^2+y^2)^{1/2}dxdy = 2\iint_{\Delta_1} r^2 dr d\varphi \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a/\cos\varphi} r^2 dr \\
&= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\varphi}{\cos^3\varphi} \\
&= \frac{2a^3}{3}\left(\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}+\frac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{a^3}{3}\left(\sqrt{2}+\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}\right). \quad \square
\end{aligned}
$$

例 3 球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 被柱面 $x^2+y^2=ax$ 所截, 求截下的体积.

解 图 69 中是截下的第一象限部份, 这是以 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 为顶盖, 以半圆 D(图 70)为底的柱体. 由对称性, 所求体积为

$$
V = 4\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy.
$$

用极坐标换元来计算. 由图 70 可见

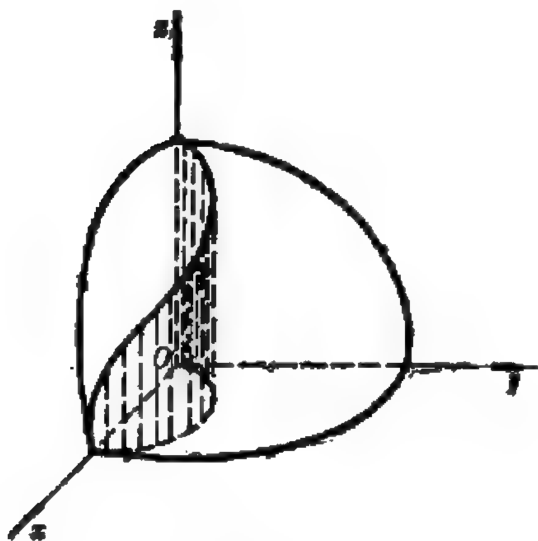


图 69

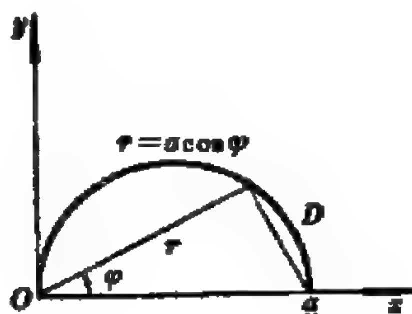


图 70

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr$$

$$= \frac{4a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)a^3. \quad \square$$

例 4 计算积分

$$A = \iint_D \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, dxdy,$$

其中 $D = \left\{(x, y):\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$.

解 先作换元

$$\frac{x}{a} = u, \quad \frac{y}{b} = v.$$

于是由§1.6(16)所求积分为

$$A = ab \iint_{u^2+v^2\leqslant 1} \sqrt{u^2 + v^2}\, dudv.$$

再作极坐标换元即得

$$A = ab\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \frac{2}{3}ab\pi. \quad \square$$

注 利用例 1 可以计算一个非常重要的广义积分，常称"概率积分"：

$$I=\int_{0}^{+\infty}e^{-x^2}dx. \tag{5}$$

因为

$$\begin{aligned}I^2&=\lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^A e^{-x^2}dx\right)^2\\&=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-x^2}dx\cdot\int_0^A e^{-y^2}dy\\&=\lim_{A\to+\infty}\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant A\\0\leqslant y\leqslant A}}e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\lim_{A\to+\infty}I_A.\end{aligned}$$

由图 71 可知

$$\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant A^2\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}e^{-(x^2+y^2)}dxdy\leqslant I_A\leqslant\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 2A^2\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0}}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

于是由例 1 便得

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-A^2})\leqslant I_A\leqslant\frac{\pi}{4}(1-e^{-2A^2}).$$

所以

$$\lim_{A\to+\infty}I_A=\frac{\pi}{4},$$

即得

$$I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\ \square$$

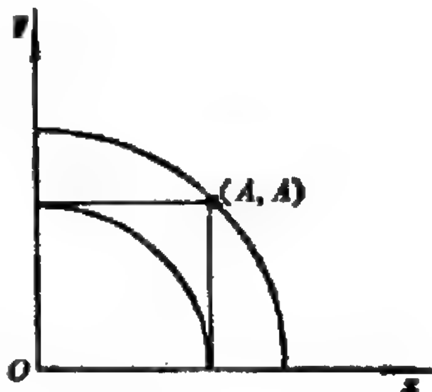


图 71

习 题

1. 回答下列问题：

(1) 对极坐标换元为什么不能直接应用换元公式 §1.6(15)；

(2) 极坐标换元公式(3)在哪些条件下成立?

2. 试对积分 $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ 作极坐标换元, 设

(1) $D=\{(x, y):\quad a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$.

(2) $D=\{(x, y):\quad x^2+y^2\leqslant ax\}$, 其中 $a>0$.

(3) $D=\{(x, y):\quad x+y\leqslant 1, x, y\geqslant 0\}$.

(4) $D=\{(x, y):\quad |x|\leqslant a, \dfrac{x^2}{a}\leqslant y\leqslant a\}$.

(5) D 由曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\geqslant 0)$ 围成。

3. 计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_{\pi^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\pi^2} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.

(2) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant Rx} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy$.

(3) $\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant 1\\ x, y\geqslant 0}} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}dxdy$.

(4) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant x+y} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$.

(5) $\iint\limits_D \sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, $D=\{(x, y):\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 4, y\leqslant x, x, y\geqslant 0\}$.

4. 试用广义积分(5)计算积分

$$\iint\limits_{R^2} e^{4xy-2y-4x^2-2y^2-1}dxdy.$$

5. 计算下列曲线围成的面积:

(1) $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\dfrac{y}{a}\right)^{2/3}=1$.

(2) $(x^2-y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$, $x^2+y^2\geqslant a^2$.

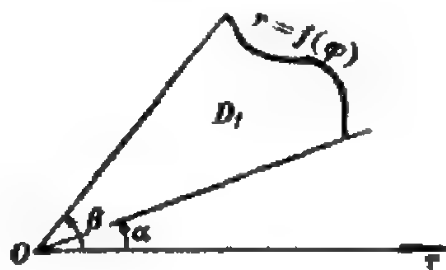


图 72

6. 设函数 f: $[\alpha, \beta]\to R$ 连续, r, φ 是极坐标. 证明扇形(图 72)

$$D_f=\{(r, \varphi):\quad 0\leqslant r\leqslant f(\varphi), \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\}$$

面积为

$$\sigma(D_f)=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi.$$

7. 计算下列曲面围成的体积:

(1) $z^2=xy$, $x^2+y^2=a^2$.

(2) $z=x^2+y^2$, $z=x+y$.

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z}{c}=1$, $z=0$.

第二节 三 重 积 分

§2.1 化累次积分

在第一节中我们已经详细地讨论了二重积分的基本内容，并且指出，多元函数的重积分在概念和理论上都与二重积分一样。因此本节着重讨论三重积分的计算方法，最后再简单地举两个 n 重积分的计算实例.

三重积分有一个具体的物理背景. 设在 R^3 中有一个具有质量的立体 V，考虑 V 中的小块立体 U，其上的质量记为 $m(U)$，它的体积记为 $v(U)$，则 $\frac{m(U)}{v(U)}$ 就是 U 中的平均质量. 如果当 U 收缩为一点 p 时有有限的极限

$$\lim_{\substack{\mathrm{diam}\,U\to 0\\ p\in U}}\frac{m(U)}{v(U)}=\rho(p),$$

则 $\rho(p)$ 就叫做 V 上的质量分布在 p 点的"密度". 如果 V 中每一点都有密度，则就得一定义在 V 上的函数 ρ. 这个密度函数 ρ 便刻画了 V 上的质量分布状态。我们的问题是，已知密度函数 ρ，如何计算质量 $m(V)$. 不言而喻，这可以应用定积分的"化整为零"的求和方法，即 $m(V)$ 是无限细分的极限:

$$m(V)=\lim\Sigma\rho(p_i)v(U_i).$$

此即是 ρ 在 V 上的"体积分"或"三重积分". 和二重积分一样，这个积分一般表示为

$$\int_V \rho = \int_V \rho dv = \iiint\limits_V \rho(x, y, z)\, dxdydz.$$

下面我们先对三重积分简要地概述一下 §1.1 至 §1.4 中的内容. R^3中的闭区间就是

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$
$$= \{(x, y, z,) \in R^3;\quad a_1 \leqslant x \leqslant b_1, a_2 \leqslant y \leqslant b_2, a_3 \leqslant z \leqslant b_3\}.$$

它的"体积"定义为

$$v(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3).$$

函数 f 在 I 上可积和积分的定义与二重积分相同 (§1.1 定义 1). 若 f 在 I 上可积, 则 f 在 I 上有界.

代替零面积集的是零体积集. 零体积集的定义与零面积集相同(§1.1定义 2). 若$K \subset R^2$ 是一紧致集, f: $K \to R$ 连续, 则集合 f是一零体积集. 若 Σ 是定义在凸紧致集上的光滑参数曲面, 则Σ 也是一零体积集. 若 f: $I \to R$ 有界, 其间断点集是零体积集, 则 f 可积.

如果 $V \subset R^3$ 是一有界集, f: $V \to R$. 则积分

$$\int_V f$$

的定义与 §1.4 定义 1 相同. 同样定义 V 的体积为

$$\sigma(V) = \int_V 1.$$

§1.4 中的全部内容在此都成立.

现在我们再讲三重积分化累次积分. 区间上化累次积分和二重积分相同: 设函数 f 在闭区间 $I = I_1 \times I_2 \times I_3$ 上可积. 如果对于每一个$(x, y) \in I_1 \times I_2$, 函数 $f(x, y, \cdot)$在区间 I_3 上可积, 则

$$\int_I f = \iint\limits_{I_1 \times I_2} dxdy \int_{I_3} f(x, y, z) dz. \tag{1}$$

如果对于每一个 $z \in I_3$, 函数 $f(\cdot, \cdot, z)$在区间 $I_1 \times I_2$上可积, 则

$$\int_I f=\int_{I_3} dz\iint\limits_{I_1\times I_2} f(x,y,z)dxdy. \tag{2}$$

有界集上化累次积分实质上也和二重积分相同，这就是下面的定理.

定理1 设$V\subset R^3$有体积(V为有界,$v(\partial V)=0$)，f: $V\to R$连续有界.

1° 设V在xy平面上的垂直投影为D(图73)，且当$(x,y)\in D$时截$V_{x,y}$是区间(可以退化为一点)，则

$$\int_V f=\iint\limits_D dxdy\int_{V_{x,y}} f(x,y,z)dz. \tag{3}$$

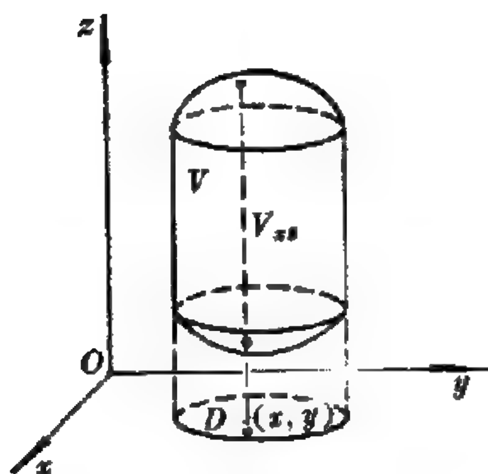


图 73

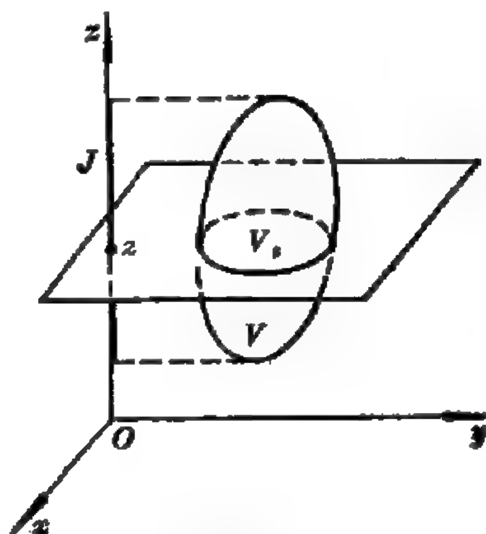


图 74

2° 设V在z轴上的垂直投影为区间J(图74)，且当$z\in J$时截V_z有面积，则

$$\int_V f=\int_J dz\iint\limits_{V_z} f(x,y,z)dxdy. \tag{4}$$

证明 由所设，f在V上可积(§1.4定理1)．作闭区间$I=I_1\times I_2\times I_3\supset V$，其中$I_1, I_2, I_3$都是一维闭区间．令

$$f_V(p)=\begin{cases}f(p), & p\in V,\\ 0, & p\overline{\in} V.\end{cases}$$

则由 §1.4 定义 1，

$$\int_V f=\int_I f_V.$$

1° 当$(x,y)\in D$时，函数$f(x,y,\cdot)$在$V_{x,y}$上连续有界，所以可积. 由 §1.4 定义 1，

$$\int_{I_3} f_V(x,y,z)dz=\int_{V_{x,y}} f(x,y,z)dz.$$

当$(x,y)\overline{\in} D$时，$f_V(x,y,\cdot)=0$，所以

$$\int_{I_3} f_V(x,y,z)dz=0.$$

再由(1)式和 §1.4 定义 1 便得

$$\int_V f=\int_I f_V=\iint\limits_{I_1\times I_2} dxdy\int_{I_3} f_V(x,y,z)dz$$

$$=\iint\limits_{D} dxdy\int_{V_{x,y}} f(x,y,z)dz.$$

2° 当$z\in J$时，$V_z\subset I_1\times I_2$，$\sigma(\partial V_z)=0$，又函数$f(\cdot,\cdot,z)$在V_z上连续有界，由 §1.4 定理 1，$f(\cdot,\cdot,z)$在V_z上可积；且由 §1.4 定义 1，

$$\iint\limits_{I_1\times I_2} f_V(x,y,z)\,dxdy=\iint\limits_{V_z} f(x,y,z)dxdy.$$

当$z\overline{\in} J$时，$f_V(\cdot,\cdot,z)=0$，所以

$$\iint\limits_{I_1\times I_2} f_V(x,y,z)dxdy=0.$$

再由(2)式和 §1.4 定义 1 便得

$$\int_V f=\int_I f_V=\int_{I_3} dz\iint\limits_{I_1\times I_2} f_V(x,y,z)dxdy$$

$$=\int_J dz\iint\limits_{V_z} f(x,y,z)dxdy. \quad \square$$

例 1　计算积分

$$A=\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3},$$

其中 $V=\{(x,y,z):\quad x+y+z\leqslant 1,\ x,y,z\geqslant 0\}$（图 75）。

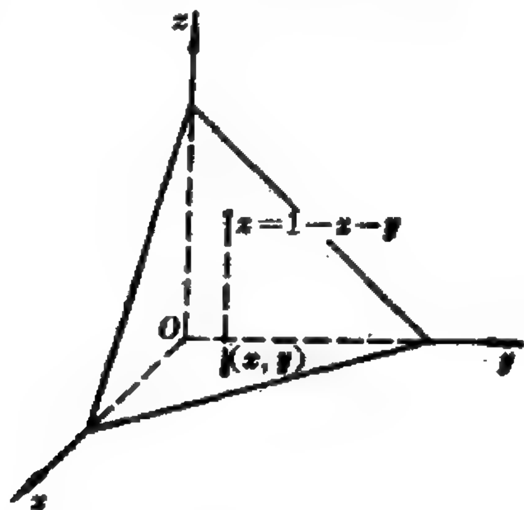


图 75

解　如图 75，V 在 xy 平面上的投影为三角形区域

$$D=\{(x,y):\quad x+y\leqslant 1,\ x,y\geqslant 0\}.$$

当 $(x,y)\in D$ 时 $V_{x,y}=\{z:\quad 0\leqslant z\leqslant 1-x-y\}$. 用(3)式计算，

$$\begin{aligned}A&=\iint_D dxdy\int_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}\\&=\iint_D\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dxdy\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]dy\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{3-x}{4}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).\quad\square\end{aligned}$$

例 2　计算积分

$$A=\iiint_V z\,dxdydz,$$

其中V是由锥面$R^2z^2=h^2(x^2+y^2)$和平面$z=h$围成的集合(图76).

解 用两种方法计算.

1. V在xy平面上的投影为圆域

$$D=\{(x,y):\quad x^2+y^2\leqslant R^2\}.$$

当$(x,y)\in D$时

$$V_{x,y}=\left[\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2},h\right].$$

由(3)式

$$A=\iint\limits_D dxdy\int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} zdz$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[h^2-\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\pi R^2h^2-\frac{h^2}{2R^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r^3dr$$

$$=\frac{1}{4}\pi R^2h^2.$$

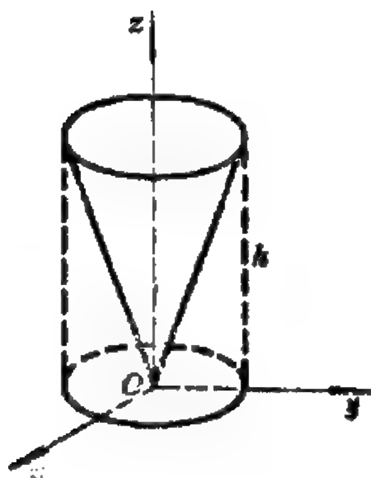


图 76

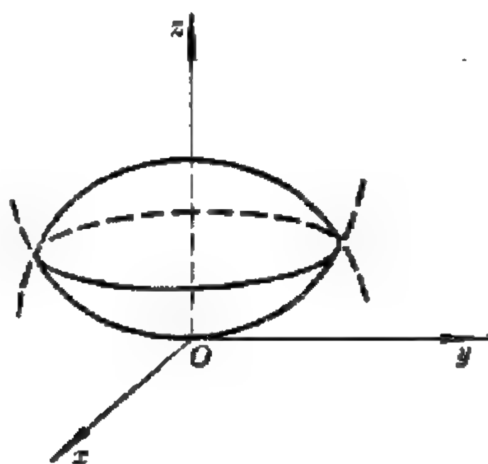


图 77

2. V在z轴上的投影为$[0,h]$, 当$z\in[0,h]$时

$$V_z=\left\{(x,y):\quad x^2+y^2\leqslant\left(\frac{Rz}{h}\right)^2\right\}.$$

由(4)式

$$A=\int_0^h zdz\iint\limits_{V_z}dxdy=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^3dz$$

$$=\frac{1}{4}\pi R^2h^2.\quad \square$$

例 3 计算由两个球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和 $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ 相交成的体积(图 77).

解 记二球面相交成的立体为V. 易知二球面的交线位于平面$z=\frac{R}{2}$上,它等分立体V. 所以我们只要计算第一个球面在平面$z=\frac{R}{2}$上方的球冠体积. 因为当$z\in\left[\frac{R}{2},R\right]$时

$$V_z=\{(x,y):\quad x^2+y^2\leqslant R^2-z^2\},$$

故由(4)式所求体积为

$$v(V)=\iiint\limits_V dxdydz=2\int_{R/2}^R dz\iint\limits_{V_z}dxdy$$

$$=2\pi\int_{R/2}^R(R^2-z^2)\,dz$$

$$=\frac{5}{12}\pi R^3.\quad \square$$

习　　题

1. 三重积分化累次积分有哪两种方法?

2. 计算下列积分:

(1) $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, V 为球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 在第一卦限部份。

(2) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, V 由 $x^2+y^2=2z$ 和 $z=2$ 围成.

(3) $\iiint\limits_V zdxdydz$, V 由 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=z^2$ 在第一卦限围成。

(4) $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$, V 由 $z=xy$, $z=0$, $x=-1$, $x=1$, $y=2$, $y=3$ 围成。

(5) $\iiint\limits_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, V 由 $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$ 围成。

3. 计算下列曲面围成的体积:

(1) $z^2=x^2+\dfrac{y^2}{4}$, $2z=x^2+\dfrac{y^2}{4}$.

(2) $z=2-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

(3) $z=x^2+y^2$, $z=2(x^2+y^2)$, $y=x$, $y=x^2$.

(4) $x^2+z^2=a^2$, $|x|+|y|=a$.

4. 设函数 f: $[a,b]\to R$ 连续. 将曲线 $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ 绕 x 轴旋转一周围成一旋转体 V_f. 证明 V_f 的体积为

$$v(V_f)=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

现将半径为 a 的圆绕一轴旋转一周得一环面, 试计算环面所围成的体积, 设圆心至旋转轴的距离 $b>a$.

5. 记 $I_t=[0,t]^3$, 令

$$F(t)=\iiint\limits_{I_t} f(xyz)\,dx\,dy\,dz,\quad t>0.$$

其中 f 有连续导函数. 证明

$$F'(t)=\frac{3}{t}\left[F(t)+\iiint\limits_{I_t} xyzf'(xyz)\,dx\,dy\,dz\right].$$

6. 设函数 f 连续, 证明

$$\int_a^b dx\int_a^x dy\int_a^y f(x,y,z)dz=\int_a^b dz\int_z^b dy\int_y^b f(x,y,z)dx.$$

7. 设函数 f 连续, 证明

$$\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y f(x)f(y)f(z)dz=\frac{1}{3!}\left[\int_0^a f(x)dx\right]^3.$$

8. 设函数 f 连续, 证明

$$\int_0^a dx\int_0^x dy\int_0^y f(z)dz=\frac{1}{2}\int_0^a (a-z)^2f(z)dz.$$

9. 设 Σ 是定义在凸紧致集上的光滑参数曲面, 证明 Σ 是一零体积集.

§2.2 三重积分换元

§1.6 中的换元公式(15)或(16)，其证明方法与空间的维数是完全无关的.因此它在一切欧氏空间 R^n 中都成立，当然对于三重积分也成立. 现在我们仅给出三重积分换元公式的叙述. 设有换元

$$x=\varphi(u,v,w),\ y=\psi(u,v,w),\ z=\chi(u,v,w),$$
$$(u,v,w)\in\Omega \tag{1}$$

这也就是一个映射

$$f=(\varphi,\psi,\chi):\quad \Omega\to R^3. \tag{2}$$

定理 1 设$\Omega\subset R^3$ 是一开集,映射(2)满足

1) $f\in\mathscr{C}^{(1)}$;

2) $\det Jf(u,v,w)\neq 0,\quad (u,v,w)\in\Omega$;

3) f 是一单射.

如果 $\bar{\Delta}\subset\Omega$, Δ有体积,则 $f(\Delta)$也有体积;这时如果 F: $f(\Omega)\to R$ 连续,则

$$\iiint\limits_{f(\Delta)}F(x,y,z)\,dxdydz$$
$$=\iiint\limits_{\Delta}F(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))$$
$$|\det Jf(u,v,w)|\,dudvdw. \tag{3}$$

相应于极坐标换元,在 R^3 中有球坐标换元:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta. \tag{4}$$

我们知道.固定 r 时这是球面参数方程(第五章 §1.2 例 2)，其中 r,θ,φ 的几何意义如图 78 所示. 我们把(4)式定义的映射记为S:

$$S(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta). \tag{5}$$

它实际上在整个 R^3 中有定义. 固定 $r>0$，得到 $r\theta\varphi$ 空间中的一

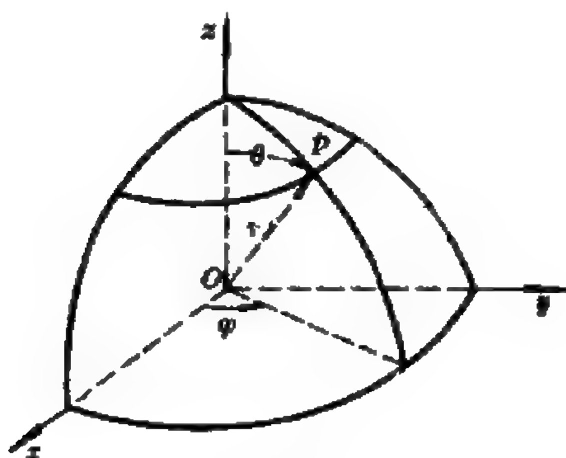


图 78

张平行于坐标平面 $O\theta\varphi$ 的平面，$\boldsymbol{S}$ 把这一张平面映成 xyz 空间中以原点为中心，以 r 为半径的球面．同样，固定 φ 也得坐标平面的平行平面，$\boldsymbol{S}$ 把它映成以 z 轴为边界的半张平面，它与 x 轴的夹角为 φ．固定 θ 也得一张坐标平面的平行平面，$\boldsymbol{S}$ 把它映成以 z 轴为中心轴的锥面，母线与 z 轴的夹角为 θ．以上三张曲面的交点 $\boldsymbol{p}$ 就是点 (r,θ,φ) 的像：$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{S}(r,\varphi,\theta)$．我们把 (r,θ,φ) 叫做 $\boldsymbol{p}$ 点的"球坐标"．如同极坐标换元 $\boldsymbol{P}$ 一样，$\boldsymbol{S}$ 也严重地不一对一．它把整个坐标平面 $r=0$ 映成原点，把区间 $[0,+\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi)$ 和 $[0,+\infty)\times[0,\pi]\times[2\pi,4\pi)$ 都映成整个空间 R^3．同时，它的 Jacobi 行列式

$$\det J\boldsymbol{S}(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix}$$

$$=r^2\sin\theta \tag{6}$$

当 $r=0$ 或 $\theta=0,\pi$ 时为零．有鉴于此，我们也和极坐标换元一样，考虑开区间

$$\Omega=(0,+\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi).$$

则 $\boldsymbol{S}(\Omega)$ 是 R^3 除去半张坐标平面 $Ozx(x\geqslant 0)$．但也和极坐标换元的道理一样，在 Ω^- 上换元公式(3)也是成立的，即

定理2 如果 $\Delta\subset\Omega^-$ 有体积，则 $S(\Delta)$ 也有体积；这时如果函数 F 在 R^3 上连续，则

$$\iiint\limits_{S(\Delta)} F(x,y,z)\,dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Delta} F(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi. \quad (7)$$

例1 计算积分

$$A=\iiint\limits_{V}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz,$$

其中 V 为球面 $x^2-y^2+z^2=R^2$ 和锥面 $\sqrt{x^2+y^2}=z$ 围成的集合(图79)。

解 用球坐标换元．由图79可以看到，V 的原象为区间

$$\Delta:\ \left\{(r,\theta,\varphi):\quad 0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

由(7)式，

$$A=\iiint\limits_{\Delta} r^4\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$

$$=\int_0^R r^4dr\int_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi$$

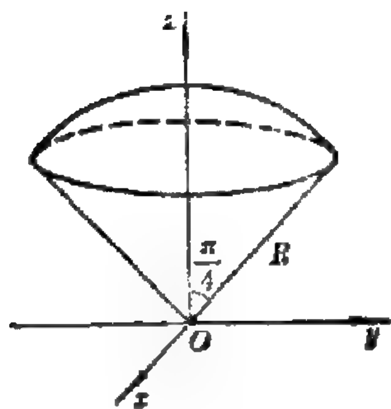


图 79

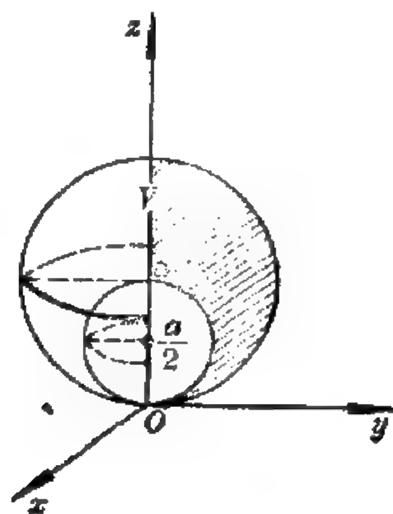


图 80

$$=\frac{\pi}{5}(2-\sqrt{2})R^5. \quad \square$$

例 2 计算积分

$$A=\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz,$$

其中 V 是球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 和 $x^2+y^2+z^2=az$ 围成的集合(图 80).

解 用球坐标换元. 球面 $x^2+y^2+z^2=2az$ 在 $r\theta\varphi$ 空间中的原像是 $r=2a\cos\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$; 球面 $x^2+y^2+z^2=az$ 的原像是 $r=a\cos\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. 因此 V 的原像为

$$\Delta=\left\{(r,\theta,\varphi):\quad a\cos\theta\leqslant r\leqslant 2a\cos\theta,\right.$$

$$\left.0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}.$$

由(7)式,

$$A=\iiint\limits_\Delta r^3\cos\theta\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\,d\theta\int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta}r^3dr\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$=\frac{15}{2}\pi a^4\int_0^{\pi/2}\cos^5\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=\frac{5}{4}\pi a^4. \quad \square$$

例 3 计算椭球体积.

解 椭球方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$$

作换元

$$u=\frac{x}{a},\quad v=\frac{y}{b},\quad w=\frac{z}{c}$$

它把椭球映成单位球. 其 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=abc.$$

因此由(3)式, 椭球体积为

$$\iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1} dx\,dy\,dz$$

$$=abc\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} dudvdw\ .$$

右边的积分是单位球体积, 作球坐标换元可得

$$\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} dudvdw$$

$$=\int_0^1 r^2\,dr\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$=\frac{4}{3}\pi.$$

故椭球体积为$\frac{4}{3}abc\pi$. 若 $a=b=c=R$, 即得球体积 $\frac{4}{3}\pi R^3$. □

习　　题

1. 计算下列积分:

(1) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant z} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$.

(2) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$, $V=\{(x,y,z):\quad r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\ z\geqslant 0\}$.

(3) $\iiint\limits_V\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}dxdydz$, V 为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的内部.

(4) $\iiint\limits_{V} z^2 dxdydz$, V 由 $z=ay^2$, $z=by^2$, $z=\alpha x$, $z=\beta x$ 和 $z=h$ 围成，其中 $0<a<b$, $0<\alpha<\beta$, $h>0$, $y>0$.

2. 计算下列曲面围成的体积：

(1) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $x^2+y^2=z^2$, 其中 $a<b$, $z>0$.

(2) $a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1$, $a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2$, $a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3$,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

(3) $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$.

(4) $(x^2+y^2+z^2)^n=z^{2n-1}$.

(5) $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$.

§2.3 重积分物理应用举例

我们看到，重积分与一元函数积分的概念是相同的，例如三重积分是将总体 V 分成小块 $\Delta V_1, \cdots, \Delta V_n$，再在每一个 ΔV_i 中任取一点 p_i，作和

$$\sum f(p_i)v(\Delta V_i).$$

再无限细分就是积分

$$\lim\sum f(p_i)v(\Delta V_i)=\int_V f dv.$$

因此我们可以采用第三章§2.6中约定的“微元求和”的语言，以求进一步简化．这就是在 V 中任意一点 p 处取一小块，其体积为 dv，再将“微元”$f(p)dv$ 在 V 上“相加”即是积分

$$\int_V f dv.$$

例1 设有半径为 R 的圆盘，其密度函数 ρ 为 $\rho(p)=ar$，r 为 p 点到圆心的距离，a 为常数．计算圆盘的质量．

解 在盘上任意一点 p 处取一小块，面积为 $d\sigma$，这一小块的

质量就是

$$\rho(p)d\sigma = ard\sigma.$$

相加便得圆盘的质量为

$$m = \iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} ard\sigma = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^2 dr$$

$$= \frac{2}{3}\pi a R^3. \quad \square$$

例 2 一半圆形的水渠，求水满时水闸承受的压力。

解 如图 81，设水闸的半径为 R（米）。因为一点 p 处的水压压强为该点的深度 y（吨/米^2），所以在面积 $d\sigma$（米^2）上的压力为 $yd\sigma$（吨）。相加即得总压力

$$P = \iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq R^2\\ y\geq 0}} yd\sigma$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{2}{3}R^3\text{（吨）}. \quad \square$$

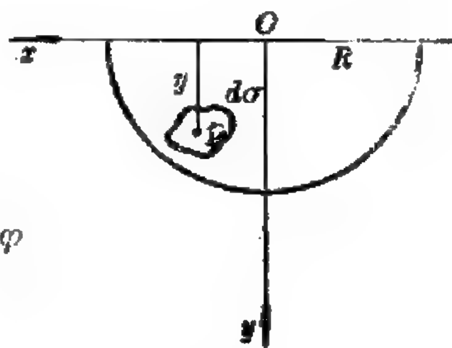


图 81

例 3 第二章 §2.6 例 4．设有盛满水的半径为 R（米）的圆柱水桶，高为 H（米），试计算抽完桶中水所需之功。

解 如图82，抽出体积 dv（米^3），深为 z（米）的小块水所作之功为 zdv（吨米），相加便得总共所需之功为

$$W = \iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\leq R^2\\ 0\leq z\leq H}} zdv$$

$$= \int_0^H zdz \iint\limits_{x^2+y^2\leq R^2} dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\pi R^2 H^2\text{（吨米）}. \quad \square$$

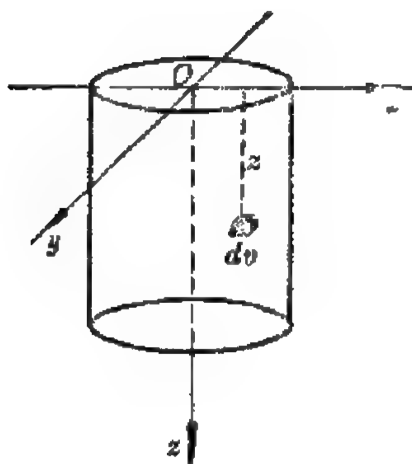


图 82

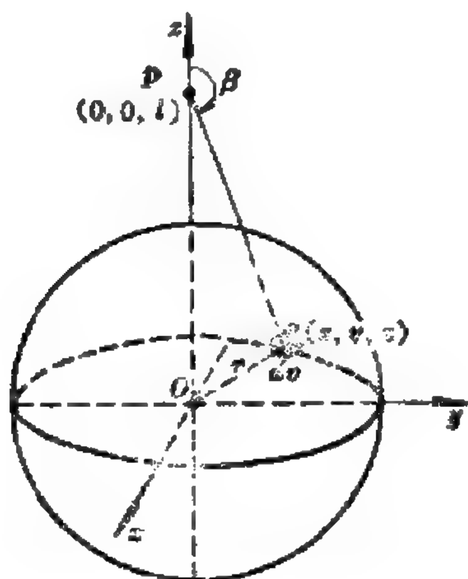


图 83

例 4 设有半径为 R 的球体，密度 ρ 为常数，试求出其引力场.

解 为求引力场，任取一点 p，我们要计算 p 点的引力. 也就是要计算 p 点单位质量所受到的引力. 设 p 点与球心相距为 l. 不妨设球心在原点，p 点在 z 轴上(图 83)，即 p 点的坐标为$(0, 0, l)$. 在球中任意一点(x, y, z)处取一小块体积dv，则这一小块对 p 点的引力大小为

$$\frac{\rho dv}{x^2+y^2+(z-l)^2},$$

引力的方向指向点(x, y, z). 它在 z 轴上的分量为

$$\frac{\rho dv\cos\beta}{x^2+y^2+(z-l)^2}=\frac{(z-l)\rho dv}{[x^2+y^2+(z-l)^2]^{3/2}}.$$

因此，p 点的引力在 z 轴上的分量为

$$F_z=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq R^2}\frac{(z-l)\rho dv}{[x^2+y^2+(z-l)^2]^{3/2}}$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R dr\int_0^\pi\frac{\rho r^2(r\cos\theta-l)\sin\theta d\theta}{(r^2+l^2-2lr\cos\theta)^{3/2}}$$

$$=2\pi\rho\int_0^R r^2\varphi(r)dr,$$

其中

$$\varphi(r)=\int_0^\pi\frac{(r\cos\theta-l)\sin\theta d\theta}{(r^2+l^2-2lr\cos\theta)^{3/2}}.$$

作换元 $t=(r^2+l^2-2lr\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$ 可得

$$\begin{aligned}\varphi(r)&=\frac{1}{2l^2r}\int_{|r-l|}^{r+l}\left(\frac{r^2-l^2}{t^2}-1\right)dt\\&=\frac{1}{2l^2r}\left(\frac{r^2-l^2}{|r-l|}+|r-l|-2r\right)\\&=\begin{cases}0, & r>l,\\ -\dfrac{2}{l^2}, & r<l.\end{cases}\end{aligned}$$

因此，当 $l\geqslant R$ 时

$$F_z=-\frac{4\pi\rho}{l^2}\int_0^R r^2dr=-\frac{4\pi\rho R^3}{3l^2};$$

当 $l\leqslant R$ 时

$$F_z=-\frac{4\pi\rho}{l^2}\int_0^l r^2dr=-\frac{4}{3}\pi\rho l.$$

由球的对称性和均匀性(或通过直接计算)可知，p 点引力在 x 轴和 y 轴方向的分力 $F_x=F_y=0$. 综合以上的结果,我们可以得出下面的结论:

1. 每一点的引力指向球心.

2. 球外一点的引力等于球心放置一个质量为 $\frac{4}{3}\pi R^3\rho$（这是球体的质量)的质点对该点所产生的引力,即犹如球的质量集中在球心上一样.

3. 球内一点 p 的引力等于半径为 l(p点到球心的距离)的球体对 p 点的引力,p 点以外的球壳对 p 点不产生引力. □

最后我们再讨论一个问题——重心. 我们知道, n 个质量分别为 $m_1, \cdots, m_n$, 位置为 $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ 的质点, 其重心位置为

$$\bar{P}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_i\boldsymbol{p}_i, \tag{1}$$

式中 $M=\sum_{i=1}^{n}m_i$. 即重心位置是各质点位置关于质量的平均. 由此我们可以得到物体重心的计算方法. 考虑一个密度为 ρ 的物体, 占据空间立体 V. 在 V 中 $\boldsymbol{p}$ 点处取一小块积体 dv, 它的质量便是 $\rho(\boldsymbol{p})dv$, 于是按照(1)式, 物体的重心位置应是

$$\bar{P}=\frac{1}{M}\int_V \boldsymbol{p}\rho(\boldsymbol{p})dv, \tag{2}$$

其中 M 是物体的总质量, 即

$$M=\int_V \rho.$$

设 $\bar{P}=(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, 则(2)表示

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_V x\rho(x, y, z)dv, \quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_V y\rho(x, y, z)dv,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_V z\rho(x, y, z)dv.$$

例5 设有半径为 a 的球体, 球心位置为 $(0, 0, a)$, 密度函数 ρ:

$$\rho(\boldsymbol{p})=\frac{k}{r^2},$$

其中 k 为常数, $r=\|\boldsymbol{p}\|$. 试计算重心位置.

解 由对称性可知重心 $\bar{P}$ 在 z 轴上, 设 $\bar{P}=(0, 0, \bar{z})$. 由(2)式,

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_V z\frac{k}{r^2}dv.$$

因为

$$M=k\iiint\limits_V \frac{dv}{r^2}=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^{2a\cos\theta}dr$$

$$=4k\pi a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta=2k\pi a,$$

$$\iiint\limits_V z\frac{k}{r^2}dv=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2a\cos\theta}rdr$$

$$=4k\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta d\theta=k\pi a^2.$$

所以

$$z=\frac{a}{2}.\quad \square$$

习　题

1. 将一空心球体压入水中，试计算所作之功.

2. 半径为 R 的均匀圆盘，其密度为 μ. 在圆心垂线上有一密度为 ρ 的均匀细棒，棒长为 l，其近圆盘的一端与圆心相距为 a. 求圆盘对细棒的引力.

3. 一圆锥与半球相接构成密度为 ρ 的均匀球锥，球半径为 R，圆锥顶角为 2α. 试计算球锥对其顶点的引力.

4. 半径为 a 的圆盘，其各点的密度等于该点到圆心的距离，今内接于圆周挖去半径为 $a/2$ 的小圆盘. 试求重心坐标.

5. 半径为 a 的均匀圆柱体上接一半径为 a 的均匀半球，圆柱密度为 λ，半球密度为 μ. 为使重心恰好在球心上，柱高为何？

6. 证明凸形物体的重心在其体内.

提示：如在体外，过重心可作一平面与物体不相交. 这里我们自然假定物体有连续的密度函数.

§2.4　n维体积二例

以上关于二重和三重积分的概念、理论和方法都同样适用于n

重积分．我们举两个计算 n 维体积的例子．

例1 设 $V_n\subset R^n$ 是由坐标平面和超平面

$$x_1+\cdots+x_n=a \qquad (a>0)$$

围成的集合，即

$$V_n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in R^n:\quad x_1,\cdots,x_n\geqslant 0,\ x_1+\cdots+x_n\leqslant a\}.$$

试计算 V_n 的体积 $v(V_n)$．

解 按定义(§1.4 定义 2)，

$$v(V_n)=\int_{V_n}1=\underset{\substack{x_1+\cdots+x_n\leqslant a\\ x_1,\cdots,x_n\geqslant 0}}{\int\cdots\int}dx_1\cdots dx_n.$$

作换元

$$x_1=au_1,\cdots,x_n=au_n.$$

则 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(u_1,\cdots,u_n)}=a^n.$$

所以

$$v(V_n)=a^n\underset{\substack{u_1+\cdots+u_n\leqslant 1\\ u_1,\cdots,u_n\geqslant 0}}{\int\cdots\int}du_1\cdots du_n=a^n\delta_n. \tag{1}$$

再用化累次积分的方法计算积分 δ_n：

$$\delta_n=\underset{\substack{u_1+\cdots+u_n\leqslant 1\\ u_1\geqslant 0,\cdots,u_n\geqslant 0}}{\int\cdots\int}du_1\cdots du_n=\int_0^1 du_n\underset{\substack{u_1+\cdots+u_{n-1}\leqslant 1-u_n\\ u_1,\cdots,u_{n-1}\geqslant 0}}{\int\cdots\int}du_1\cdots du_{n-1}.$$

由(1)式，

$$\underset{\substack{u_1+\cdots+u_{n-1}\leqslant 1-u_n\\ u_1\geqslant 0,\cdots,u_{n-1}\geqslant 0}}{\int\cdots\int}du_1\cdots du_{n-1}=(1-u_n)^{n-1}\delta_{n-1}.$$

所以

$$\delta_n=\delta_{n-1}\int_0^1(1-u_n)^{n-1}du_n=\frac{\delta_{n-1}}{n}.$$

这是关于 δ_n 的一个递推式．因为

$$\delta_1=\int_0^1 du_1=1.$$

所以

$$\delta_n=\frac{1}{n!}.$$

故

$$(vV_n)=\frac{a^n}{n!},\quad n=1,2,\cdots.\quad \square$$

例2 计算n维球的体积.

解 n维球面方程是

$$x_1^2+\cdots+x_n^2=R^n,$$

R是半径. 记半径为R的n维球为B_R^n, 则

$$v(B_R^1)=2R, v(B_R^2)=\pi R^2.$$

设

$$v(B_R^n)=a_nR^n,$$

其中a_n是与R无关的常数. 则

$$\begin{aligned}v(B_R^{n+1})&=\int_{B_R^{n+1}}1=\int_{-R}^{R}dx_{n+1}\int\cdots\int_{x_1^2+\cdots+x_n^2\le R^2-x_{n+1}^2}dx_1\cdots dx_n\\&=a_n\int_{-R}^{R}(R^2-x_{n+1}^2)^{\frac{n}{2}}dx_{n+1}\\&=2a_n\int_0^R(R^2-x_{n+1}^2)^{\frac{n}{2}}dx_{n+1}\\&=2a_nR^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}u\,du\\&=a_{n+1}R^{n+1}.\end{aligned}$$

所以

$$v(B_R^n)=a_nR^n,\quad n=1,2,\cdots,$$

且

$$a_{n+1}=2a_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}u\,du,\quad n=1,2,\cdots.$$

因此我们得 n 维球的体积为

$$v(B_R^n)=2^nR^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta\cdots\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta d\theta.$$

应用 Wallis 公式(第三章 §2.5 例5)可以算得

$$v(B_R^1)=2R,\quad v(B_R^2)=\pi R^2,\quad v(B_R^3)=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$v(B_R^4)=\frac{1}{2}\pi^2R^4,\quad v(B_R^5)=\frac{8}{15}\pi^2R^5,\ \cdots.\qquad \square$$

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 设 $I\subset R^n$ 是 n 维区间. 在什么条件下 I 上的 n 重积分可以化为一个 k 重积分和一个 $n-k$ 重积分的累次积分?

(2) 设 $D\subset R^n$ 是有体积的集合. 如何将 D 上的 n 重积分化为一个 k 重积分和一个 $n-k$ 重积分的累次积分?

(3) 设 $t_1,\cdots,t_n$ 是 R^n 中 n 个线性无关的向量. 由这些向量张成的"平行体"就是集合

$$\{\alpha_1t_1+\cdots+\alpha_nt_n:\quad 0\leqslant\alpha_i\leqslant1,\ i=1,\cdots,n\}.$$

它是由哪些"平面"围成的? 你认为它的体积为何? 这对于 n 重积分的换元问题有什么意义?

2. 计算下列积分:

(1) $\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n}(x_1^2+\cdots+x_n^2)dx_1\cdots dx_n.$

(2) $\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n}(x_1+\cdots+x_n)^2dx_1\cdots dx_n.$

(3) $\int_0^1dx_1\int_0^{x_1}dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}}x_1\cdots x_ndx_n.$

3. 计算下列 R^n 中的集合的体积(其中 $a_1,\cdots,a_n>0$):

(1) $V_n(a_1,\cdots,a_n)=\{(x_1,\cdots,x_n):\quad \frac{x_1}{a_1}+\cdots+\frac{x_n}{a_n}\leqslant1,\ x_1,\cdots,x_n\geqslant0\}.$

(2) $V_n(a)=\{(x_1, \cdots, x_n): \quad |x_1|+\cdots+|x_n|\leqslant a\}$.

(3) $V_n(a_1, \cdots, a_n)=\{(x_1, \cdots, x_n): \quad \frac{|x_i|}{a_i}+\frac{|x_n|}{a_n}\leqslant 1, i=1, \cdots, n-1\}$.

4. 设K为二元连续函数. 又

$$K_n(x, y)=\int \cdots \int_{[a, a]^n} K(x, t_1)K(t_1, t_2)\cdots K(t_n, y)dt_1\cdots dt_n.$$

证明

$$K_{m+n+1}(x, y)=\int_a^b K_m(x, t)K_n(t, y)dt.$$

5. 设f为连续函数, 证明

$$\int_a^b dx_1\int_a^{x_1} dx_2\cdots\int_a^{x_{n-1}} f(x_1, \cdots, x_n)dx_n=$$
$$\int_a^b dx_n\int_{x_n}^b dx_{n-1}\cdots \int_{x_2}^b f(x_1, \cdots, x_n)dx_1.$$

6. 设f为连续函数, 证明

$$\int_0^a dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_1)\cdots f(x_n)dx_n=\frac{1}{n!}\left[\int_0^a f(x)dx\right]^n.$$

7. 设f为连续函数, 证明

$$\int_0^a dx_1\int_0^{x_1} dx_2\cdots\int_0^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^a f(x)(a-x)^{n-1}dx.$$

第三节　曲线和曲面积分

§3.1　曲线长度和曲线积分

设有参数曲线l, 方程为

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\chi(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta; \qquad (1)$$

或者统一起来表示为

$$(x, y, z)=f(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \qquad (2)$$

其中$f=(\varphi, \psi, \chi)$是由$[\alpha, \beta]$到R^3中的映射. 我们仍采用以直近曲的办法用弦逼近弧来定义l的“长度”. 作区间$[\alpha, \beta]$的分割

$$\pi: \quad \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta.$$

对于π中的分点$t_0, t_1, \cdots, t_n$, 在l上就得到$n+1$个相应的点(图

84)，联结这些点就得到一条折线，它的长度是

$$\sum_{i=1}^{n}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|. \qquad (3)$$

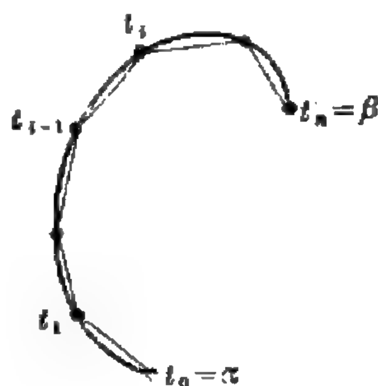


图 84

定义1 设曲线 l 的方程为(1)或(2)，其中 f 为连续单射. 对一切分割 π 考虑折线长度(3)的上确界

$$\gamma=\sup_{\pi}\left\{\sum_{i=1}^{n}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta\right\}.$$

如果 $\gamma<+\infty$，则说曲线 l 为**有长的**，它的**长度**为 $s(l)=\gamma$.

由此定义，曲线长就是对一切分割所得折线长的上确界. 这个定义乍看起来似与曲线的参数表示有关，其实由习题 10 即知是无关的.

为了计算曲线的长度，我们先讨论(2)中一元映射 f 的积分问题. 和一元函数的积分一样，对分割 π 作和

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta t_i=\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta t_i,\ \sum_{i=1}^{n}\psi(\xi_i)\Delta t_i,\ \sum_{i=1}^{n}\chi(\xi_i)\Delta t_i\right).$$

令 $\|\pi\|\to0$，如果上式有极限，就得映射 f 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的积分. 由此我们看到，f 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积的充分必要条件是其坐标函数 φ,ψ,χ 均在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，这时

$$\int_{\alpha}^{\beta}f=\left(\int_{\alpha}^{\beta}\varphi,\ \int_{\alpha}^{\beta}\psi,\ \int_{\alpha}^{\beta}\chi\right). \qquad (4)$$

因为

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta t_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\|f(\xi_i)\|\Delta t_i,$$

所以，如果 f 是连续映射，则

$$\left\|\int_{\alpha}^{\beta} f\right\| \leqslant \int_{\alpha}^{\beta}\|f\|. \tag{5}$$

由(4)式还可以看到微积分基本公式对于一元映射也是成立的：如果 f 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，且当 $t\in[\alpha,\beta]$ 时 $F'(t)=f(t)$，则

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = F(\beta)-F(\alpha). \tag{6}$$

定理1 设曲线 l 的方程为(1)或(2)，其中 $f\in\mathscr{C}^{(1)}$ 为单射，则 l 有长，且

$$s(l)=\int_{\alpha}^{\beta}\|f'(t)\|dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt. \tag{7}$$

证明 由(6)式和(5)式得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\| &= \sum_{i=1}^{n}\left\|\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)dt\right\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|f'(t)\|dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta}\|f'(t)\|dt\end{aligned}$$

对一切分割 π 成立。右端是一定数，由此可见 l 有长，且

$$s(l)\leqslant\int_{\alpha}^{\beta}\|f'(t)\|dt.$$

另一方面，任给 $\varepsilon>0$，因为 f' 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，所以存在 $\delta>0$，当 $|s-t|<\delta$，$s,t\in[\alpha,\beta]$ 时

$$\|f'(s)-f'(t)\|<\varepsilon.$$

设 $\|\pi\|<\delta$，于是由(6)式和(5)式又得

$$s(l)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\|f(t_i)-f(t_{i-1})\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t)dt \right\|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t_i)dt + \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f'(t)-f'(t_i)]dt \right\|$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(t_i)dt \right\| - \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f'(t)-f'(t_i)\|dt$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{n} \|f'(t_i)\| \Delta t_i - \varepsilon(\beta-\alpha).$$

先令$\|\pi\|\to 0$，再令$\varepsilon\to 0$即得

$$s(l) \geqslant \int_{\alpha}^{\beta} \|f'(t)\| dt.$$

所以(7)式成立. □

例1 计算摆线(第三章§2.5例3)一拱的长度.

解 摆线的一拱是

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \tag{8}$$

应用(7)式得其长

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=8a. \quad □$$

由于区间$[a,b]$上的一元函数f也是一条(平面)参数曲线，方程是

$$x=x,\ y=f(x),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

因此应用(7)式便得:

推论 如果$f\in\mathscr{C}^{(1)}[a,b]$，则曲线$f$有长，且

$$s(f)=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \tag{9}$$

注1 在定义1和定理1中我们都假定f是单射，为的是避免出现"重点". 例如考虑圆的方程

$x=R\cos t,\ y=R\sin t,\quad 0\leqslant t\leqslant 4\pi.$

当 t 由 0 变到 4π 时 (x,y) 在圆周上走了两圈，当然有重点．用(7)式来计算，就得圆周长的两倍．但并非绝对不可以出现重点．一般来说，如果 $f(t_1)=f(t_2)=p$（图 85），而无其它重点，则显然不影响(7)式的计算．再如，如果 f' 在一个区间 $I\subset[\alpha,\beta]$ 上为 0，这时也出现重点，同样不影响(7)式的计算．

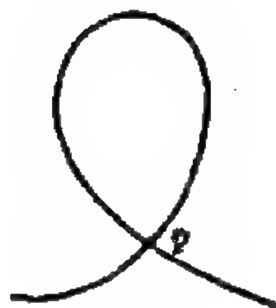


图 85

注 2 在定理 1 的假设下，如果曲线 l 又有参数表示

$$(x,y,z)=g(u),\qquad a\leqslant u\leqslant b,$$

其中 $g\in\mathscr{C}^{(1)}$ 为单射．这时如果有一由 $[\alpha,\beta]$ 到 $[a,b]$ 上的增（或减）函数 $h\in\mathscr{C}^{(1)}$ 使 $g\circ h=f$，则

$$\int_a^b\|g'(u)\|du=\int_\alpha^\beta\|g'\circ h(t)\|h'(t)dt=\int_\alpha^\beta\|f'(t)\|dt.$$

这就是说，至少在一定的意义（存在 h）上(7)式与参数表示无关．

在定理 1 中，当 $t\in[\alpha,\beta]$ 时令 $l_t=f([\alpha,t])$，这是 l 上的一段曲线．根据(7)式得 l_t 的长度

$$s=\int_\alpha^t\|f'(u)\|du,\qquad t\in[\alpha,\beta].$$

因此

$$ds=\|f'(t)\|dt.\tag{10}$$

这个微分常常叫做"弧长元素"．它是切向量 $f'(t)dt$ 的长度．再令

$$\Delta s=\int_t^{t+dt}\|f'(u)\|du.\tag{11}$$

这也是 l 上一段的长度（图 86）．于是（第二章§1.6）

$$\Delta s=ds+o(dt).\tag{12}$$

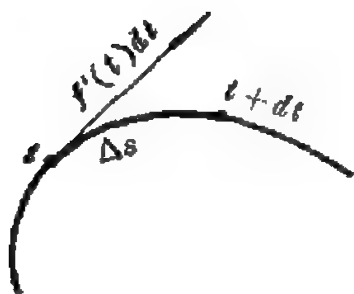


图 86

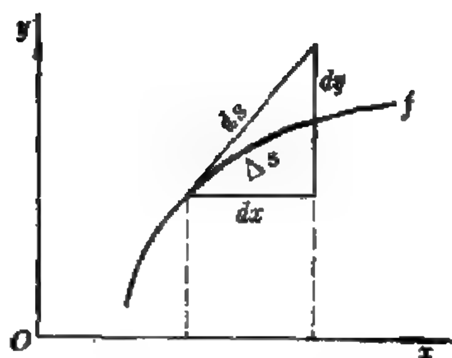


图 87

这就是说，切线上的一段长(10)与曲线上对应的一段长(11)相差为高阶无穷小量.

因为

$$\|f'(t)\|=\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2},$$

所以由(10)式又得

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2. \tag{13}$$

此式叫做商高公式的微分形式. 它的几何意义可以从图 87 的平面曲线 $y=f(x)$ 中看出.

有了曲线的长度，就可定义“曲线积分”了.

定义 2 设曲线 l 的方程为(1)或(2)，其中 $f\in\mathscr{C}^{(1)}$ 为单射. 如果 F: $l\to R$ 连续，则定义 F 在 l 上的**曲线积分**为

$$\int_l Fds=\int_\alpha^\beta F\circ f(t)\|f'(t)\|dt$$

$$=\int_\alpha^\beta F(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2+\chi'(t)^2}\,dt. \tag{14}$$

在所设条件下，这个积分显然是存在的. 此外，定理 1 的两个注对这个定义也同样适用.

如果 $l\subset R^2$ 的方程为

$$y=f(x),\quad x\in[a,b],$$

其中 $f\in\mathscr{C}^{(1)}$，则(14)式就成为

$$\int_l F ds = \int_a^b F(x, f(x))\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx. \qquad (15)$$

例 2 将抛物线 l: $y=\sqrt{x}\,(0\leqslant x\leqslant a)$ 绕 Ox 轴旋转一周得一抛物面，求其"面积"A.

解 如图88，在 l 上一点 (x, y) 处取一小段，长为 ds，则高为 $y=\sqrt{x}$. 旋转后得"面积"$2\pi y ds$. 沿 l"相加"便得所求面积

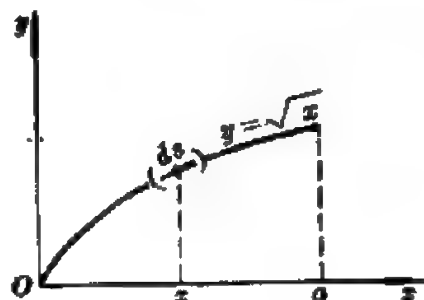


图 88

$$A=2\pi\int_l y ds.$$

用(15)式计算这个积分得

$$A=2\pi\int_0^a\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx=\frac{\pi}{6}[(1+4a)^{\frac{3}{2}}-1]. \quad \Box$$

例 3 将摆线的一拱绕 Ox 轴旋转一周，求所得之面积.

解 与例2解法相同，用(14)式和方程(8)计算，得所求之面积

$$A=2\pi\int_l y ds=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt=18\pi a^2. \qquad \Box$$

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 何谓有长曲线？在定义 1 中为什么要假定 f 是连续的单射？

(2) 在什么条件下曲线的长度有怎样的积分表示？

(3) 怎样从几何上解释弧长元素 ds？

(4) 曲线积分是如何定义的？

2. 计算曲线长度，设曲线方程为:

(1) $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2$.

(2) $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t),\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi;\ a>0$.

(3) $x=\frac{c^2}{a}\cos^3 t,\ y=\frac{c^2}{b}\sin^3 t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi; c^2=a^2-b^2, 0<b<a.$

(4) $x=\sin t, y=t, z=1-\cos t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

(5) $x=t, y=3t^2, z=6t^3, 0\leqslant t\leqslant 2.$

(6) $y^2=2px, 0\leqslant x\leqslant a.$

(7) $y=e^x, 0\leqslant x\leqslant a.$

(8) $y^2=x^3, |y|\leqslant 1.$

3. 计算下列曲线积分:

(1) $\int_l (x^2+y^2)^n ds$, l: $x=a\cos t, y=a\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

(2) $\int_l (x+y)ds$, l: 顶点为$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$的三角形.

(3) $\int_l \frac{z^2}{x^2+y^2}ds$, l: 螺线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=at, 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

(4) $\int_l zds$, l: 圆锥螺线 $x=t\cos t, y=t\sin t, z=t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

(5) $\int_l x^2ds$, l: 圆周 $x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0.$

(6) $\int_l zds$, l: $x^2-y^2=z^2, y^2=ax$, 由$(0,0,0)$到$(a,a,a\sqrt{2})$.

4. 计算下列曲线旋转所得面积:

(1) $y=x\sqrt{\frac{x}{a}}, 0\leqslant x\leqslant a$, 绕 x 轴.

(2) $x^2+(y-b)^2=a^2$, 绕 x 轴; $b\geqslant a.$

(3) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, 绕 y 轴.

(4) $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$, 绕直线 $y=x$.

5. 计算球面三角形 $x^2+y^2+z^2=a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 周界的重心坐标, 假定(线)密度为 1.

6. 用积分和离心率 $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}}$表示椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的长度.

7. 设曲线 l 的极坐标方程为 $r=f(\varphi)$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$, 其中 $f\in\mathscr{C}^{(1)}$. 证明 l 的长度为

$$s(l)=\int_\alpha^\beta \sqrt{f(\varphi)^2+f'(\varphi)^2}\,d\varphi.$$

8. 在定理 1 的假设下, 证明曲线上一段的长度与对应弦长之比的极限

为1。

9. 设曲线 l 的方程为

$$y=\begin{cases}x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明 l 没有长.

提示：取分点 $x_0=0,\ x_i=\dfrac{1}{2n-i+1},\ i=1,\cdots,2n$.

10. 设 f：$[\alpha,\beta]\to R^3$ 和 g：$[a,b]\to R^3$ 都是连续的单射，且 $f([\alpha,\beta])=g([a,b])$. 证明存在由 $[\alpha,\beta]$ 到 $[a,b]$ 上的连续函数 h 使 $g\circ h=f$，并且 h 是严格单调的. 从而证明定义1与参数表示无关. 由此可知，定理1也与参数表示无关.（但注意，定义2只在一定意义上与参数表示无关.）

§3.2 曲面面积和曲面积分

设有参数曲面 Σ，方程为

$$x=\varphi(u,v),\ y=\psi(u,v),\ z=\chi(u,v),\quad (u,v)\in D; \tag{1}$$

或

$$(x,y,z)=f(u,v),\quad (u,v)\in D. \tag{2}$$

其中 $f=(\varphi,\psi,\chi)\in\mathscr{C}^{(1)}$ 为单射，D 是 uv 平面上有面积的闭域.

用平行于坐标轴的直线 $u=u_1,\cdots,u=u_n$ 和 $v=v_1,\cdots,v=v_m$ 细分 D（图89），其中

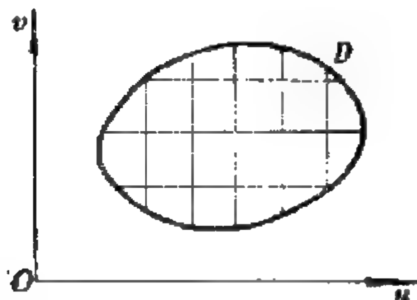


图 89

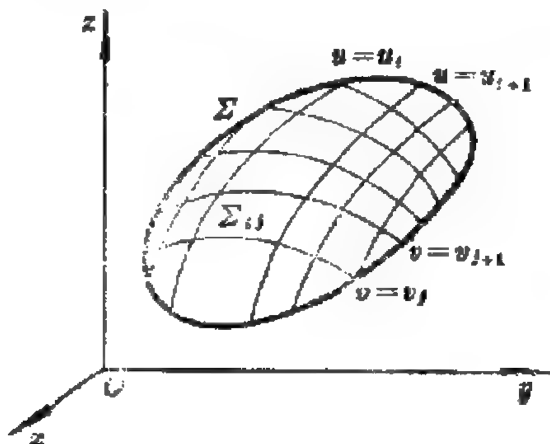


图 90

$$u_1 < u_2 < \cdots < u_n,\ v_1 < v_2 < \cdots < v_m.$$

相应于D中的这些直线，在Σ上就有许多v-曲线和u-曲线，把Σ分成许多小块Σ_{ij}(图 90)．由§3.1(12)式知道，弧$\widehat{AB}$(图 91)的长与$\|f'_u(u_i, v_j)\|\Delta u_i$相差$o(\Delta u_i)$；弧$\widehat{AC}$的长与$\|f'_v(u_i, v_j)\|\Delta v_j$相差$o(\Delta v_j)$．如果分得很细，则$\Sigma_{ij}$就可近似地看作一个平行四边形，它的"面积"$\sigma(\Sigma_{ij})$就近似于平行四边形$AB'C'D'$的面积，即

$$\sigma(\Sigma_{ij}) \approx \|f'_u \times f'_v\|_{(u_i, v_j)} \Delta u_i \Delta v_j.$$

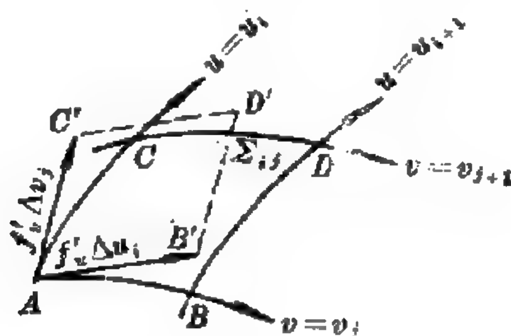


图 91

所以对于Σ的"面积"$\sigma(\Sigma)$就有(不计边界附近的面积)

$$\sigma(\Sigma) \approx \sum_{i,j} \|f'_u \times f'_v\|_{(u_i, v_j)} \Delta u_i \Delta v_j.$$

分之越细，近似越好．而由二重积分的定义(§1.1定义 1 和§1.4定义1)，右端的极限就是

$$\iint_D \|f'_u(u, v) \times f'_v(u, v)\| du dv.$$

由于D是有面积的闭域和$f \in \mathscr{C}^{(1)}$，这个积分是存在的．因此我们定义曲面面积如下：

定义1 在上面关于曲面Σ的假设下，定义Σ的面积为

$$\sigma(\Sigma) = \iint_D \|f'_u(u, v) \times f'_v(u, v)\| du dv. \tag{3}$$

由于这个定义，我们记

$$d\sigma = \|f'_u \times f'_v\|_{(u, v)} du dv, \tag{4}$$

叫做曲面的"面积元素". 它是切向量 $\boldsymbol{f}'_u(u,v)du$, $\boldsymbol{f}'_v(u,v)dv$ 在切平面上张成的平行四边形的面积.

在方程(1)中, 如果 $\chi=0$, 则 $\Sigma=\boldsymbol{f}(D)$ 是一平面集合. 这时

$$\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & 0\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} & 0\end{vmatrix}=(\det J\boldsymbol{f})\boldsymbol{k}, \tag{5}$$

所以(3)式就成为

$$\sigma(\Sigma)=\int_D|\det J\boldsymbol{f}|.$$

它与§1.6(15)式($F=1$)一致. 这也就是说, 现在我们关于曲面面积的定义与过去平面集合面积的定义没有矛盾.

因为

$$\|\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v\|^2=\boldsymbol{f}'^2_u\boldsymbol{f}'^2_v-(\boldsymbol{f}'_u\cdot\boldsymbol{f}'_v)^2,$$

记

$$E=\boldsymbol{f}'^2_u=\varphi'^2_u+\psi'^2_u+\chi'^2_u,$$

$$G=\boldsymbol{f}'^2_v=\varphi'^2_v+\psi'^2_v+\chi'^2_v,$$

$$F=\boldsymbol{f}'_u\cdot\boldsymbol{f}'_v=\varphi'_u\varphi'_v+\psi'_u\psi'_v+\chi'_u\chi'_v.$$

则

$$\|\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v\|=\sqrt{EG-F^2}.$$

所以面积公式(3)常常写成

$$\sigma(\Sigma)=\int_D\sqrt{EG-F^2}. \tag{6}$$

特别, 若曲面 Σ 的方程为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

其中 $f\in\mathscr{C}^{(1)}$, D 为有面积的闭域. 则

$$E=1+z'^2_x,\ G=1+z'^2_y,\ F=z'_xz'_y.$$

因此

$$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}.$$

所以

$$\sigma(\Sigma)=\iint_D\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy. \tag{7}$$

例1 计算球面面积.

解 用第五章§1.2例2中的球面参数方程计算:

$$E=x'^2_\theta+y'^2_\theta+z'^2_\theta=R^2,$$

$$G=x'^2_\varphi+y'^2_\varphi+z'^2_\varphi=R^2\sin^2\theta,$$

$$F=x'_\theta x'_\varphi+y'_\theta y'_\varphi+z'_\theta z'_\varphi=0.$$

所以

$$\sqrt{EG-F^2}=R^2\sin\theta. \tag{8}$$

应用(6)式便得球面面积为

$$A=\iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}}R^2\sin\theta d\theta d\varphi=2\pi R^2\int_0^\pi\sin\theta d\theta=4\pi R^2. \quad \square$$

例2 计算球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 被柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所截下的面积.

解 只须计算在第一象限中所截下部份Σ(图92)的面积. 仍用例1中所用的参数方程, 但须知道Σ的定义域. 为此, 将球面参数方程代入柱面方程得

$$\sin\theta=\cos\varphi.$$

但因 Σ 位于第一象限, 所以$0\leqslant\theta,\ \varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$. 故得

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi.$$

因此 Σ 的定义域为图93中之三角形集合 D. 应用(6)式和(8)式得

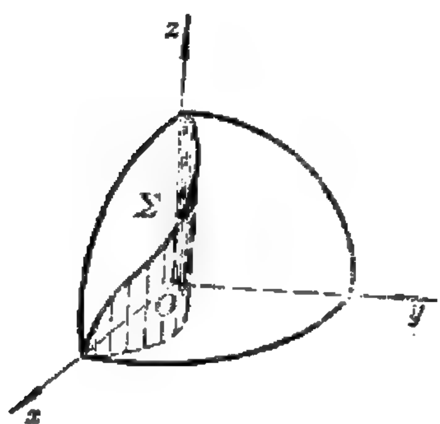


图 92

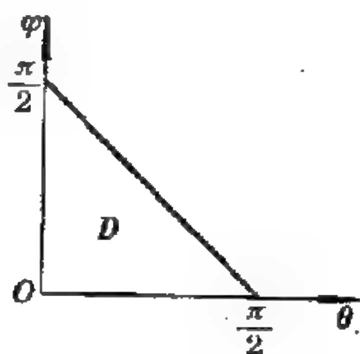


图 93

$$\sigma(\Sigma)=\iint_D R^2\sin\theta d\theta d\varphi=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varphi}\sin\theta d\theta$$

$$=R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\varphi)d\varphi=R^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).\quad \square$$

与曲线长度相似，关于曲面面积我们也作两点附注.

注1 关于 f 是单射的假定，是为了防止"重点". 但如果在曲面上只有孤立的重点，或重点集合对应于定义域中的零面积集，则(3)式仍可适用. 如例 1. $\varphi=0$ 和 $\varphi=2\pi$ 在球面上对应于同一条径线，但 $\varphi=0$ 和 $\varphi=2\pi$ 是定义域中的零面积集，所以不影响公式(3)的计算.

注2 如果曲面 Σ 除了方程(2)以外又有参数表示

$$(x, y, z)=g(s, t),\quad (s, t)\in\Delta,$$

其中$g\in\mathscr{C}^{(1)}$是单射，Δ是有面积的闭域. 这时如果有一由 D 到Δ上的单射 $h\in\mathscr{C}^{(1)}$, $\det Jh$处处非零，且 $g\circ h=f$, 则由积分换元(§1.6 (15))有

$$\int_\Delta\|g'_s\times g'_t\|=\int_D\|g'_s\circ h\times g'_t\circ h\||\det Jh|.$$

另一方面，设$h=(\alpha, \beta)$, 则

$$f'_u\times f'_v$$

$$=[(g'_s\circ h)\alpha'_u+(g'_t\circ h)\beta'_u]\times[(g'_s\circ h)\alpha'_v+(g'_t\circ h)\beta'_v]$$

$$=(\boldsymbol{g}'_s\circ\boldsymbol{h})\times(\boldsymbol{g}'_t\circ\boldsymbol{h})\det J\boldsymbol{h}. \tag{9}$$

所以

$$\int_\Delta\|\boldsymbol{g}'_s\times\boldsymbol{g}'_t\|=\int_D\|\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v\|.$$

因此在一定的意义(存在$\boldsymbol{h}$)上(3)式与参数表示是无关的.

与曲线积分的定义方法一样,我们现在用面积元素(4)定义曲面积分.

定义2 在上面关于曲面Σ的假设下,如果F: $\Sigma\to R$连续,则定义F在Σ上的**曲面积分**为

$$\int_\Sigma Fd\sigma=\iint_D F\circ\boldsymbol{f}\|\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v\|dudv$$

$$=\iint_D F\circ\boldsymbol{f}\sqrt{EG-F^2}\,dudv. \tag{10}$$

定义1的两个注也同样适用于这个定义.

如果Σ的方程为

$$z=f(x,y),\qquad (x,y)\in D,$$

其中$f\in\mathscr{C}^{(1)}$, D为有面积的闭域,则(10)式就成为

$$\int_\Sigma Fd\sigma=\iint_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f'_x(x,y)^2+f'_y(x,y)^2}\,dxdy. \tag{11}$$

例3 设Σ为锥面$z^2=k^2(x^2+y^2)(x^2+y^2\leqslant 2ax)$,计算积分

$$A=\iint_\Sigma(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)d\sigma.$$

解 用(11)式计算. 曲面的上半为$z=|k|\sqrt{x^2+y^2}$,面积元素为

$$d\sigma=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy=\sqrt{1+k^2}\,dxdy.$$

所以

$$A=2\sqrt{1+k^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2ax}[k^2(x^2+y^2)^2+x^2y^2]\,dx\,dy$$

$$=2\sqrt{1+k^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r^5(k^2+\cos^2\varphi\sin^2\varphi)\,dr$$

$$=\frac{\pi}{12}a^6(80k^2+7)\sqrt{1+k^2}. \qquad \square$$

例 4 一球沉于水底，计算其表面所受压力.

解 设球半径为 R，球心至水面的距离为 h. 如图 94 取坐标架，则表面所受压力为

$$P=\iint\limits_{\Sigma}(h+z)\,d\sigma=4\pi hR^2+\iint\limits_{\Sigma}z\,d\sigma.$$

由球的对称性易见第二项积分为零，所以球面压力为 $4\pi hR^2$. $\square$

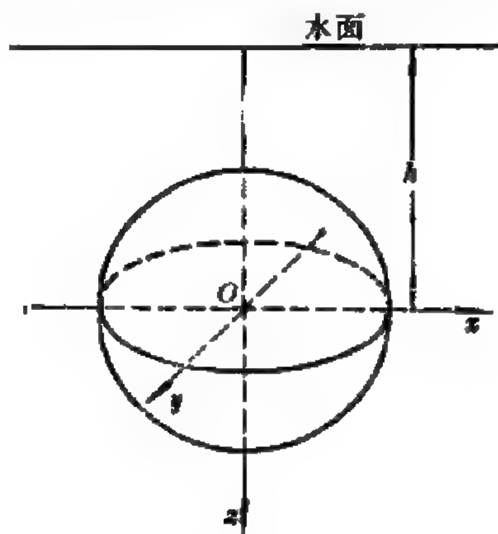


图 94

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 我们只对怎样的曲面定义了面积？是如何定义的？

(2) 怎样从几何上解释曲面面积元素？

2. 计算下列曲面的面积:

(1) 曲面 $az=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 截下的部份.

(2) 曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 截下的部份.

(3) 曲面 $z^2=2xy$ 在第一卦限被平面 $x=2$ 和 $y=1$ 截下的部份.

(4) 圆柱面 $x^2+z^2=a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 截下的部份.

(5)圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于平面 $x+z=0$ 和 $x-z=0$ 之间的部份.

(6) 螺旋面

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ z=h\varphi,\ 0<r<a,\ 0<\varphi<2\pi.$$

(7) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b\leqslant a)$ 截下的部份.

(8) 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 被柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 截下的部份.

(9) 在圆柱面内嵌一内接球面, 证明柱面和球面介于两张与柱面垂直的平面之间的面积相等.

3. 计算下列曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)d\sigma$, Σ: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\geqslant 0$.

(2) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{d\sigma}{(1+x+y)^2}$, Σ: 四面体 $x+y+z\leqslant 1$, $x,y,z\geqslant 0$ 的边界.

(3) $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|d\sigma$, Σ: $z=x^2+y^2$, $z\leqslant 1$.

(4) $\iint\limits_{\Sigma}zd\sigma$, Σ: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=\varphi$, $0<r<a$, $0<\varphi<2\pi$.

(5) $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)d\sigma$, Σ: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2x$ 割下的部份.

4. 计算半球面的重心位置, 设其密度为 1.

5. 计算密度为 ρ, 半径为 R 的均匀球壳的引力场.

6. 设 Σ_t 是平面 $x+y+z=t$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 截下的部份. 设

$$F(x,y,z)=1-(x^2+y^2+z^2),\quad x^2+y^2+z^2\leqslant 1.$$

证明

$$\iint\limits_{\Sigma_t}Fd\sigma=\frac{\pi}{18}(3-t^2)^2,\quad |t|\leqslant\sqrt{3}.$$

提示: 取直角坐标系使 $x+y+z=t$ 是一坐标平面, 并在这一坐标平面

上用极坐标表示 Σ_t.

7. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$, 证明

$$\iint_{\Sigma} f(ax+by+cz)d\sigma=2\pi\int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du.$$

第四节 微分形式的积分

§4.1 定向

在第三章中我们对一元微积分建立了微积分基本公式:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a), \tag{1}$$

其中 f 是可积函数, F 是 f 的原函数, 即

$$dF(x)=f(x)dx,\quad x\in[a,b].$$

对于多元微积分也有类似的公式, 但须做出一些努力才能建立起来.

由于(1)式的成立, 我们可以通过积分号下微分形式的变化来计算定积分, 如

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\circ\varphi(t)\varphi'(t)dt.$$

就是说, dx 可以看作因变量 $x=\varphi(t)$ 的微分. 所以定积分无妨看作"微分形式的积分". 然而对于多元函数的积分还没有这么简便. 在 §1.6 二重积分换元公式(16)中, 我们得不出 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$ 是因变量 $x=\varphi(u,v)$ 和 $y=\psi(u,v)$ 的微分 dx 和 dy 的相乘 $dxdy$. 由此观之, 要解决我们的问题, 应先建立多元微分的运算方法, 并把"微分形式的积分"这个思想推广到高维的情形. 我们现在只把它推广到 R^3, 同时不过于追求概念的严格性. 这样可以大大降低难度, 适于初学, 并可为将来进一步的学习提供感性基础.

我们需要建立一系列的概念，第一个概念是“定向”.

(一) 我们知道，平时表示实数空间R的数轴是有方向的，它的“正向”就是实数增加的方向. 因此数轴是“定向”的，是“有向直线”. 我们往往还在数轴上取一个单位基向量$\boldsymbol{i}$，它的方向与数轴一致(图 95)，可以视为数轴的切向场，也可以视为数轴的方向表示，数轴的指向.



图 95

平时表示R^2的直角坐标系Oxy也是有方向性的，它的方向性表现在：Ox轴反时针方向旋转$90°$与Oy轴重合(图 96). 在这个意义上坐标平面是“定向”的，是“有向平面”. 我们在坐标平面上还取两个单位基向量$\boldsymbol{i}$和$\boldsymbol{j}$，分别与Ox轴和Oy轴同向，则$\boldsymbol{i}$反时针方向旋转$90°$与$\boldsymbol{j}$重合. $\boldsymbol{i}$和$\boldsymbol{j}$可以看作坐标直线（平行于坐标轴的直线）的切向场，也是坐标平面的两个切向场. $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}$便是坐标平面的一个法向场，其中$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$成右手系. 我们也可以把$\boldsymbol{k}$看作坐标平面的指向，$\boldsymbol{k}$指向的那一侧是坐标平面的“正侧”.



图 96

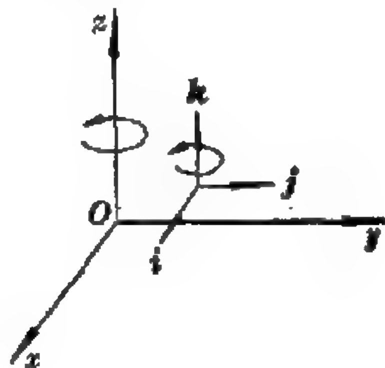


图 97

同样，平时表示R^3的直角坐标系$Oxyz$也是有方向性的，其方向性表现在：Ox, Oy, Oz三个坐标轴顺次成右手系(图 97)，叫做“右手坐标系”. 它也有三个单位基向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$分别与三个坐标

轴 Ox, Oy, Oz 同向，成右手系. $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 是坐标直线的切向场，也是坐标空间的三个切向场. 我们只须用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的关系(右手系)来刻划坐标系的方向性. 所以我们常用的直角坐标空间是"定向"的，是一个"有向空间".

(二) 如果曲线 l 有参数表示

$$(x, y, z) = \boldsymbol{f}(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

其中 $\boldsymbol{f} \in \mathscr{C}^{(1)}$，并且在 (α, β) 上是单射(即 l 是简单曲线或简单封闭曲线)，则说 l 是"定向"的，l 是一段"有向曲线". 我们习惯把切向场 $\boldsymbol{f}'$ 的指向(即参数 t 增加时动点 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{f}(t)$ 在 l 上移动的方向)叫做 l 的"正向".

我们注意到，有向曲线的概念是与参数表示有关的，其方向性是参数表示赋予的. 设 l 又有参数表示

$$(x, y, z) = \boldsymbol{g}(u), \quad u \in [a, b], \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{g}$ 满足 $\boldsymbol{f}$ 所满足的条件. 并且存在 $h \in \mathscr{C}^{(1)}$ 是由 $[\alpha, \beta]$ 到 $[a, b]$ 上的函数，h' 处处非 0，使 $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} \circ h$. 则

$$\boldsymbol{f}' = (\boldsymbol{g}' \circ h) h'.$$

因此，如果 $h' > 0$，则两种参数表示赋予同一方向，(1)和(2)表示同一条有向曲线 l；如果 $h' < 0$，则两种表示赋予相反方向，(1)和(2)表示不同的有向曲线(同一条曲线，但方向相反).

关于 $\boldsymbol{f}$ 为单射的假定是为了排除重点. 如果这个条件不成立，则就可能出现图 98 中的情况，l 在一段 $\widehat{AB}$ 上有相反的两个切向场. 这时参数表示(1)似乎不能算给 l 定了向. 如果把定义区间 $[\alpha, \beta]$ 从某一点 γ 断开为两个区间 $[\alpha, \gamma]$ 和 $[\gamma, \beta]$，则可得两段有向曲线，但合起来不是定向的.

(三) 如果曲面 Σ 有参数表示

$$(x, y, z) = \boldsymbol{f}(u, v), \quad (u, v) \in D, \tag{3}$$

其中 $D \subset R^2$ 是一区域，$\boldsymbol{f} \in \mathscr{C}^{(1)}$ 是一单射，且 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{f}'_u \times \boldsymbol{f}'_v$ 处处非

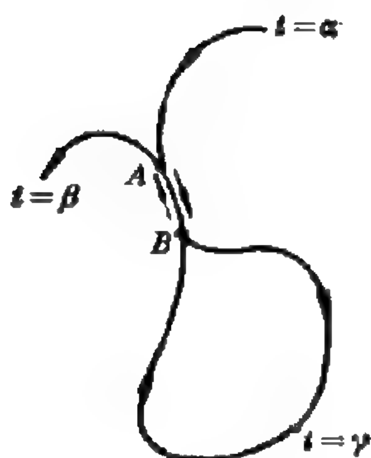


图 98

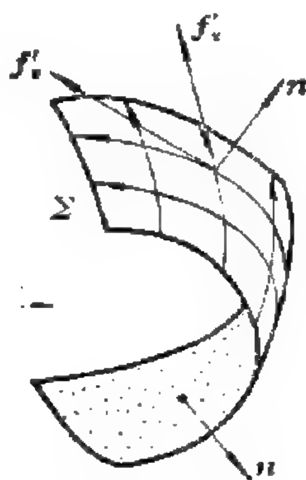


图 99

0，则说 Σ 是一"有向曲面"．这时曲面上有一族 u-曲线和一族 v-曲线(相当于坐标平面上的两族坐标直线)，因此有两个切向场 $\boldsymbol{f}'_u$ 和 $\boldsymbol{f}'_v$ (相当于坐标平面上的 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$)，它们就给曲面定了向．习惯地把法向场 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v$ 指向的那一侧叫做 Σ 的"正侧"，也就是把 $\boldsymbol{n}$ 看作 Σ 的方向(图 99)．

同样我们注意到，曲面是由参数表示定向的．设 Σ 又有参数表示

$$(x, y, z)=\boldsymbol{g}(s, t),\quad (s, t)\in\Delta, \tag{4}$$

其中 $\Delta\subset R^2$ 是一区域，$\boldsymbol{g}$ 满足 $\boldsymbol{f}$ 所满足的条件，并且存在 $\boldsymbol{h}\in\mathscr{C}^{(1)}$ 是由 D 到 Δ 上的单射，$\det J\boldsymbol{h}$ 处处非 0，使 $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{h}$．则(§ 3.2(9))

$$\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v=(\boldsymbol{g}'_s\circ\boldsymbol{h})\times(\boldsymbol{g}'_t\circ\boldsymbol{h})\det J\boldsymbol{h}. \tag{5}$$

因此 $\det J\boldsymbol{h}$ 的符号就决定(3)和(4)是否表示同一有向曲面．

如果 $\boldsymbol{f}$ 不是单射，则在 Σ 上就会有重点．设 (u_1, v_1) 和 (u_2, v_2) 对应于 Σ 上同一点，则在此点上就可能会有两个不同的法向量 $\boldsymbol{n}(u_1, v_1)$ 和 $\boldsymbol{n}(u_2, v_2)$，它们的方向可能相反．这样 $\boldsymbol{f}$ 就不能给曲面定向．

(四) 曲面定向的方法也同样适用于平面区域．如果 xy 平面

上的区域 Σ 有参数表示

$$(x, y)=\boldsymbol{f}(u, v), \quad (u, v)\in D,$$

其中 D 是 uv 平面上的区域, $\boldsymbol{f}$ 满足(3)式中 $\boldsymbol{f}$ 所满足的条件, 则视 Σ 为一片曲面是定向的. 这时 Σ 上有两个切向场 $\boldsymbol{f}'_u$ 和 $\boldsymbol{f}'_v$, 同时还有两个切向场即坐标直线的切向场 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{j}$. 我们知道(§ 3.2(5)),

$$\boldsymbol{f}'_u \times \boldsymbol{f}'_v=(\det J\boldsymbol{f})\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}.$$

因此, 如果 $\det J\boldsymbol{f}>0$, 则 Σ 与 xy 平面同向; 如果 $\det J\boldsymbol{f}<0$, 则 Σ 与 xy 平面异向.

坐标平面上的区域还可以"自然定向": 当 xy 平面上的区域 Σ 不与参数表示相联系时, 即 x 和 y 是自变量时, 如果我们称 Σ 为有向区域, 那就是视 Σ 有参数表示

$$(x, y)=\boldsymbol{I}(x, y), \quad (x, y)\in\Sigma,$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 是恒等映射. 由于 $\boldsymbol{I}'_x=\boldsymbol{i}, \boldsymbol{I}'_y=\boldsymbol{j}$, 所以这也就是视 Σ 与 xy 平面同向. 这一定向方法叫做"自然定向".

(五) 平面区域的定向方法同样适用于空间区域. 如果坐标空间 xyz 中的区域 V 有参数表示

$$(x, y, z)=\boldsymbol{f}(u, v, w), \quad (u, v, w)\in D,$$

其中 D 是 uvw 空间中的区域, $\boldsymbol{f}\in\mathscr{C}^{(1)}$ 是单射, 且 $\det J\boldsymbol{f}$ 处处非 0, 则 V 是定向的, 是一"有向区域". 事实上, $\boldsymbol{f}$ 把 D 中的坐标直线 $v=v_0$, $w=w_0$ 映成 V 中通过点 $(x_0, y_0, z_0)=\boldsymbol{f}(u_0, v_0, w_0)$ 的 u-曲线 $(x, y, z)=\boldsymbol{f}(u, v_0, w_0)$; 把 $w=w_0$, $u=u_0$ 映成通过点 (x_0, y_0, z_0) 的 v-曲线 $(x, y, z)=\boldsymbol{f}(u_0, v, w_0)$; 把 $u=u_0$, $v=v_0$ 映成通过点 (x_0, y_0, z_0) 的 w-曲线 $(x, y, z)=\boldsymbol{f}(u_0, v_0, w)$. 它们在点 (x_0, y_0, z_0) 分别有切向量 $\boldsymbol{f}'_u(u_0, v_0, w_0)$, $\boldsymbol{f}'_v(u_0, v_0, w_0)$, $\boldsymbol{f}'_w(u_0, v_0, w_0)$. 所以在 V 中有三个切向场 $\boldsymbol{f}'_u, \boldsymbol{f}'_v, \boldsymbol{f}'_w$. 另一方面, 在 V 中还有三个切向场即坐标直线的切向场 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. 由所设,

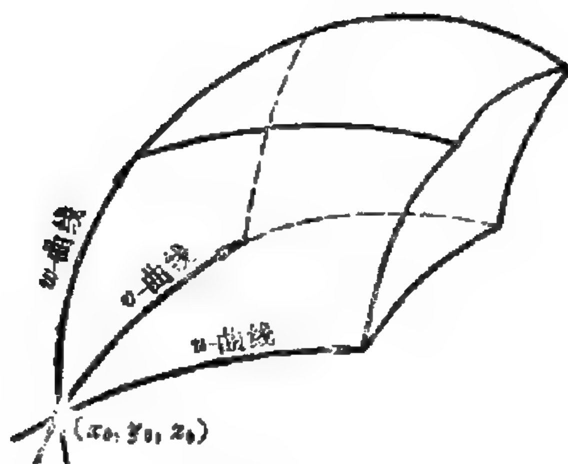


图 100

$$f'_u \times f'_v \cdot f'_w = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x'_w & y'_w & z'_w \end{vmatrix} = \det Jf = (\det Jf)\, \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} \quad (6)$$

不变号. 因而 f'_u, f'_v, f'_w 或是处处与 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 一样成右手系, 或是处处与 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 相反, 成左手系, 视 $\det Jf$ 的正负而定. 所以V 有方向性. 如果 $\det Jf>0$, 则V 与 xyz 空间同向; 如果 $\det Jf<0$, 则为异向.

同样, V 也有自然定向: 当V 不与参数表示相联系, 即 x, y, z 是自变量时, 如果称V 是有向区域, 即视V 有参数表示

$$(x, y, z) \quad I(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V,$$

其中 I 是恒等映射, 亦即视V 与 xyz 空间同向.

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 实数轴(R), xy 坐标平面(R^2)和 xyz 坐标空间(R^3)是怎样定向的?

(2) 曲线, 曲面, 平面和空间区域是怎样定向的? 在方法上与坐标空间的定向有何联系?

(3) 平面和空间区域的自然定向是什么意思?

(4) Jacobi 行列式在定向中起什么作用?

2. 设曲面(Möbius 带)的方程为

$$(x, y, z)=f(\theta, t)=((1-t\sin\theta)\cos2\theta,\ (1-t\sin\theta)\sin2\theta,\ t\cos\theta),$$

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad |t|\leqslant\frac{1}{2}.$$

则

$$f(\pi, t)=f(0, -t)=(1, 0, -t).$$

证明在重点上有相反方向的法向量. 你能否想像出这张曲面的形状?

§4.2 外积和外微分

现在我们来引进多元微分的运算方法, 先作形式定义, 然后再作几何解释.

(一) 设

$$x=\varphi(u, v), \tag{1}$$

其 $\varphi\in\mathscr{C}^{(1)}$ 是定义在区域上的二元函数, 则变量 x 的微分 dx 按第六章 §2.1 定义 1 和定理 1 应为(参见第二章 §1.6 中关于变量微分的概念)

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv, \tag{2}$$

这里 du, dv 是两个任意数, 即第六章 §2.1 定义 1 中的 h_1 和 h_2, 是两个独立变量.

如果又有

$$y=\psi(u, v) \tag{3}$$

其中 $\psi\in\mathscr{C}^{(1)}$, 则同样有微分 dy. 我们定义微分 dx 和 dy 的外积为

$$dx\wedge dy=\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}dudv=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}dudv, \tag{4}$$

其中 du, dv 和(2)式中一样是两个任意数, 两个独立变量. 但如同区域自然定向那样, 变量 u, v 本身可以看成用它们自己表示自己,

即

$$u=u,\quad v=v.$$

因此按(4)式又得

$$du\wedge dv=\frac{\partial(u,v)}{\partial(u,v)}dudv=dudv. \tag{5}$$

所以(4)式又可写成

$$dx\wedge dy=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\wedge dv. \tag{6}$$

在(1)式和(3)式中，如果 u,v 是中间变量，即又有

$$u=\alpha(s,t),\quad v=\beta(s,t),$$

其中 $\alpha,\beta\in\mathscr{C}^{(1)}$. 代入(1)式和(3)式按(6)式和第六章§2.3(5)式得

$$dx\wedge dy=\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}ds\wedge dt=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}ds\wedge dt. \tag{7}$$

但按(6)式又有

$$du\wedge dv=\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}ds\wedge dt.$$

将此式代入(7)式后最终仍得(6)式. 这就相当于第二章§1.6中一元微分的一阶微分形式不变性. 因此,(6)式中之 u,v 既可以是自变量,也可以是因变量(中间变量).

如果在方程(1)和(3)以外又有方程

$$z=\chi(u,v), \tag{8}$$

其中 $\chi\in\mathscr{C}^{(1)}$. 则除(6)式外又有

$$dy\wedge dz=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}du\wedge dv, \tag{9}$$

$$dz\wedge dx=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}du\wedge dv. \tag{10}$$

我们要特别指出,在(6),(9),(10)三式中 dx,dy,dz 是按字母 x,y,z 的自然顺序(图 101)进行运算的. 事实上,由行列式性质易

见，外积运算有下列“反称性”：

$$dx\wedge dy=-dy\wedge dx,\ dy\wedge dz=-dz\wedge dy,\ dz\wedge dx=-dx\wedge dz. \tag{11}$$

$$dx\wedge dx=dy\wedge dy=dz\wedge dz=0. \tag{12}$$

（二）设

$$x=\varphi(u,v,w),\quad y=\psi(u,v,w),\quad z=\chi(u,v,w),$$

其中 $\varphi,\psi,\chi\in\mathscr{C}^{(1)}$. 则变量 x 的微分为

$$dx=\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv+\frac{\partial x}{\partial w}dw,$$

同样还有变量 y 和 z 的微分. 我们仍和前面一样定义微分 dx,dy,dz 的外积为

$$dx\wedge dy\wedge dz=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}dudvdw. \tag{13}$$

其中 du,dv,dw 为任意数，是独立变量. 与(6)式同样的道理，此式可以写成

$$dx\wedge dy\wedge dz=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}du\wedge dv\wedge dw. \tag{14}$$

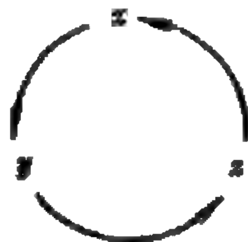


图 101

这一形式和(6)式同样有“不变性”.

同样，由行列式的性质易见下列“反称性”(图 101)：

$$\begin{aligned}dx\wedge dy\wedge dz&=dy\wedge dz\wedge dx=dz\wedge dx\wedge dy\\&=-dx\wedge dz\wedge dy=-dz\wedge dy\wedge dx\\&=-dy\wedge dx\wedge dz,\end{aligned} \tag{15}$$

$$dx\wedge dx\wedge dy=dy\wedge dy\wedge dz=\cdots=dx\wedge dz\wedge dz=0. \tag{16}$$

（三）设 $M\subset R^3$ 是一片有向曲面，参数表示为

$$(x,y,z)=f(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

其中$D\subset R^2$ 是 uv 平面上的区域. 由 §3.2(4)，M上的小块面积（意指面积元素，即切面上 $f'_u du$ 和 $f'_v dv$ 张成的平行四边形面积）为

$$d\sigma=\|\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v\|dudv.$$

考虑法向量

$$\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{k},$$

单位化得

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v}{\|\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v\|}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}.$$

这是 M 上的单位法向场，与 M 同向．于是面积 $d\sigma$ 在 xy 平面上的投影是

$$\cos\gamma d\sigma=\cos\gamma\|\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v\|dudv=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv.$$

再由(4)式便知

$$dx\wedge dy=\cos\gamma d\sigma. \tag{17}$$

所以，外积 $dx\wedge dy$ 是曲面上的面积 $d\sigma$ 在坐标平面 xy 上的投影．同理，外积

$$dy\wedge dz=\cos\alpha d\sigma, \tag{18}$$

$$dz\wedge dx=\cos\beta d\sigma \tag{19}$$

分别是 $d\sigma$ 在 yz 平面和 zx 平面上的投影．所以外积 $dx\wedge dy$, $dy\wedge dz$ 和 $dz\wedge dx$ 就是投影面积，是有正负的，是“有号面积”．

（四）特别，若 $M\subset R^2$ 是 xy 平面上的有向区域，参数表示为

$$(x,y)=f(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

其中 $D\subset R^2$ 是 uv 平面上的区域，则由(6)式和§3.2(5)式，

$$dx\wedge dy=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\wedge dv=\pm\|\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v\|du\wedge dv.$$

这是M中由切向量$f'_u du$, $f'_v dv$张成的平行四边形（图 102）的有号面积. 如果M与xy平面同向，则$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$处处为正，$dx\wedge dy>0$；如果异向，则$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$处处为负，$dx\wedge dy<0$. 只当$M$为自然定向($x,y$为自变量)时由(4)式$dx\wedge dy=dx\,dy$是$M$中小区间的面积.

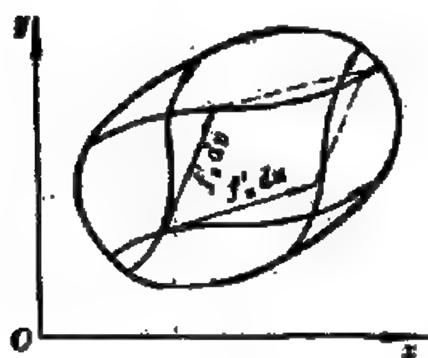


图 102

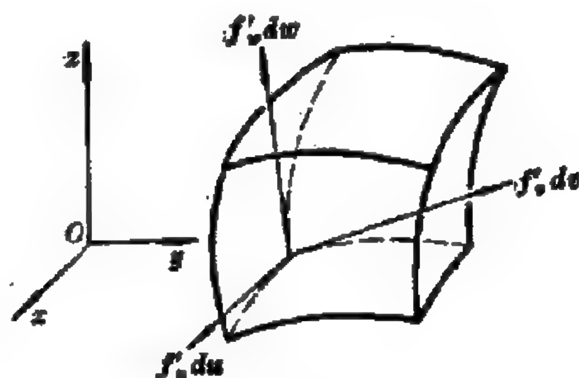


图 103

（五）同样，如果$M\subset R^3$是xyz空间中的有向区域，参数表示为

$$(x,y,z)=f(u,v,w),\quad (u,v,w)\in D,$$

其中$D\subset R^3$是uvw空间中的区域. 则由(14)式和§4.1(6)式,

$$\begin{aligned}dx\wedge dy\wedge dz&=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}du\wedge dv\wedge dw\\&=f'_u\times f'_v\cdot f'_w du\wedge dv\wedge dw.\end{aligned}$$

这是M中由切向量$f'_u du$, $f'_v dv$, $f'_w dw$张成的平行六面体(图 103)的有号体积. 如果M与xyz空间同向，则$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$处处为正，$dx\wedge dy\wedge dz>0$；如果异向，则$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$处处为负，$dx\wedge dy\wedge dz<0$. 只当$M$为自然定向时由(13)式$dx\wedge dy\wedge dz=dx\,dy\,dz$是$M$中小区间的体积.

（六）在作外积运算时，我们规定可以应用分配律和结合律，并且遇有与数相乘时可以交换．例如，由反称性(11)式和(12)式我们便可以一般地算得

$$
\begin{aligned}
&(a_1dx+b_1dy)\wedge(a_2dx+b_2dy)\\
&=a_1b_2dx\wedge dy+b_1a_2dy\wedge dx=(a_1b_2-a_2b_1)dx\wedge dy\\
&=\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}dx\wedge dy.
\end{aligned}
$$

同样由反称性(15)式和(16)式可以算得

$$
\begin{aligned}
&(a_1dx+b_1dy+c_1dz)\wedge(a_2dx+b_2dy+c_2dz)\\
&\qquad\qquad\wedge(a_3dx+b_3dy+c_3dz)\\
&=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}
$$

（七）设 $\Omega\subset R^3$ 是 xyz 空间中的一个区域，P,Q,R 都是 Ω 上的函数，则表达式

$$\omega=Pdx+Qdy+Rdz, \tag{20}$$

$$\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy, \tag{21}$$

$$\omega=Pdx\wedge dy\wedge dz \tag{22}$$

分别叫做 Ω 上的一次，二次和三次“微分形式”．而 Ω 上的任一函数 P 则叫做 Ω 上的“零次微分形式”．由(一)中的反称性可知，在 R^3 中不存在四次以上的微分形式．在上面各微分形式 ω 中，P,Q,R 叫做 ω 的“系数”．若 $P,Q,R\in\mathscr{C}^{(1)}$，则称 $\omega\in\mathscr{C}^{(1)}$．微分形式也简称为“形式”．

（八）我们再对微分形式定义“外微分”运算“d”．

若 $\omega=P\in\mathscr{C}^{(1)}$ 是零次微分形式，则定义外微分 $d\omega$ 就是微分：

$$d\omega=\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy+\frac{\partial P}{\partial z}dz, \tag{23}$$

即是一个一次微分形式.

若 $\omega\in\mathscr{C}^{(1)}$ 是一次微分形式(20), 则定义其外微分为

$$d\omega=dP\wedge dx+dQ\wedge dy+dR\wedge dz. \tag{24}$$

这时由(23)式和外积运算(11)式和(12)式容易算得

$$d\omega=\begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \tag{25}$$

是一个二次微分形式.

按(24)式的方法同样定义二次微分形式的外微分. 若 $\omega\in\mathscr{C}^{(1)}$ 是二次微分形式(21), 则由(15)式和(16)式容易算得

$$d\omega=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz. \tag{26}$$

是一个三次微分形式.

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 微分外积 $dx\wedge dy$ 和 $dx\wedge dy\wedge dz$ 有什么几何意义?

(2) 在 R^3 中共有几种微分形式? 它们的外微分为何?

2. 在 R^2 中有哪些微分形式? 算出它们的外微分.

3. 计算

(1) $(xdx+ydy)\wedge(zdz-2dx)$.

(2) $(dx+dy+dz)\wedge(xdx\wedge dy-2dy\wedge dz)$.

4. 计算 $d\omega$, 设

(1) $\omega=xy+yz+zx$.　　(2) $\omega=xydx$.

(3) $\omega=(xy+yz)dx$.

(4) $\omega=xydx+x^3dy$.　　(5) $\omega=x^2ydx-yze^xdy$.

(6) $\omega=xy^2dy\wedge dz-z^2xdx\wedge dy$.

(7) $\omega=xydy\wedge dz+yzdz\wedge dx+zxdx\wedge dy$.

5. 设微分形式 $\omega\in\mathscr{C}^{(2)}$, 证明 $d(d\omega)=0$.

§ 4.3 一次微分形式的积分

我们已经建立了微分形式的运算，现在要定义微分形式的积分。

定义 1 设$\Omega\subset R^3$是一区域，$M\subset\Omega$是一段有向曲线，参数表示为

$$(x,y,z)=f(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta. \tag{1}$$

又

$$\omega=Pdx+Qdy+Rdz\in\mathscr{C} \tag{2}$$

是Ω上的一次微分形式。定义ω在M上的积分为

$$\begin{aligned}\int_M\omega&=\int_M Pdx+Qdy+Rdz\\&=\int_\alpha^\beta\left[P\circ f(t)\frac{dx}{dt}+Q\circ f(t)\frac{dy}{dt}+R\circ f(t)\frac{dz}{dt}\right]dt.\end{aligned} \tag{3}$$

这个积分也可以用向量形式表示。记

$$\boldsymbol{p}=(x,y,z),\quad d\boldsymbol{p}=(dx,dy,dz),\quad \boldsymbol{F}=(P,Q,R).$$

则一次微分形式(2)可以写成

$$\omega=\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}.$$

所以(3)式又可以表示为

$$\int_M\omega=\int_M\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}=\int_\alpha^\beta\boldsymbol{F}\circ f(t)\cdot f'(t)dt. \tag{4}$$

下面我们对这个定义作几点说明。

1° 定义 1 在一定的意义上与参数表示无关。事实上，设有向曲线M又有参数表示

$$(x,y,z)=g(u),\quad a\leqslant u\leqslant b, \tag{5}$$

其中g满足§ 4.1(2)式中g所满足的全部条件。由§ 4.1(二)中的讨论应有$h'>0$，所以$h(\alpha)=a$，$h(\beta)=b$。再由定积分换元即得

$$\int_a^b \boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{g}(u)\cdot\boldsymbol{g}'(u)du=\int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{g}\circ h(t)\cdot\boldsymbol{g}'\circ h(t)h'(t)dt$$

$$=\int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{f}'(t)dt.$$

2° 在(5)式中，如果 $h'<0$，则(5)式所表示的有向曲线与 M 的方向相反，记为 $-M$。于是同样由积分换元可得

$$\int_a^b \boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{g}(u)\cdot\boldsymbol{g}'(u)du=-\int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{f}(t)\cdot\boldsymbol{f}'(t)dt,$$

所以

$$\int_{-M}\omega=-\int_M\omega. \tag{6}$$

3° 如果 $\Omega\subset R^2$ 是一平面区域，这时定义 1 中的 ω 便成为

$$\omega=Pdx+Qdy.$$

若 $Q=0$，即 $\omega=Pdx\in\mathscr{C}$，且有向曲线 $M\subset\Omega$ 的方程为

$$y=f(x),\quad x\in[a,b],$$

则由定义 1 立得

$$\int_M\omega=\int_M Pdx=\int_a^b P(x,f(x))dx. \tag{7}$$

同样，若 $\omega=Qdy\in\mathscr{C}$，且有向曲线 M 的方程为

$$x=g(y),\quad y\in[c,d],$$

则

$$\int_M\omega=\int_M Q\,dy=\int_c^d Q(g(y),y)\,dy. \tag{8}$$

4° 在(4)式中，因为

$$\boldsymbol{f}'(t)dt=\frac{\boldsymbol{f}'(t)}{\|\boldsymbol{f}'(t)\|}\|\boldsymbol{f}'(t)\|\,dt=\boldsymbol{t}(t)ds,$$

其中

$$\boldsymbol{t}=\frac{\boldsymbol{f}'}{\|\boldsymbol{f}'\|}$$

是与 $\boldsymbol{f}'$ 同向的单位切向场，ds 是弧长元素(§3.1(10))。所以由

(4)式又得

$$\int_M \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}=\int_M \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{t}ds. \tag{9}$$

这个式子有明显的物理意义. 设 $\boldsymbol{F}$ 是 Ω 上的力场(图 104), 则 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}ds$ 是 $\boldsymbol{F}$ 沿切向 $\boldsymbol{t}$ 移动距离 ds 所作之"元功". 因此(9)式就可用来定义为力场 $\boldsymbol{F}$ 沿 M(有向曲线)所作之功.

例 1 设有向曲线 M 的方程为

$$x=t,\quad y=t^2,\quad z=t^3,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

又

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=(y^2-z^2)\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}-x^2\boldsymbol{k}.$$

计算积分 $\int_M \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}$.

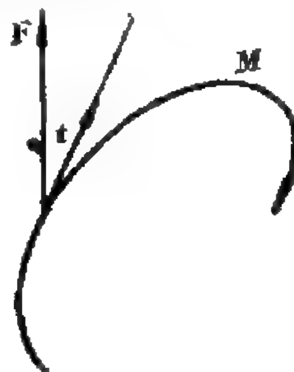


图 104

解 由(4)式,

$$\int_M \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}=\int_0^1[(t^4-t^6)\boldsymbol{i}+2t^3\boldsymbol{j}-t^2\boldsymbol{k}]\cdot(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k})dt$$

$$=\int_0^1 (2t^4-t^6)dt=\frac{9}{35}. \qquad \square$$

例 2 在图 105 中指出的各有向曲线上计算积分

$$\int_L xydx,\qquad \int_A xydx,\qquad \int_C xydx.$$

解 L 的方程为

$$y=x,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

由(7)式,

$$\int_L xydx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3};$$

$$\int_A xydx=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}.$$

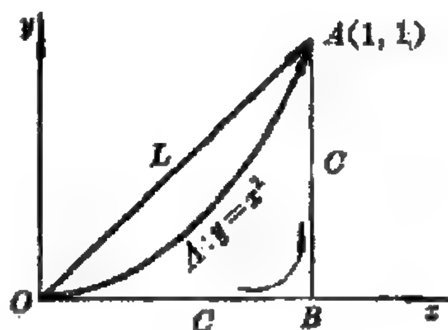


图 105

C 是由两段有向曲线 $\overline{OB}$ 和 $\overline{BA}$ 相接而成的. $\overline{OB}$ 的方程是

$$x=x,\quad y=0,\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

在 $\overline{BA}$ 上 $dx=0$. 所以由(3)式,

$$\int_C xy\,dx=\int_{\overline{OB}}xy\,dx+\int_{\overline{BA}}xy\,dx=\int_{\overline{OB}}x\cdot 0\,dx=0. \qquad \square$$

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 一次微分形式ω在有向曲线M上的积分是如何定义的? 这个定义在什么意义上与参数表示无关? M的方向性对积分有何体现?

(2) 一次微分形式的积分与曲线积分有何关系? 在此关系中方向性是如何体现的? 这个关系反映什么物理意义?

(3) 如何把$\int_M P\,dx$, $\int_M Q\,dy$, $\int_M R\,dz$表示为曲线积分?

(4) 一元函数的定积分$\int_a^b f(x)\,dx$是否属于微分形式的积分?

2. 计算下列积分:

(1) $\int_M \dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$, M是圆周$x^2+y^2=1$, 方向为反时针方向。

(2) $\int_M (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$, M是椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 方向为反时针方向.

(3) $\int_M (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$, M: $x=y^2$, $|y|\leqslant 1$.

(4) $\int_M x\,dy$, M是直线$2x+y=1$与坐标轴构成的三角形, 方向为反时针方向.

(5) $\int_M (x^2+y^2)\,dy$, M是直线$x=1$, $x=3$, $y=1$, $y=4$构成的矩形, 方向为反时针方向.

(6) $\int_M z^2x\,dx+x^2y\,dy+y^2z\,dz$, M: $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

(7) $\int_M (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$,

M: $x=a\sin^2 t$, $y=2a\sin t\cos t$, $z=a\cos^2 t$, $0\leqslant t\leqslant \pi$.

(8) $\int_M (y^2-z^2)\,dx+(z^2-x^2)\,dy-(x^2-y^2)\,dz$, M是球面$x^2+y^2+z^2=1$ $(x,y,z\geqslant 0)$的周界, 球面的外侧在M方向的左边.

(9) $\int_M ydx+zdy+xdz$, M是平面 $x+y=2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 交成的圆周，从原点看去，M 为顺时针方向.

(10) 上题，M是曲面 $z=xy$ 和 $x^2+y^2=1$ 的交线，沿M的方向前进时，z 轴的正向在左手.

3. 弹性力的方向指向坐标原点，大小与质点到原点的距离成比例. 质点在平面上依反时针方向画出椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一卦限中的部份，求弹性力所作之功.

4. 计算力场 $F(x,y,z)=(y^2,z^2,x^2)$ 沿有向曲线 M: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=ax\,(z\geqslant 0)$所作之功，从 xy 平面向上看，M 为反时针方向.

5. 设质量为m的质点受力场 F 的作用沿曲线M运动，M的起点为 a，终点为 b，质点的运动速度为 v. 证明

$$\int_M F\cdot dp=\frac{1}{2}mv^2\Big|_a^b.$$

6. 设 $\omega=P(x)dx+Q(y)dy$，证明对一切封闭曲线M有 $\int_M \omega=0$.

7. 证明 $\left|\int_M F\cdot dp\right|\leqslant\int_M \|F\|ds$.

§4.4 二次微分形式的积分

定义 1 设$M\subset R^2$是一有向闭域，参数表示为

$$(x,y)=f(u,v),\quad (u,v)\in D, \tag{1}$$

其中 $D\subset R^2$ 是 uv 平面上有面积的闭域. 又

$$\omega=Pdx\wedge dy\in\mathscr{C}$$

是M上的二次微分形式. 定义 ω 在M上的积分为

$$\int_M \omega=\iint_M Pdx\wedge dy$$

$$=\iint_D P\circ f(u,v)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv \tag{2}$$

定义中的D可以看作是自然定向的，因此由定义 1 本身和

§ 4.2(5)式，(2)式又可以写成

$$\int_M \omega = \iint_M P dx \wedge dy$$

$$= \iint_D P \circ f(u, v) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv. \tag{3}$$

关于这个定义，我们作以下几点说明.

1° 定义 1 在一定的意义上与参数表示无关. 道理与下面定义 2 的说明 1° 完全相同，因此从略.

2° 如果 M 与 xy 平面同向，则 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$ (§4.1(四))，因此由(2)式和二重积分换元便有

$$\iint_M P dx \wedge dy = \iint_M P dx dy. \tag{4}$$

如果异向，则 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} < 0$，因此由同样的道理便有

$$\iint_M P dx \wedge dy = -\iint_M P dx dy.$$

这就是二次形式在有向闭域上的积分与二重积分的异同. 所以二重积分也是微分形式的积分.

我们既已明白了二次形式的积分与二重积分的关系，就可以看到(3)式是对 § 1.6 二重积分换元公式(16)的一个修改. 我们看到，(3)式两边积分号下的微分形式是相等的(§ 4.2(6)式)，这样它就和定积分换元完全一样了.

3° 如果我们把与 M 相反方向的有向闭域记为 $-M$ (即 M 和 $-M$ 表示同一闭域，方向相反)，则由 2° 可见

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega.$$

4° 以上的内容逐字逐句地适用于 R^3 中三次形式的积分:

$$\iiint\limits_M P dx \wedge dy \wedge dz$$

$$= \iiint\limits_D P \circ f(u, v, w) \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du \wedge dv \wedge dw. \tag{5}$$

定义 2 设 $\Omega \subset R^3$ 是一区域，$M \subset \Omega$ 是一有向曲面，参数表示为

$$(x, y, z) = f(u, v), \quad (u, v) \in D, \tag{6}$$

其中 $D \subset R^2$ 是一有面积的闭域；又

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \in \mathscr{C}$$

是 Ω 上的二次微分形式. 定义 ω 在 M 上的积分为

$$\int_M \omega = \iint\limits_M P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

$$= \iint\limits_D \left[P \circ f \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \circ f \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \circ f \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du \wedge dv$$

$$= \iint\limits_D \begin{vmatrix} P \circ f & Q \circ f & R \circ f \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} du \wedge dv. \tag{7}$$

令 $F = (P, Q, R)$，则上式又可写成

$$\int_M \omega = \iint\limits_D F \circ f \cdot f'_u \times f'_v \, du \wedge dv. \tag{8}$$

我们对这个定义说明如下.

1° 定义 2 在一定的意义上与参数表示无关. 事实上，设有向曲面 M 又有参数表示

$$(x, y, z) = g(s, t), \quad (s, t) \in \Delta, \tag{9}$$

其中 $\Delta\subset R^2$ 是有面积的闭域，$\mathbf{g}$ 满足 § 4.1(4)式中的 $\mathbf{g}$ 所满足的全部条件，则 $\det J\boldsymbol{h}>0$. 我们注意到，D 和 Δ 都是自然定向的，因此下式中的积分都是通常的二重积分. 由 § 4.1(5)和二重积分换元便得

$$\iint_D \boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v du\wedge dv$$

$$=\iint_D \boldsymbol{F}\circ\mathbf{g}\circ\boldsymbol{h}\cdot\mathbf{g}'_s\circ\boldsymbol{h}\times\mathbf{g}'_t\circ\boldsymbol{h}\det J\boldsymbol{h}du\wedge dv$$

$$=\iint_\Delta \boldsymbol{F}\circ\mathbf{g}\cdot\mathbf{g}'_s\times\mathbf{g}'_t ds\wedge dt.$$

2° 在(9)式中，如果 $\det J\boldsymbol{h}<0$，则(9)式所表示的有向曲面与 M 的方向相反，记为 $-M$. 于是同样由积分换元可得

$$\iint_D \boldsymbol{F}\circ\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v du\wedge dv$$

$$=-\iint_\Delta \boldsymbol{F}\circ\mathbf{g}\cdot\mathbf{g}'_s\times\mathbf{g}'_t ds\wedge dt,$$

所以

$$\int_M \omega=-\int_{-M}\omega.$$

3° 令

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v}{\|\boldsymbol{f}'_u\times\boldsymbol{f}'_v\|}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

这是与 M 同向的单位法向场，则由 § 4.2(17)，(18)和(19)式我们可得

$$\iint_M P\,dy\wedge dz=\iint_M P\cos\alpha d\sigma,$$

$$\iint_M Q\,dz\wedge dx=\iint_M Q\cos\beta d\sigma, \tag{10}$$

$$\iint_M R\,dx\wedge dy=\iint_M R\cos\gamma d\sigma.$$

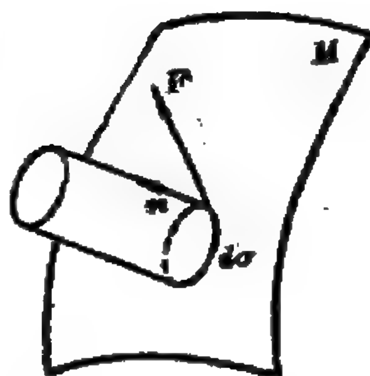


图 106

统一起来就是

$$\int_M \omega=\iint_M \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma. \qquad (11)$$

此式右端的积分是有物理意义的. 考虑一流动着的流体流经空间区域Ω, 则在Ω中每一点均有流速, 于是得一速度场$\boldsymbol{F}$. 再在Ω中设想一块有向曲面M (图 106), 我们要计算单位时间内流体顺着M的方向流过M的流量V. 为此, 在M(的切面)上取一小块面积 $d\sigma$, $\boldsymbol{n}$ 是与M同向的单位法向场, 则 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma$ 是单位时间内流体顺着M的方向流过面积 $d\sigma$ 的流量. 将这些流量在 M 上相加便得(11)式中右端的积分, 即是V.

例 1 设有向曲面M是以原点为中心的球面, 方向朝外(外侧是M的正侧). 计算积分

$$A=\iint_M x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy.$$

解 用第五章 § 1.2 例 2 中的球面参数方程, 这时 $\boldsymbol{f}'_\theta\times\boldsymbol{f}'_\varphi$ 朝外, 所以它定义了M. 由(7)式,

$$A=\iint_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}}\begin{vmatrix} x & y & z\\ \dfrac{\partial x}{\partial\theta} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} & \dfrac{\partial z}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}d\theta\wedge d\varphi$$

$$=\iint_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\pi\\0\leqslant\varphi\leqslant2\pi}}R^3\sin\theta d\theta\wedge d\varphi=4\pi R^3. \quad \square$$

4° 如果有向曲面M的方程为

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

$D\subset R^2$ 是有面积的闭域，(注意 M 的方向)则由(7)式即得

$$\iint_M R\,dx\wedge dy=\iint_D R(x,y,f(x,y))\,dx\wedge dy. \tag{12}$$

同样，如果 M 的方程为

$$x=f(y,z),\quad (y,z)\in D,$$

则

$$\iint_M P\,dy\wedge dz=\iint_D P(f(y,z),y,z)\,dy\wedge dz. \tag{13}$$

如果 M 的方程为

$$y=f(z,x),\quad (z,x)\in D,$$

则

$$\iint_M Q\,dz\wedge dx=\iint_D Q(x,f(z,x),z)\,dz\wedge dx. \tag{14}$$

例 2 设有向曲面 M 是一柱面 $x^2+y^2=R^2$, $0\leqslant z\leqslant h$, 方向朝外. 计算积分

$$A=\iint_M yz\,dy\wedge dz+zx\,dz\wedge dx+xy\,dx\wedge dy.$$

解 应用(10)式. 因为 M 的方向垂直于 z 轴，所以

$$dx\wedge dy=\cos\gamma\,d\sigma=0,$$

所以

$$\iint_M xy\,dx\wedge dy=0.$$

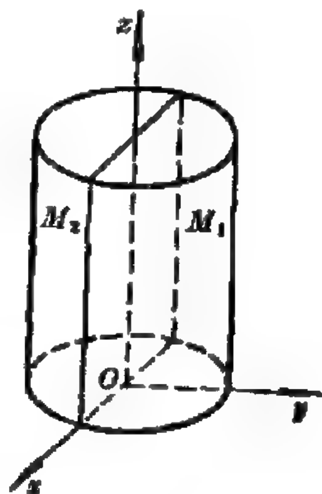


图 107

再计算第二项. 如图 107, 将 M 分成 M_1 和 M_2. 这两半对称，zx 在对称点上相等. 又因外侧是正侧，即单位法向场 $\boldsymbol{n}$ 朝外，所

以在M_1上$\cos\beta>0$，在M_2上$\cos\beta<0$. 因此M_1和M_2上的小块面积在zx平面上的投影$dz\wedge dx=\cos\beta d\sigma$相抵．所以

$$\iint_M zx\,dz\wedge dx=0.$$

或者用(14)式来计算：

$$\begin{aligned}\iint_M zx\,dz\wedge dx&=\iint_{M_1} zx\,dz\wedge dx-\iint_{M_2} zx\,dz\wedge dx\\&=\iint_{M_1} zx\,dz\wedge dx-\iint_{-M_2} zx\,dz\wedge dx\\&=\iint_{\substack{|x|\leqslant R\\0\leqslant z\leqslant h}} zx\,dz\wedge dx-\iint_{\substack{|x|\leqslant R\\0\leqslant z\leqslant h}} zx\,dz\wedge dx=0.\end{aligned}$$

同理

$$\iint_M yz\,dy\wedge dz=0.$$

所以

$$A=0.\qquad \square$$

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) 平面有向闭域上的二次微分形式的积分是如何定义的？它与二重积分有何异同？

(2) 有向曲面上的二次形式的积分是如何定义的？这个定义在什么意义上与参数表示无关？M的方向性对积分有何体现？

(3) 二次微分形式的积分与曲面积分有何关系？在此关系中方向性是如何体现的？这个关系反映什么物理意义？

2. 计算下列积分：

(1) $\iint_M zx\,dy\wedge dz+yz\,dz\wedge dx+x^2dx\wedge dy$，$M$为$x^2+y^2+z^2=a^2$，方向朝外.

(2) $\iint\limits_M f(x)dy\wedge dz+g(y)dz\wedge dx+h(z)dx\wedge dy$, M是$[0,a]\times[0,b]\times[0,c]$的边界，方向朝外.

(3) $\iint\limits_M xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy$, M为$x+y+z=1(x,y,z\geqslant 0)$，方向朝上.

(4) $\iint\limits_M \frac{dx\wedge dy}{z}$, M为$x^2+y^2+z^2=a^2$，方向朝外.

(5) $\iint\limits_M x^2dy\wedge dz+y^2dz\wedge dx+z^2dx\wedge dy$, M为$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，方向朝外.

(6) $\iint\limits_M zdx\wedge dy$, M为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，方向朝外.

(7) $\iint\limits_M (y-z)dy\wedge dz+(z-x)dz\wedge dx+(x-y)dx\wedge dy$, M为$x^2+y^2=z^2(0\leqslant z\leqslant h)$，方向朝下.

3. 计算流速场$v=(y,z,x)$通过有向封闭曲面$x^2+y^2=R^2$, $z=0$, $z=h$（方向朝外）的流量.

4. 设有向曲面M的方程为$z=f(x,y)$, $(x,y)\in D$. 证明

(1) $\iint\limits_M Pdy\wedge dz=-\iint\limits_D P(x,y,f(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}dxdy$.

(2) $\iint\limits_M Qdz\wedge dx=-\iint\limits_D Q(x,y,f(x,y))\frac{\partial z}{\partial y}dxdy$.

5. 设二次形式$\omega\in\mathscr{C}$, M是定义在有面积的闭域上的有向曲面. 证明

$$\left|\iint_M \omega\right|\leqslant KA,$$

其中A是M的面积，K是一常数.

§4.5 Green 公式和 Gauss 公式

微分形式在有向集合（曲线、曲面和区域）上的积分与在其周界上的积分有着密切的联系，这一事实对于数学和物理都有极为

重要的意义．下面（§4.5，§4.6）我们分别在平面和空间上来讨论这问题，然后我们就可以把一元函数的微积分基本公式推广到平面和空间了．

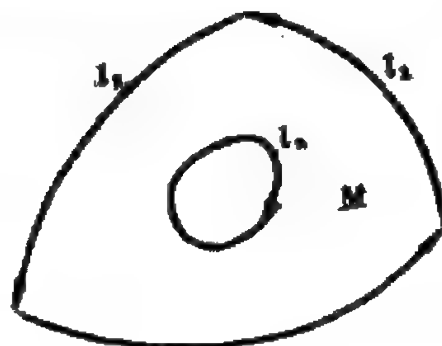


图 108

倘若$M\subset R^2$是一有界的有向闭域，并且边界∂M是一条或若干条有向曲线（图108）$l_1,\cdots,l_n$组成，则各l_i的方向是这样规定的：当我们沿着l_i的方向行走时，M的正侧必须位于左手．以后我们一律根据这个“左手规则”来理解有向平面闭域边界的方向．这样规定以后，M的方向与∂M的方向便互相联系起来了，知其一个，即知其另一个．

我们先考虑两种较为特殊的闭域．第一种有向闭域如图109所示：有向闭域M与xy平面同向，∂M由l_1,l_2,l_3,l_4四条有向曲线组成．其中l_1的方程为

$$y=\varphi_1(x),\quad a\leqslant x\leqslant b;$$

l_2为有向线段$\overline{AB}$；$-l_3$的方程为

$$y=\varphi_2(x),\quad a\leqslant x\leqslant b;$$

l_4为有向线段$\overline{CD}$．如果M与xy平面异向，则边界也改变为相反

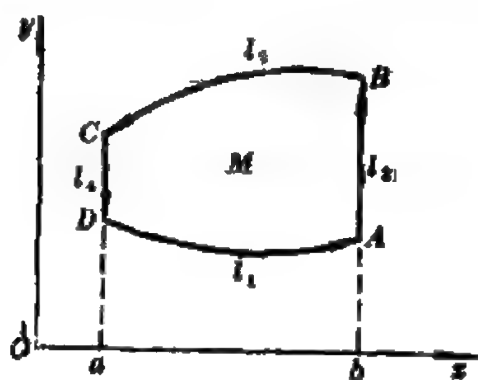


图 109

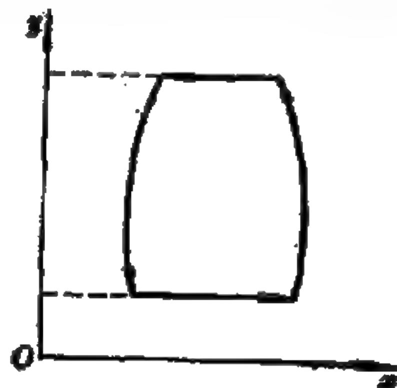


图 110

方向. l_2 和 l_4 均可以退缩使得 l_1 和 l_3 相接. 第二种有向闭域如图 110 所示, 是将第一种闭域旋转 90° 而得.

引理 1 如果 M 为上述第一种有向闭域, M 上的函数 $P\in\mathscr{C}^{(1)}$, 则

$$\int_{\partial M} P\,dx = -\iint_M \frac{\partial P}{\partial y}dx\wedge dy. \tag{1}$$

证明 不妨设 M 与 xy 平面同向. 由 § 4.4(4)式, § 1.5 定理 1 和 § 4.3(7)式,

$$\begin{aligned}\iint_M \frac{\partial P}{\partial y}dx\wedge dy &= \iint_M \frac{\partial P}{\partial y}dx\,dy = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy\\ &= \int_a^b [P(x,\varphi_2(x))-P(x,\varphi_1(x))]dx\\ &= \int_{-l_3} P\,dx - \int_{l_1} P\,dx\\ &= -\int_{l_3} P\,dx - \int_{l_1} P\,dx.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\int_{l_2} P\,dx = \int_{l_4} P\,dx = 0.$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_M \frac{\partial P}{\partial y}dx\wedge dy &= -\left(\int_{l_1} + \int_{l_2} + \int_{l_3} + \int_{l_4} P\,dx\right)\\ &= -\int_{\partial M} P\,dx. \quad \square\end{aligned}$$

同理, 如果 M 为上述第二种有向闭域, M 上的函数 $Q\in\mathscr{C}^{(1)}$, 则

$$\int_{\partial M} Q\,dy = \iint_M \frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy. \tag{2}$$

定理 1(G. Green) 设 $M\subset R^2$ 是一有向闭域, M 上的一次微

分形式

$$\omega = Pdx + Qdy \in \mathscr{C}^{(1)}.$$

如果M既能分成有限个不相重叠的上述第一种有向闭域，又能分成有限个不相重叠的上述第二种有向闭域，则

$$\int_{\partial M} Pdx + Qdy = \iint_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy. \tag{3}$$

这也就是

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

证明 仍设M与 xy 平面同向. 如图 111 将M分成为有限个不相重叠的第一种有向闭域$M_1, \cdots, M_n$，均与M同向. 则由(1)式，

$$\iint_M \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{M_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy = -\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial M_i} Pdx.$$

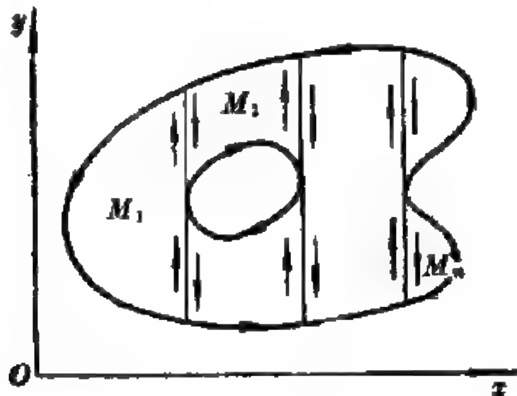


图 111

从图 111 我们可以看到，上式右边在相邻闭域的公共边界上积分为零，最后只剩下在 ∂M 上的积分. 所以

$$\iint_M \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy = -\int_{\partial M} Pdx. \tag{4}$$

同理由(2)式可得

$$\iint_M \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \int_{\partial M} Q dy. \tag{5}$$

(5)式减(4)式便得(3). □

例 1 设有向曲线 L 为圆周 $x^2+y^2=R^2$, 方向为反时针方向, 计算积分

$$A=\int_L (x+y)dx-(x-y)dy.$$

解 应用 Green 公式(3). L 既为反时针方向, 则按左手规则, 它围成的有向闭域 M 与 xy 平面同向. 所以

$$A=-2\iint_M dx \wedge dy=-2\iint_M dx\,dy=-2\pi R^2. \quad \square$$

推论 设 M 为定理 1 中的闭域, 则 M 的面积为

$$\sigma(M)=\int_{\partial M} x\,dy=-\int_{\partial M} y\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\partial M} x\,dy-y\,dx, \tag{6}$$

其中 ∂M 的方向为反时针方向.

证明 ∂M 既已取定为反时针方向, 则 M 与 xy 平面同向. 在(3)式中取 $P=0$, $Q(x,y)=x$ 便得

$$\int_{\partial M} x\,dy=\iint_M dx \wedge dy=\iint_M dx\,dy=\sigma(M).$$

这是(6)中的第一个等式. 同理证明其余两个等式. □

例 2 计算椭圆围成的面积.

解 椭圆有参数方程

$$x=a\cos t, \quad y=b\sin t, \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

它给椭圆的定向为反时针方向. 应用(6)式得所求面积为

$$\int_{\partial M} x\,dy = ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt=\pi ab. \quad \square$$

设 $M\subset R^3$ 是一有向的有界闭域，边界 ∂M 是一片或有限片有向曲面 $\Sigma_1,\cdots,\Sigma_n$，则 ∂M 的方向是这样规定的：如果 M 与 xyz 空间同向(如自然定向)，则朝 M 外的那一侧是 Σ_i 的正侧；如果异向，则朝内的那一侧是正侧. 以后我们一律按此"外向规则"来理解空间有向闭域边界的方向.

同样，我们先考虑三种特殊的闭域. 第一种如图 112 所示：有向闭域 M 与 xyz 空间同向，∂M 为 Σ_1, Σ_2, Σ_3 三片有向曲面. 其中 $-\Sigma_1$ 的方程是

$$z=f_1(x,y),\quad (x,y)\in D,$$

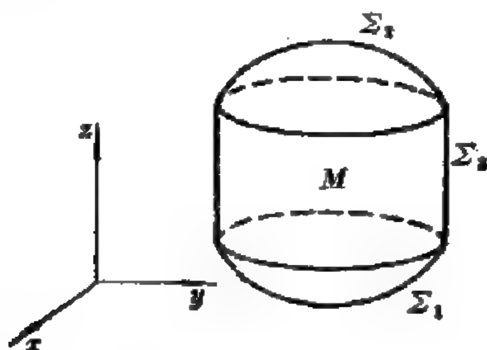


图 112

这里 D 是有面积的闭域. Σ_2 的方程是

$$z=f_2(x,y),\quad (x,y)\in D.$$

Σ_3 是柱面，外侧是正侧. 如果 M 与 xyz 空间异向，则 ∂M 也改变为相反方向. 把这一种闭域转成与 x 轴平行得第二种有向闭域；转成与 y 轴平行得第三种有向闭域.

引理 2 如果 $M\subset R^3$ 为上述第一种有向闭域，M 上的函数 $R\in\mathscr{C}^{(1)}$，则

$$\iint\limits_{\partial M} R\,dx\wedge dy=\iiint\limits_{M}\frac{\partial R}{\partial z}dx\wedge dy\wedge dz.$$

证明 不妨假定 M 与 xyz 空间同向. 如图 112，由 § 2.1 定理 1 和 § 4.4(12)式，

$$\iiint_M \frac{\partial R}{\partial z} dx \wedge dy \wedge dz = \iiint_M \frac{\partial R}{\partial z} dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_D dx\,dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

$$= \iint_D R(x, y, f_2(x, y))\,dx\,dy - \iint_D R(x, y, f_1(x, y))\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\Sigma_2} R\,dx \wedge dy - \iint_{-\Sigma_1} R\,dx \wedge dy$$

$$= \iint_{\Sigma_2} R\,dx \wedge dy + \iint_{\Sigma_1} R\,dx \wedge dy + \iint_{\Sigma_3} R\,dx \wedge dy$$

$$= \iint_{\partial M} R\,dx \wedge dy. \quad \square$$

定理 2(C. F. Gauss)　设$M \subset R^3$是一有向闭域，M上的二次微分形式

$$\omega = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \in \mathscr{C}^{(1)}.$$

如果M既能分成有限个不相重叠的上述第一种有向闭域，又能分别分成有限个不相重叠的上述第二种和第三种有向闭域，则

$$\iint_{\partial M} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

$$= \iiint_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz, \tag{7}$$

也就是

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

证明　与 Green 公式的证明完全相同，略. □

Gauss 公式(7)自然也和 Green 公式一样，包含着体积计算，这里不再详细叙述(习题 7).

例 3 用 Gauss 公式解 § 4.4 例 1.

解 $\displaystyle\iint_{\partial M} x\,dy\wedge dz+y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy$

$$=3\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} dx\wedge dy\wedge dz=4\pi R^3.\quad\square$$

习　题

1. 回答下列问题：

(1) 由平面有向曲线围成的有向闭域，其方向如何？

(2) 由有向曲面围成的有向闭域，其方向如何？

(3) 如何用曲线积分和曲面积分表示 Green 公式和 Gauss 公式？方向是如何体现的？

2. 用 Green 公式计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_L xy^2dy-x^2ydx$, L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，反时针方向.

(2) $\displaystyle\int_L (x+y)dx-(x-y)dy$, L 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，反时针方向.

3. 计算积分

$$\int_L e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy,$$

其中 L 为上半圆周 $x^2+y^2=ax\,(y\geqslant 0)$，任意方向.

4. 用 Green 公式计算下列曲线围成的面积：

(1) 星形线 $x=a\cos^3t$, $y=b\sin^3t$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

(2) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$. 提示：令 $y=x\,\mathrm{tg}\varphi$.

(3) $x^3+y^3=3axy\,(a>0)$. 提示：令 $y=tx$.

(4) $\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^{n}\left(\frac{y}{b}\right)^{n}$, $\quad a,b,c,n>0$.

5. 设有反时针方向的封闭曲线，方程为

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad a\leqslant t\leqslant b.$$

证明它围成的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b\begin{vmatrix}\varphi(t) & \psi(t)\\ \varphi'(t) & \psi'(t)\end{vmatrix}dt.$$

6. 用 Gauss 公式计算下列积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x^3dy\wedge dz+y^3dz\wedge dx+z^3dx\wedge dy$, Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，方向朝外。

(2) $\iint\limits_{\Sigma} xydy\wedge dz+yzdz\wedge dx+zxdx\wedge dy$, Σ 是由 $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$ 围成的封闭曲面，方向朝外。

(3) $\iint\limits_{\Sigma} (x-y)dy\wedge dz+(y-z)dz\wedge dx+(z-x)dx\wedge dy$, Σ 是曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$，方向朝下。

(4) $\iint\limits_{\Sigma} x^2dy\wedge dz+y^2dz\wedge dx+z^2dx\wedge dy$, Σ 是曲面 $z^2=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$，方向朝下。

7. 设 M 是 Gauss 定理中的有向闭域，∂M 的方向朝外，证明 M 的体积为

$$v(M)=\frac{1}{3}\iint\limits_{\partial M} xdy\wedge dz+ydz\wedge dx+zdx\wedge dy.$$

并计算由曲面 $z=\pm c$ 和

$$x=a\cos u\cos v+b\sin u\sin v,$$
$$y=a\cos u\sin v-b\sin u\cos v,$$
$$z=c\sin u$$

围成的体积。

8. 设 M 是 Gauss 公式中的有向闭域，$\boldsymbol{n}$ 是 ∂M 的外法向场，$\boldsymbol{e}$ 是一个固定的单位向量，证明

$$\iint\limits_{\partial M}\cos(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n})d\sigma=0.$$

9. 证明：锥面被平面所截，得到锥体体积为$\frac{1}{3}Ah$，其中 h 为锥高，A 为截口面积.

10. 证明

$$\iiint_M \frac{dxdydz}{p} = \frac{1}{2}\iint_{\partial M} \cos(p, n)\,d\sigma,$$

其中M是 Gauss 公式中的闭域，n 是 ∂M的外法向场，$p=(x-a,\ y-b,\ z-c)$，$(a, b, c)\bar{\in}\partial M$是定点，$p=\|p\|$.

§4.6 Stokes 公式

设$M\subset R^3$是一有向曲面，参数表示为

$$(x, y, z)=f(u, v),\quad (u, v)\in D. \tag{1}$$

其中$D\subset R^2$是 uv 平面上的闭域，∂D 是一条或有限条有向曲线. 如 § 4.5 中约定，∂D 是由左手规则定向的. 我们把 $f(\partial D)$也记为∂M，也叫做曲面M的"边界"(当然这不同于集合M的边界)，则∂M自然是一条或有限条有向曲线. 因为D是自然定向的，所以D与 uv 平面同向. 由左手规则可知，∂D 如图 113 为反时针方向. 于是 ∂M 的走向应如图 114 所示，从 u- 曲线走向 v- 曲线. 即沿着∂M的方向行走时，M的正侧在左手.

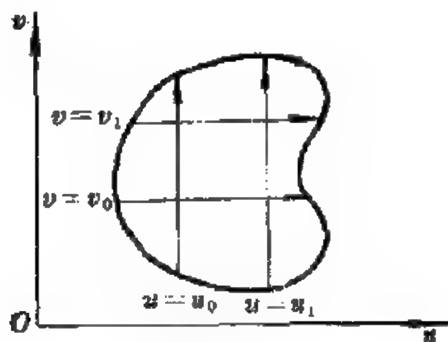


图 113

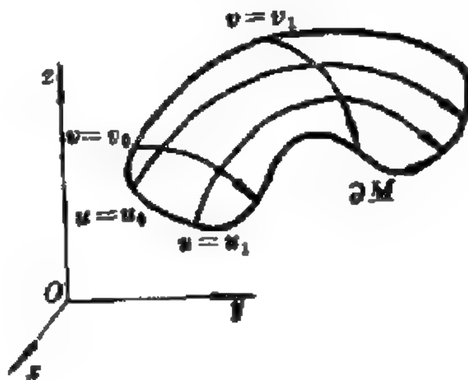


图 114

引理 1 设M为有向曲面(1)，其中D满足 Green 定理的条件. 如果M上的函数 $P\in\mathscr{C}^{(1)}$，则

$$\int_{\partial M} P\,dx = \iint\limits_M \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy. \tag{2}$$

证明 设∂D的参数表示为

$$(u, v) = \mathbf{g}(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

则 ∂M 的参数表示是

$$(x, y, z) = \boldsymbol{f} \circ \mathbf{g}(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

我们假定 $\boldsymbol{f} \in \mathscr{C}^{(2)}$. 于是由微分形式积分的定义和 Green 公式,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial M} P\,dx &= \int_\alpha^\beta P \circ \boldsymbol{f} \circ \mathbf{g}(t) \frac{dx}{dt} dt \\
&= \int_\alpha^\beta P \circ \boldsymbol{f} \circ \mathbf{g}(t) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) dt \\
&= \int_{\partial D} P \circ \boldsymbol{f} \frac{\partial x}{\partial u} du + P \circ \boldsymbol{f} \frac{\partial x}{\partial v} dv \\
&= \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(P \circ \boldsymbol{f} \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \circ \boldsymbol{f} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right] du \wedge dv \\
&= \iint\limits_D \left[\frac{\partial P}{\partial z} \circ \boldsymbol{f} \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \circ \boldsymbol{f} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du \wedge dv \\
&= \iint\limits_M \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \iint\limits_M \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy. \qquad \square
\end{aligned}$$

同理, 在引理 1 的假设下还有

$$\int_{\partial M} Q\,dy = \iint\limits_M \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz, \tag{3}$$

$$\int_{\partial M} R\,dz = \iint\limits_M \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz \wedge dx. \tag{4}$$

因此, 由(2)+(3)+(4)我们可得

定理 1 (G. G. Stokes) 在引理 1 的假设下, 如果M上的一次微分形式

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz \in \mathscr{C}^{(1)},$$

则

$$\int_{\partial M} Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\iint_M\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

$$=\iint_M\begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$=\iint_M\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}d\sigma, \tag{5}$$

也就是

$$\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega.$$

例 1 设有向曲面 M 为

$$x+y+z=1,\quad x,\,y,\,z\geqslant 0,$$

方向朝上. 求力场 $\boldsymbol{F}=(y^2,z^2,x^2)$ 沿 ∂M 所作之功.

解 M 有单位法向场 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, 指向 M 的正侧. 应用 Stokes 公式(5)得到 F 沿 ∂M 所作之功为

$$\int_{\partial M}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}=\int_{\partial M}y^2dx+z^2dy+x^2dz$$

$$=\iint_M\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix}d\sigma$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_M (x+y+z)\,d\sigma$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_M d\sigma = -1.$$

试想一想，∂M的方向为何？ □

以上我们研究了边界上与内部积分的关系，共讲了三个公式——Green 公式，Gauss 公式和 Stokes 公式. 使我们感到惊异的是，它们都统一成了一个形式：

$$\int_{\partial M}\omega = \int_M d\omega. \tag{6}$$

其中M是有向闭域或有向曲面. 为了探明此式的深刻意义，我们还必须补充一种情况——M是一有向曲线.

设M是一有向曲线，参数表示为

$$(x, y, z) = f(t),\quad t\in[a, b]. \tag{7}$$

记M的起点为A，终点为B：

$$A = f(a),\quad B = f(b).$$

并定义A和B的"方向"就是$f'(a)$和$f'(b)$的方向. 仿照外向法则，我们把B和$-A$（它的方向是$-f'(a)$的方向，）叫做M的"边界". 这样，M的边界是两个有向的点B和$-A$. 设ω是M上的零次微分形式，对M的边界点我们再定义

$$\int_A \omega = \omega(A).$$

但是记住，现在A是有向的点. 我们又规定

$$\int_{-A}\omega = -\int_A \omega = -\omega(A).$$

这样一来，我们便有

$$\int_{\partial M}\omega = \int_B \omega + \int_{-A}\omega = \omega(B) - \omega(A).$$

定理 2 设M是一条有向曲线，起点为A，终点为B，$\omega\in\mathscr{C}^{(1)}$是$M$上的零次微分形式，则

$$\int_M d\omega=\omega(B)-\omega(A).$$

也就是

$$\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega.$$

证明 设M的参数表示为(7)，则

$$\begin{aligned}\int_M d\omega&=\int_M \omega'_x dx+\omega'_y dy+\omega'_z dz\\&=\int_a^b(\omega'_x x'_t+\omega'_y y'_t+\omega'_z z'_t)\,dt\\&=\int_a^b\frac{d\omega}{dt}dt=\omega(f(b))-\omega(f(a))\\&=\omega(B)-\omega(A).\end{aligned}$$ □

因此，(6)式中的M可以是有向曲线、有向曲面或有向闭域。(6)式通称为"Stokes 公式"。现再总结表述如下：

Stokes 公式 设$M\subset R^3$是一有向曲线，或有向曲面，或有向闭域；$\omega\in\mathscr{C}^{(1)}$是$M$上的相应为 0 次，一次，二次微分形式。则

$$\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega. \tag{8}$$

在上式中取$M=[a,b]\subset R$，$\omega=F$为$[a,b]$上的一元函数就得

$$\int_{\partial[a,b]}F=\int_{[a,b]}dF,$$

这正是微积分基本公式。所以 Stokes 公式(8)是微积分基本公式的一个推广。我们把微积分基本公式看作 Stokes 公式的特殊情形，那么，Stokes 公式(8)乃是整个微积分学的"微积分基本公式"！

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 定理 1 和定理 2 中的 ∂M 是什么意思?它们的方向与 M 的方向是什么关系?

(2) Stokes 公式(8)包括了哪些内容?

2. 用 Stokes 公式证明下列等式, 并指出 L 的方向:

(1) $\int_L ydx+zdy+xdz=\pi a^2\sqrt{3}$,　L 为圆 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$.

(2) $\int_L (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz=0$,　L: $x^2+y^2=2y$, $y=z$.

(3) $\int_L (y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2-y^2)dz=2\pi ab^2$,　L: $x^2+y^2+z^2=2ax$, $x^2+y^2=2bx$, $z\geqslant 0$. $0<b<a$.

(4) $\int_L y^2dx-z^2dy+x^2dz=\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi a^3$,　L: $x^2+y^2+z^2=a^2$,　$x+y+z=a$.

3. 设 M 是 Stokes 公式(5)中的有向曲面, $\boldsymbol{a}$ 是一个常向量, 证明

$$\int_{\partial M}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{p}=2\iint_M \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma.$$

4. 计算积分 $\int_M d\omega$, 设

(1) $\omega=y^2dx+xydy+zxdz$, M 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geqslant 0$, 方向朝上.

(2) $\omega=ydx+zdy+xdz$, M 为 $z=1-x^2-y^2$, $z\geqslant 0$, 方向朝上.

(3) $\omega=zxdx-ydy+x^2ydz$, M 是由平面 $x+y+2z=1$, $x=0$, $z=0$ 围成的曲面, 方向朝外.

§4.7　恰当微分形式

上面我们看到, Stokes 公式 §4.6(8)就是微积分基本公式在空间的推广. 微积分基本公式说的是微分和积分的关系, 从原函

数可以计算积分. Stokes 公式说的自然也是这种关系. 如果 $\omega=d\theta$, 则从 Stokes 公式有

$$\int_M \omega=\int_{\partial M}\theta. \tag{1}$$

就是说, 要计算 ω 在 M 上的积分, 只要计算 θ 在 ∂M 上的积分. 而 ∂M 是比 M 低一维的集合(如果 M 是空间区域, 则 ∂M 是有向曲面, 如果 M 是有向曲面, 则 ∂M 是有向曲线, 如果 ∂M 是有向曲线, 则 ∂M 是两个有向的点), 从而 $\int_{\partial M}$ 是比 $\int_M$ 低一维的积分. 在(1)式里, ω 的次数与 M 的维数是相一致的, (1)式把积分 $\int_M \omega$ 化为低一次的形式 θ 的低一维的积分 $\int_{\partial M}\theta$.

那么, 对于一个微分形式 ω 什么时候存在微分形式 θ(比 ω 低一次)使得 $\omega=d\theta$ 呢? 下面我们就是要研究这个问题.

定义 1 设 $\Omega\subset R^3$ 是一个区域, ω 是 Ω 上的一个微分形式. 如果在 Ω 上存在另一个微分形式 θ 使得 $\omega=d\theta$ 在 Ω 上成立, 则说 ω 是 Ω 上的一个**恰当微分形式**.

定理 1 如果 $\omega\in\mathscr{C}^{(1)}$ 是 Ω 上的恰当形式, 则 $d\omega=0$ 在 Ω 上成立.

证明 如果 ω 是一次的, 则 θ 是零次的, 于是

$$\omega=d\theta=\theta'_x dx+\theta'_y dy+\theta'_z dz,$$

因此(§4.2(25))

$$d\omega=\begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \theta'_x & \theta'_y & \theta'_z \end{vmatrix}.$$

因为(第六章 §1.1 定理 1)

$$\theta''_{yz}=\theta''_{zy},\quad \theta''_{zx}=\theta''_{xz},\quad \theta''_{xy}=\theta''_{yx},$$

所以

$$d\omega=0.$$

如果 ω 是二次的, 则 θ 是一次的, 设

$$\theta=Pdx+Qdy+Rdz.$$

于是(§ 4. 2(25))

$$\omega=d\theta=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy,$$

所以(§ 4. 2(26))

$$d\omega=\left[\left(\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z}\right)\right]dx\wedge dy\wedge dz=0. \quad \square$$

反过来, 若 $d\omega=0$, ω 是否就是恰当微分形式呢? 下面我们对一次和二次微分形式分别来研究这个问题.

定理 2 $\omega\in\mathscr{C}$ 是 Ω 上的一次恰当形式的充分必要条件是积分 $\int_M\omega$ 在 Ω 上"与道路无关"(即只与 M 的起点和终点有关).

证明 (必要性) 设 $\omega\in\mathscr{C}$ 是 Ω 上的一次恰当形式, $\omega=d\theta$. 则由 § 4. 6 定理 2 得到

$$\int_M\omega=\int_M d\theta=\int_{\partial M}\theta=\theta(B)-\theta(A),$$

其中 $M\subset\Omega$ 是一条有向曲线, A 为起点, B 为终点. 因此, 如果 $N\subset\Omega$ 是另一条有向曲线, 与 M 有相同的起点和终点, 则

$$\int_M\omega=\int_N\omega.$$

这就是说, ω 的积分"与道路无关".

(充分性) 如果积分 $\int_M\omega$ 与道路无关, 就可以记

$$\int_{M}\omega=\int_{A}^{B}\omega,$$

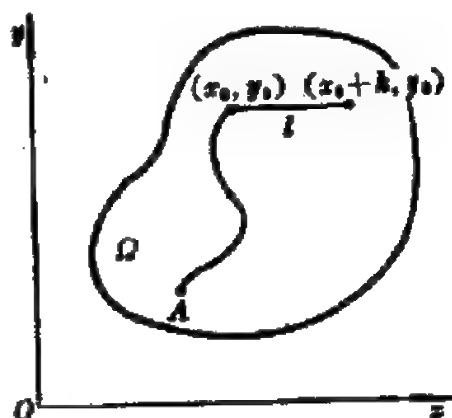


图 115

其中 A 是起点，B 是终点．固定起点 A，就得 Ω 上的函数 θ：

$$\theta(B)=\int_{A}^{B}\omega,\quad B\in\Omega.$$

其中由 A 至 B 的道路（Ω 中的有向曲线）可以由我们自由选择．我们要证明 $d\theta=\omega$．为书写简便起见，只须就二维的情形来证明就可以了，即假定 $\Omega\subset R^2$．这时

$$\omega=Pdx+Qdy.$$

任取 $(x_0, y_0)\in\Omega$．于是（图 115）当 h 很小时

$$\begin{aligned}\theta(x_0+h, y_0)&=\int_{A}^{(x_0+h,y_0)}\omega=\int_{A}^{(x_0,y_0)}\omega+\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0+h,y_0)}\omega\\&=\int_{A}^{(x_0,y_0)}\omega+\int_{l}\omega=\theta(x_0, y_0)+\int_{l}Pdx\\&=\theta(x_0, y_0)+\int_{x_0}^{x_0+h}P(x, y_0)dx,\end{aligned}$$

其中 l 是由 (x_0, y_0) 至 (x_0+h, y_0) 的有向直线段，因此最后一个积分就是定积分．由于 $P\in\mathscr{C}$，所以

$$\theta'_x(x_0, y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}P(x, y_0)dx=P(x_0, y_0).$$

同理

$$\theta'_y(x_0, y_0)=Q(x_0, y_0).$$

而 (x_0, y_0) 是 Ω 中任意一点，所以 $\omega=d\theta$ 在 Ω 上成立．□

我们还注意到，如果 θ_1，θ_2 同为 Ω 上的零次形式，且 $d\theta_1=d\theta_2$ 在 Ω 上成立，则 θ_1 和 θ_2 相差一常数（第六章 § 2.4 定理 2）．因此，如果 ω 是 Ω 上的一次恰当形式，则 θ：

$$\theta(B)=\int_{A}^{B}\omega+C,\quad(B\in\Omega)\tag{2}$$

(C是任意常数)就是全体满足关系 $d\theta=\omega$ 的 θ. 其中由 A 到 B 的有向曲线可以由我们自由选择.

定义 2 设 $\Omega\subset R^2$ 是一个区域, 如果 Ω 中的任意一条封闭 Jordan 曲线(第五章 § 2.4 定义 3) 的内部全在 Ω 之中, 则称 Ω 是一单连通区域. 反之, 称 Ω 是多连通的. 图 116 是一个多连通区域.

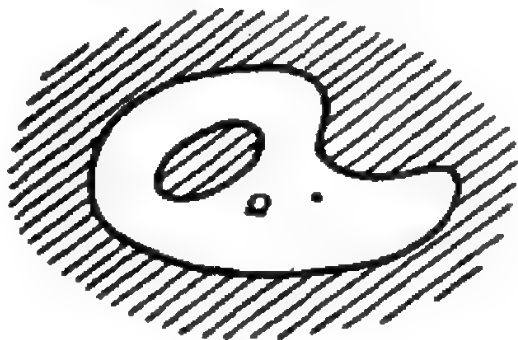


图 116

定理 3 设 $\Omega\subset R^2$ 是一单连通区域, $\omega\in\mathscr{C}^{(1)}$ 是 Ω 上的一次形式. 如果 $d\omega=0$ 在 Ω 上成立, 则 ω 是恰当的.

证明 设 L 是 Ω 中的任一封闭有向曲线, 因为 Ω 是单连通的, 所以 L 围成的有向闭域 $M\subset\Omega$. 由 Stokes 公式有

$$\int_L\omega=\int_{\partial M}\omega=\int_M d\omega=0.$$

因此易知 $\int_M\omega$ 在 Ω 上与道路关. 由定理 2 即知 ω 是恰当的. □

例 1 (反例)定理中单连通的条件是不可缺的. 考察例子: 设 M 是单位圆周 $x^2+y^2=1$, 方向为反时针方向, 则

$$\int_M\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}(\cos^2t+\sin^2t)dt=2\pi\neq0.$$

因此由定理 2,

$$\omega=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

不是恰当形式. 但是

$$d\omega=\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx\wedge dy$$

$$=\left(\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}-\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\right)dx\wedge dy=0.$$

事实上，ω 的定义域是$\{(x,y):\ x^2+y^2\neq 0\}$，不是单连通的，原点是一个“洞”。

例 2 解微分方程

$$(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy=0.$$

解 记右端的微分形式为 ω，因为

$$\frac{\partial}{\partial x}(x-y^2+3)=1=\frac{\partial}{\partial y}(x+y+1)$$

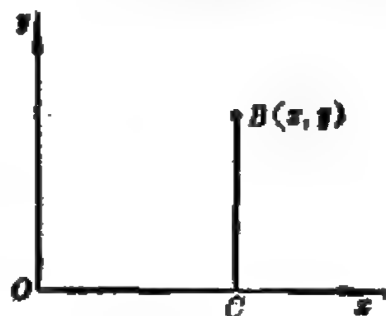


图 117

在全 R^2 上成立，所以 $d\omega=0$ 在全 R^2 上成立。由定理 3，ω 在全 R^2 上是恰当的，所以存在 θ 使 $\omega=d\theta$ 处处成立。显然 $\theta=C$（任意常数）就是方程的解。为了算出 θ，在(2)式中取 $A=(0,\ 0)$ 得（图 117）

$$\theta(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy$$

$$=\int_{\overline{OC}}+\int_{\overline{CB}}(x+y+1)dx+(x-y^2+3)dy$$

$$=\int_0^x(x+1)dx+\int_0^y(x-y^2+3)dy$$

$$=\frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y.$$

所以方程的解为

$$\frac{1}{2}x^2+x+xy-\frac{1}{3}y^3+3y=C. \qquad \square$$

同样，由 Stokes 公式和定理 2 可得

定理 4 设$\Omega\subset R^3$是一区域，且Ω中任意一条封闭有向曲线上均可张以一张全在Ω中的有向曲面。如果Ω上的一次形式$\omega\in\mathscr{C}^{(1)}$

在Ω上满足$d\omega=0$, 则ω是恰当的.

下面我们再来研究二次形式. 为简单计, 我们假定定义域Ω是R^3中的区间.

定理 5 设$\Omega\subset R^3$是一区间, $\omega\in\mathscr{C}^{(1)}$是$\Omega$上的二次微分形式. 如果$d\omega=0$在$\Omega$上成立, 则$\omega$是恰当的.

证明 设二次形式

$$\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy\in\mathscr{C}^{(1)}$$

在Ω上满足$d\omega=0$. 要证明定理, 我们只要能求出一个有一项系数为零, 例如第三项系数为零的一次形式

$$\theta=udx+vdy$$

使$d\theta=\omega$在Ω上成立就可以了. 这就是要解方程

$$-\frac{\partial v}{\partial z}=P, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=Q, \tag{4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=R. \tag{5}$$

固定一点$(x_0, y_0, z_0)\in\Omega$(图118). 若$(x, y, z)\in\Omega$, 则联结(x_0, y_0, z_0), (x_0, y, z_0), (x, y, z_0)和(x, y, z)的折线全在Ω之中. 由(3)式有

$$v(x, y, z)=-\int_{z_0}^{z}P(x, y, z)\,dz. \tag{6}$$

同样由(4)式有

$$u(x, y, z)=\int_{z_0}^{z}Q(x, y, z)\,dz+f(x, y). \tag{7}$$

其中$f\in\mathscr{C}^{(1)}$是任意的. 将(6)和(7)代入(5)式得

$$-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dz-\frac{\partial f}{\partial y}=R.$$

但$d\omega=0$, 所以

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

因此得

$$\int_{z_0}^{z}\frac{\partial R}{\partial z}dz-\frac{\partial f}{\partial y}=R.$$

所以

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-R(x,y,z_0),$$

所以

$$f(x,y)=-\int_{y_0}^{y}R(x,y,z_0)dy.$$

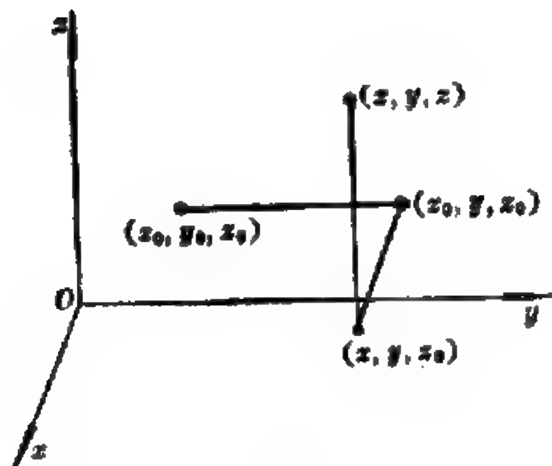


图 118

代入(7)式得u. 这样我们就解出了 u 和 v 满足(3)、(4)和(5), 从而就求出了 θ. 在此证明中, 我们不仅证明了 θ 的存在, 同时还指出了求 θ 的方法. 证明完毕. □

例 3 设

$$\omega=(xy+1)dy\wedge dz+zdz\wedge dx-yzdx\wedge dy,$$

证明 ω 是恰当形式, 并求出 θ 使 $d\theta=\omega$.

解 ω 的定义域为 $\Omega=R^3$. 因为

$$d\omega=\left[\frac{\partial}{\partial x}(xy+1)+\frac{\partial}{\partial y}z-\frac{\partial}{\partial z}yz\right]dx\wedge dy\wedge dz$$

$$=(y-y)\,dx\wedge dy\wedge dz=0,$$

所以由定理 5, ω 是恰当的. 求 u 和 v 使

$$d(udx+vdy)=\omega,$$

即求 u 和 v 使

$$-\frac{\partial v}{\partial z}=xy+1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=z, \tag{9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-yz. \tag{10}$$

从(8)式得

$$v=-(xy+1)z.$$

从(9)式又得

$$u=\frac{1}{2}z^2+f(x,y).$$

代入(10)式得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

因此只要取 $f=0$ 就可以了. 于是我们求得

$$\theta=\frac{1}{2}z^2dx-(xy+1)zdy. \qquad \square$$

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 一次形式为恰当形式有哪些等价条件? 若 $\omega=d\theta$, 则如何求得 θ?

(2) 二次形式为恰当形式有什么等价条件?

(3) 为什么我们没有考虑三次形式为恰当形式的问题?

2. 解下列微分方程:

(1) $xdy+ydx=0$.

(2) $(x+2y)dx+(2x+y)dy=0$.

(3) $(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy=0$.

(4) $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$.

(5) $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{ydx-xdy}{x^2}$.

(6) $\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=xdx+ydy$.

3. 证明下列微分形式 ω 在 R^3 上是恰当形式，并求出使 $\omega=d\theta$ 的 θ，设

(1) $\omega=\sin yz dx+xz\cos yz dy+xy\cos yz dz$.

(2) $\omega=(2xyz^3+z)dx+x^2z^3dy+(3x^2z^2+x)dz$.

(3) $\omega=-ydy\wedge dz-zdz\wedge dx$.

(4) $\omega=xy^2zdy\wedge dz+y^3zdz\wedge dx-2y^2zdx\wedge dy$.

(5) $\omega=x^2\sin zdy\wedge dz-yx\sin zdz\wedge dx+x\cos zdx\wedge dy$.

4. 例 1 中的 ω 在怎样一个区域(尽可能大)上是恰当微分形式？并在此区域上求出 θ 使 $\omega=d\theta$.

5. 设

$$\omega=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}+zdz,$$

则 $d\omega=0$. 设 M 是圆周 $x^2+y^2=1, z=0$, 则 $\int_M\omega=$？为什么不是 0？

6. 设 $\Omega\subset R^3$ 是一开集，$p_0\in\Omega$. 如果对于一切 $p\in\Omega$ 都有 $\overline{p_0p}\subset\Omega$, 则称 Ω 是以 p_0 为一个中心的"星形区域"。现设 Ω 是以原点 0 为一个中心的星形区域，又 Ω 上的二次形式

$$\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy\in\mathscr{C}^{(1)},$$

且 $d\omega=0$ 在 Ω 上成立. 当 $(x,y,z)\in\Omega$ 时令

$$\begin{aligned}\theta=&\left[\int_0^1 P(tx,ty,tz)tdt\right](ydz-zdy)\\&+\left[\int_0^1 Q(tx,ty,tz)tdt\right](zdx-xdz)\\&+\left[\int_0^1 R(tx,ty,tz)tdt\right](xdy-ydx).\end{aligned}$$

证明 $\omega=d\theta$ 在 Ω 上成立. (因此可见，定理 5 对于一切星形区域都是成立的).

提示：1° 求导时与积分交换次序. 2° 若 Ω 上的函数 $f\in\mathscr{C}^{(1)}$, 则

$$f(x,y,z)=\int_0^1\frac{d}{dt}t^2f(xt,yt,zt)dt$$

$$=2\int_0^1 tf(xt,yt,zt)dt+\int_0^1[xf'_x(xt,yt,zt)$$

$$+yf'_y(xt,yt,zt)+zf'_z(xt,yt,zt)]t^2dt.$$

7. 设 $\omega=Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$, 其中 P,Q,R 均是 p 次齐次函数(第六章§2.3 习题 11), 且 $\omega=d\theta$. 证明

$$\theta=\frac{1}{p+2}[(zQ-yR)dx+(xR-zP)dy+(yP-xQ)dz].$$

第五节 场论大意

§5.1 梯度

第四节的内容对物理学有着特别重要的意义, 本节仅仅是把它翻译成可供物理学(电磁学, 流体力学, 理论力学)应用的形式, 即所谓"场论".

前面我们已经多次提到场的概念: 切向场, 法向场, 力场和流速场等. 这些都是"向量场".

设 $\Omega\subset R^3$ 是一个区域, 则说映射 $\boldsymbol{F}=(P,Q,R):\ \Omega\to R^3$是分布在$\Omega$上的一个**向量场**.

在§2.3中我们计算了一个球的引力场, 用图象来描写这个场就如图 119 所示. 在图 120 中表示一个流速场.

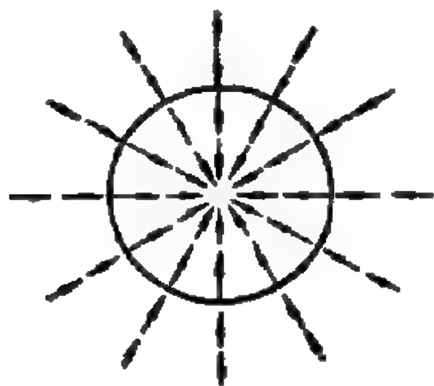


图 119

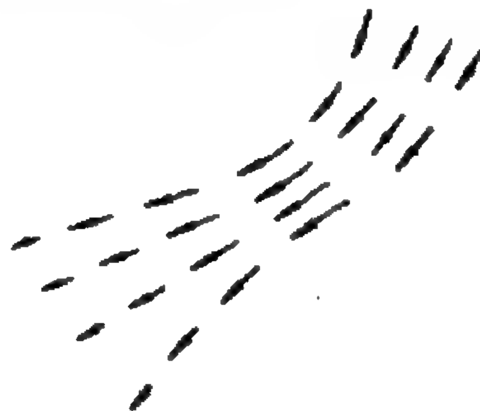


图 120

除了向量场以外还有“数量场”．例如，一个房间内的温度在每一点上各不相同，其分布构成一个温度场．一盏灯的周围，亮度也形成一个场．地球表面的地形可以用“海拔”来刻划，这也是一个数量场．

就是说，设 $\Omega\subset R^3$ 是一个区域，则函数 $u:\ \Omega\to R$ 叫做分布在 Ω 上的一个数量场．

以下我们一律假定：数量场和向量场均为 $\mathscr{C}^{(1)}$ 类或 $\mathscr{C}^{(2)}$ 类的，视需要而定，不作说明．

现在我们先介绍数量场的一个重要概念——数量场的“梯度”．设在空间区域 Ω 上分布着一个数量场 u，则 u 在一点 $p\in\Omega$ 沿方向 e 的变化率便是 $\frac{\partial u}{\partial e}(p)$（第六章 §1.1 定义1）．设

$$e=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

则（第六章，§2.3 定理 1 推论 2）

$$\frac{\partial u}{\partial e}(p)=\frac{\partial u}{\partial x}(p)\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}(p)\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}(p)\cos\gamma.$$

记

$$\operatorname{grad}u(p)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(p),\frac{\partial u}{\partial y}(p),\frac{\partial u}{\partial z}(p)\right)=Ju(p), \qquad (1)$$

这个 Jacobian 叫做数量场 u 在点 p 的梯度．于是（图 121）

$$\frac{\partial u}{\partial e}(p)=\operatorname{grad}u(p)\cdot e, \qquad (2)$$

即 $\frac{\partial u}{\partial e}(p)$ 是梯度 $\operatorname{grad}u(p)$ 在方向 e 上的投影．由此我们看到，固定一点 p，则 u 在点 p 的各个方向的变化率中以沿梯度 $\operatorname{grad}u(p)$ 方向的变化率为最大，这个最大的变化率为

$$\operatorname{grad}u(p)\cdot\frac{\operatorname{grad}u(p)}{\|\operatorname{grad}u(p)\|}=\|\operatorname{grad}u(p)\|.$$

数量场的另一个重要概念是“等值面”．设在空间区域 Ω 上分

布了一个数量场 u, 则

$$u(p)=u(x,y,z)=c \text{ (常数)} \tag{3}$$

就是 Ω 中的一张曲面. 在此曲面上数量场 u 是一常数值 c, 故(3)叫做 u 的一张等值面. 变化常数 c 就得数量场的等值面族, 它将数量场分成"层"(图 122).

综合梯度和等值面两个概念, 我们注意到: 1) 梯度

$$\text{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

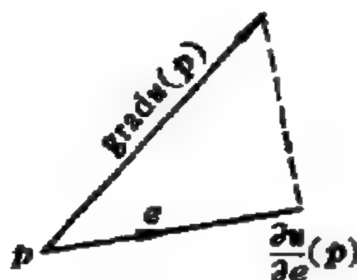


图 121

正是等值面的法向场(第六章 § 3.4 定理 2) (图 122). 2) 由于 u 在梯度方向的变化率为 $\|\text{grad}u\|>0$, 所以梯度场 grad$u$ 指向等值面增加的方向, 即是, 若 $c_2>c_1$, 则等值面 $u=c_1$ 上的梯度场 grad$u$ 指向等值面 $u=c_2$. 3) 梯度的模 $\|\text{grad}u(p)\|$ 愈大, 则在 p 点沿梯度方向的变化率愈大, 因此在这个方向的等值面分布愈"密".

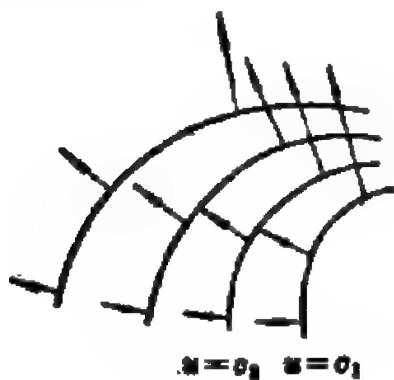


图 122



图 123

例如, 图 123 是一座山的等高线图. 由图我们可以得到, 北峰高, 南峰低, 北峰陡峭, 南峰平坦. 尤以北峰北侧梯度最大.

梯度不仅是场论中的一个重要概念, 同时也是场论中最基本的一个运算. 因此我们引进"算子"

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{4}$$

这个算子读做“Nabla”. 于是

$$\mathrm{grad}\, u = \nabla u.$$

容易验证:

1° $\nabla cu = c\nabla u$ (c 是常数).

2° $\nabla(u_1+u_2) = \nabla u_1 + \nabla u_2$.

3° $\nabla u_1 u_2 = u_1\nabla u_2 + u_2\nabla u_1$.

4° $\nabla f\circ u = f'\circ u\nabla u$.

例 1 设 $\boldsymbol{p}=(x, y, z)$, $p=\|\boldsymbol{p}\|$. 求 ∇p.

解 因为

$$p^2 = x^2+y^2+z^2,$$

所以

$$\nabla p^2 = 2(x, y, z) = 2\boldsymbol{p}.$$

另一方面, 由 4°,

$$\nabla p^2 = 2p\nabla p,$$

所以

$$\nabla p = \frac{\boldsymbol{p}}{p}. \qquad \square$$

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 何谓数量场的梯度?数量场在一点的最大变化率为何?

(2) 何谓数量场的等值面?为什么说等值面将数量场分成层?

(3) 如何图解数量场的等值面与梯度的关系?

2. 设 u, v 为数量场, $\boldsymbol{f}$ 为向量场, 则 $\nabla\frac{u}{v}=$? $\nabla(u\boldsymbol{f})=$?

3. 图解下列平面数量场:

(1) $u=x^2-y^2$. (2) $u=3xy-x^2-y^2$.

(3) $u=4x^2+12xy+9y^2$.

4. 求数量场 u 沿数量场 v 的梯度方向的变化率，何时这个变化率为零？

5. 设 $\boldsymbol{p}=(x, y, z)$, $p=\|\boldsymbol{p}\|$. 计算

(1) $\mathrm{grad}\, p$.　　(2) $\nabla \ln p$.　　(3) $\nabla f(p)$. (4) $\nabla f(p^2)$.

(5) $\nabla[f(p)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}]$, $\boldsymbol{a}$ 是常向量. (6) $(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)p^{a}$.

(7) $(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{p}$.

§5.2 散度和旋度

设 $\boldsymbol{F}=(P, Q, R)$ 是分布在空间区域 Ω 上的一个向量场. 考虑 Ω 中的一张有向曲面 M, 记 $\boldsymbol{n}$ 为 M 的单位法向场, 指向 M 的正侧. 我们把

$$\iint_M \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma \tag{1}$$

叫做向量场 $\boldsymbol{F}$ 通过有向曲面 M 的**通量**.

若 $\boldsymbol{F}$ 是流速场, 我们已经知道通量(1)就是单位时间内流体通过曲面 M 的流量(§4.4). 若 $\boldsymbol{F}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 成锐角, 则流量为正; 若为钝角, 则为负.

设 $M\subset\Omega$ 是 Gauss 公式(§4.5定理2)中的闭域, $\boldsymbol{n}$ 是 ∂M 的单位外法向场, 则由 Gauss 公式,

$$\iint_{\partial M} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\iiint_M\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv.$$

记

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}, \tag{2}$$

叫做 $\boldsymbol{F}$ 的**散度**. 则 Gauss 公式就可以写成

$$\iint_{\partial M}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma=\iiint_M \mathrm{div}\boldsymbol{F}\,dv, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是 ∂M 的单位外法向场.

如果我们把 $\boldsymbol{F}$ 设想为流速场, 则(3)式左边的通量就是流进和流出的代数和, 即流出(为正)和流进(为负)相抵而得之值. 如

果M中无某种"流源",它"散射"或"吸收"(负的散射)流体,则流进和流出应相抵得零. 因此,若∂M上的通量非零,则意味着M内有流源. 通量越大,流源的散射也越大. 而

$$\frac{1}{v(M)}\iint\limits_{\partial M}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma$$

就是单位体积内流源的"平均散射强度". 令M收缩为一点$\boldsymbol{a}$,则由(3)式和积分平均值定理易知

$$\lim_{M\to a}\frac{1}{v(M)}\iint\limits_{\partial M}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma=\mathrm{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}). \tag{4}$$

所以$\mathrm{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$表示流源在一点$\boldsymbol{a}$的"散射强度".

用算子∇表示散度就是

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}. \tag{5}$$

同时容易验证

1° $\nabla\cdot c\boldsymbol{F}=c\nabla\cdot\boldsymbol{F}$, c为常数.

2° $\nabla\cdot(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)=\nabla\cdot\boldsymbol{F}_1+\nabla\cdot\boldsymbol{F}_2$.

3° $\nabla\cdot\varphi\boldsymbol{F}=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}\cdot\nabla\varphi$.

例1 设$\boldsymbol{p}=(x,y,z)$, $p=\|\boldsymbol{p}\|$. 计算$\mathrm{div}p^n\boldsymbol{p}$.

解 因为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{p}=\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3.$$

又由§5.1例1,

$$\nabla p^n=np^{n-1}\nabla p=np^{n-2}\boldsymbol{p}.$$

再由3°便得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot p^n\boldsymbol{p}&=p^n\nabla\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}\cdot\nabla p^n\\&=3p^n+\boldsymbol{p}\cdot np^{n-2}\boldsymbol{p}=(3+n)p^n.\end{aligned}$$

特别,当$n=-3$时有

$$\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{p}}{p^3}=0. \qquad \square$$

例 2 静电场 Gauss 定理.

设静电场场强为 $\boldsymbol{F}$, Σ是任一封闭曲面, 方向朝外. 我们要计算 $\boldsymbol{F}$ 通过 Σ 的通量.

设 $\boldsymbol{n}$ 是Σ的单位外法向场.

先设 $\boldsymbol{F}$是由一个点电荷 q 产生的场强. 设电荷位置为原点 O, 则

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})=\frac{q}{p^3}\boldsymbol{p}, \qquad \boldsymbol{p}\neq \boldsymbol{0},$$

其中 $p=\|\boldsymbol{p}\|$, 这个场在原点 O 无定义, 但除原点外由例 1 有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=0.$$

如果 O 在Σ的外部, 则由此和 Gauss 公式(3)显然有通量为,

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma=0. \tag{6}$$

如果 O 在Σ 的内部. 以 O 为球心, ε 为半径, 在Σ 的内部作一球面 Σ_ε(图 124). 其外法向场也记为 $\boldsymbol{n}$. 则同样由 Gauss 公式有

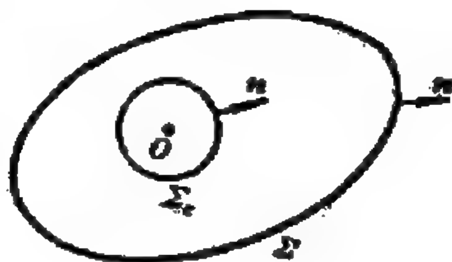


图 124

$$\iint_{\Sigma}-\iint_{\Sigma_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma=0.$$

但在 Σ_ε 上 $\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{p}}{p}$, 所以通量为

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma=\iint_{\Sigma_\varepsilon}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma=q\iint_{\Sigma_\varepsilon}\frac{d\sigma}{p^2}=\frac{q}{\varepsilon^2}\iint_{\Sigma_\varepsilon}d\sigma$$
$$=4\pi q. \tag{7}$$

再设$\boldsymbol{F}$是由点电荷 $q_1, \cdots, q_n$ 产生的场强. 记 q_i 产生的场强为 $\boldsymbol{F}_i(i=1, \cdots, n)$, 则

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\cdots+\boldsymbol{F}_n.$$

设 $q_1, \cdots, q_m$ 在 Σ 的内部, $q_{m+1}, \cdots, q_n$在 Σ 的外部, 则由(6)式和(7)式有

$$\iint_{\Sigma} F_i \cdot n d\sigma = \begin{cases} 4\pi q_i, & i=1, \cdots, m, \\ 0, & i=m+1, \cdots, n. \end{cases}$$

相加即得通量为

$$\iint_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = 4\pi \sum_{i=1}^{m} q_i. \tag{8}$$

最后设 F 是由连续分布于一个立体 V 上的电荷产生的场强. 这时就有密度函数 ρ, 它在 V 上连续, 在 V 的外部为 0. 设 Σ 围成的闭域为 M, 则由(8)式易见 F 的通量为

$$\iint_{\Sigma} F \cdot n d\sigma = 4\pi \iiint_{M} \rho dv.$$

这就是静电场 Gauss 定理.

由此从(4)式又可得当 $p \in \partial V$ 时,

$$\text{div} F(p) = \lim_{M \to p} \frac{4\pi}{v(M)} \iiint_{M} \rho dv = 4\pi \rho(p).$$

因此, 对于静电场来说, 场强散度就是电荷密度的 4π 倍, 二者成比例, 这是符合前面指出的散度的意义的.

再设 $L \subset \Omega$ 是一条有向曲线, 则

$$\int_{L} F \cdot dp$$

叫做向量场F在 L 上的**环量**. 又记

$$\text{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times F$$

叫做F的**旋度**. 于是 § 4.6 定理 1 中的Stokes 公式可以写成

$$\int_{\partial M} F \cdot dp = \iint_{M} \text{rot} F \cdot n d\sigma, \tag{9}$$

其中n是有向曲面M的单位法向场, 指向正侧. ∂M 按 § 4.6 开头的叙述来理解定向. 也就是说, 沿着 ∂M 的正向前进时, 法向场 n

在左手.

设 $\boldsymbol{F}$ 是 Ω 上的流速场. 在 Ω 中任取一点 $\boldsymbol{a}$, 在 $\boldsymbol{a}$ 点作一单位向量 $\boldsymbol{n}$. 设 M 是以 $\boldsymbol{a}$ 点为中心, 垂直于 $\boldsymbol{n}$ 的一个圆盘. 则

$$\int_{\partial M}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}=\int_{\partial M}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}ds$$



图 125

就反映了流体环绕圆周的旋转程度(图 125). 而

$$\frac{1}{\sigma(M)}\int_{\partial M}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}$$

是这个旋转程度关于面积的平均值, 是"平均旋转强度". 当圆盘绕 $\boldsymbol{a}$ 点转动时, 这个平均旋转强度也随之变化, 所以它与方向 $\boldsymbol{n}$ 有关. 令 $M\to\boldsymbol{a}$(保持方向 $\boldsymbol{n}$ 不变), 则由(9)式可得

$$\lim_{M\to a}\frac{1}{\sigma(M)}\int_{\partial M}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}=\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}.$$

所以 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}$, 即 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ 在方向 $\boldsymbol{n}$ 上的投影, 是流速场 $\boldsymbol{F}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 点的一个"旋转强度", 它有方向性, 与方向 $\boldsymbol{n}$ 有关.

关于旋度运算我们有

1° $\nabla\times c\boldsymbol{F}=c\nabla\times\boldsymbol{F}$, c 是常数.

2° $\nabla\times(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)=\nabla\times\boldsymbol{F}_1+\nabla\times\boldsymbol{F}_2$.

3° $\nabla\times\varphi\boldsymbol{F}=\varphi\nabla\times\boldsymbol{F}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{F}$.

例 3 设

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})=\varphi(p)\boldsymbol{p},$$

其中 $p=|\boldsymbol{p}|$, 则 $\boldsymbol{F}$ 叫做"有心场". 证明 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$.

证 因为

$$\nabla\times\boldsymbol{p}=0,$$

所以
$$\nabla\times\varphi(p)\boldsymbol{p}=\varphi(p)\nabla\times\boldsymbol{p}+\nabla\varphi(p)\times\boldsymbol{p}$$

$$=\varphi'(p)\nabla p\times\boldsymbol{p}=\varphi'(p)\frac{\boldsymbol{p}}{p}\times\boldsymbol{p}=0. \quad \square$$

以上我们介绍了场论的三个基本概念：梯度、散度和旋度．我们应特别注意到，这三个“度”从数学角度来看是统一的，因为它们有一个统一的来源，就是由微分形式的外微分产生的（§4.2（八））．在这个义意上可以说不会再有第四个“度”了．

习　题

1．回答下列问题：

（1）Gauss 公式联系了场论的哪些概念？散度有什么物理意义？

（2）再就 Stokes 公式和旋度回答上题。

（3）为什么说场论三度在数学上是统一的？为什么说不能有第四个度了？

2．证明 $\operatorname{div} \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b}$.

3．记

$$\Delta=\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

叫做“Laplace”算子．证明

$$\Delta uv=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v.$$

4．证明

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{F})=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{F})-\nabla^2\boldsymbol{F}.$$

5．设 M 是 Gauss 公式中的闭域，$\boldsymbol{n}$ 是 ∂M 的单位外法向场，$u,\boldsymbol{F}\in\mathscr{C}^{(1)}$．证明

（1）$\operatorname{grad} u(\boldsymbol{p})=\lim\limits_{M\to p}\dfrac{1}{v(M)}\iint\limits_{\partial M}\boldsymbol{n}u\,d\sigma$.

（2）$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})=\lim\limits_{M\to p}\dfrac{1}{v(M)}\iint\limits_{\partial M}\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}\,d\sigma$.

6．设 M 是 Gauss 公式中的闭域，函数 $f,g\in\mathscr{C}^{(2)}$．$\boldsymbol{n}$ 是 ∂M 的单位外法向场．证明

（1）$\displaystyle\iint\limits_{\partial M}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,d\sigma=\iiint\limits_{M}\Delta f\,dv$.

（2）$\displaystyle\iint\limits_{\partial M}g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\,d\sigma=\iiint\limits_{M}\nabla f\cdot\nabla g\,dv+\iiint\limits_{M}g\Delta f\,dv$.

（3）（第二 Green 公式）

$$\iint\limits_{\partial M}\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial n} & \frac{\partial g}{\partial n}\\ f & g\end{vmatrix}d\sigma=\iiint\limits_{M}\begin{vmatrix}\Delta f & \Delta g\\ f & g\end{vmatrix}dv.$$

(4) 若 f 在 M 内部"调和"(就是说, $\Delta f=0$ 在 M° 上成立), 则

$$\iint\limits_{\partial M}\frac{\partial f}{\partial n}d\sigma=0,$$

$$\iint\limits_{\partial M}f\frac{\partial f}{\partial n}\,d\sigma=\iiint\limits_{M}\|\nabla f\|^2dv.$$

(5) 若 f 在 M 内部调和, 则

$$f(\boldsymbol{p}_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial M}\left[f\frac{\cos(\boldsymbol{p},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial n}\right]d\sigma,$$

其中 $\boldsymbol{p}_0$ 是 M 内部任意一点, $\boldsymbol{p}$ 为由 $\boldsymbol{p}_0$ 至 ∂M 上的向量, $p=\|\boldsymbol{p}\|$. 就是说, 调和函数由其在边界上的值完全确定.

提示: 以 $\boldsymbol{p}_0$ 为中心, 在 M 内部作一小球, 则 f 和 $\frac{1}{p}$ 均在球面和 ∂M 之间调和.

(6) (平均值定理) 若 f 在 M 内部调和, $\boldsymbol{p}_0$ 是 M 内部任意一点, Σ 是 M 上以 $\boldsymbol{p}_0$ 为球心, R 为半径的球面, 则

$$f(\boldsymbol{p}_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}fd\sigma.$$

(7) 若 f 在 M 内部调和, 在 M 上连续且非常数, 则 f 只能在 ∂M 上达到最大值和最小值.

提示: 利用 M 内部的连通性(第五章 § 2.4定理 1).

7. 设 M 是 Gauss 公式中的闭域, 体积为 V. 数量场 $f\in\mathscr{C}^{(2)}$ 处处非零, 满足条件

$$\operatorname{div}(f\operatorname{grad}f)=af,\quad \|\nabla f\|^2=bf,$$

其中 a, b 是常数. $\boldsymbol{n}$ 是 ∂M 的单位外法向场, 计算 $\iint\limits_{\partial M}\frac{\partial f}{\partial n}d\sigma$.

§ 5.3 势函数和向量势

设在区域 $\Omega\subset R^3$ 上分布着一个向量场 $\boldsymbol{F}=(P, Q, R)$. 如果在 Ω 上有一数量场 θ 使

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}\theta$$

在Ω上成立，也就是

$$d\theta = Pdx + Qdy + Rdz = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{p}$$

在Ω上成立，则称$\boldsymbol{F}$为一**有势场**，θ是它的一个**势函数**。

如果对Ω中任意一条封闭曲线L皆有

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{p} = 0,$$

则说$\boldsymbol{F}$是一**保守场**。如果在Ω上

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0},$$

则说$\boldsymbol{F}$为一**无旋场**。

由§4.7的内容，我们立即可以清楚以上三种场的等价性。现再叙述如下：

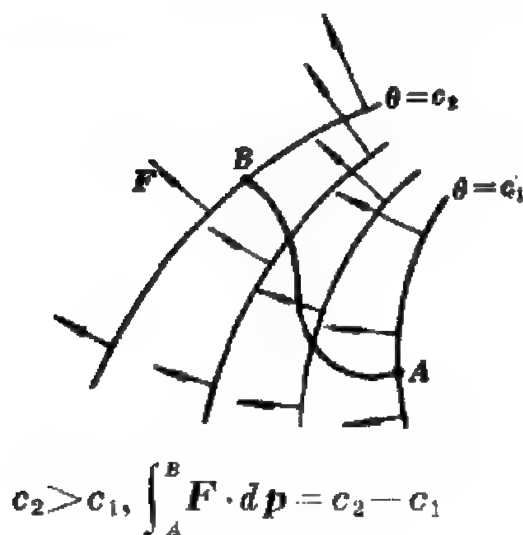
1° 若$\boldsymbol{F}$有势，θ是其任一势函数，则(§4.6定理2)

$$\int_M \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{p} = \theta(B) - \theta(A),$$

其中A、B是有向曲线M的起点和终点。因此$\boldsymbol{F}$是保守场。

按有势场的定义，场$\boldsymbol{F}$是势θ的梯度场，因此是等势面$\theta = c$的法向量场，指向势函数θ增加的一侧。

1° 说明，有势场是保守场，因此场作功与路径无关，并且可以通过势函数θ表示场$\boldsymbol{F}$所作之功。图126是有势场的图解。



$c_2 > c_1, \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{p} = c_2 - c_1$

图 126

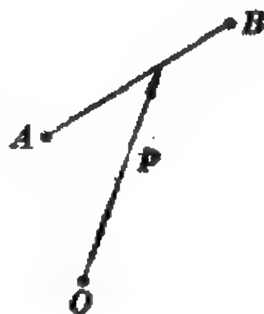


图 127

2° 若$\boldsymbol{F}$是保守场，则$\boldsymbol{F}$有势（§4.7 定理 2）：

$$\theta:\quad \theta(B)=\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}$$

即为它的一势.

3° 若Ω中任意一条封闭曲线上都可以张以一张全在Ω中的曲面，则$\boldsymbol{F}$为有势场的充分必要条件是$\boldsymbol{F}$为无旋场（§4.7 定理4）.

例 1 求点电荷产生的电势.

解 设点电荷 q 的位置为原点 O，则场强为 $\boldsymbol{F}$：

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p})=\frac{q}{p^3}\boldsymbol{p},\qquad \boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}.$$

这是有心场，由 §5.2 例 3，它是无旋场，所以有势. 现在根据2°来计算它的势 θ. 固定一点 $A\neq O$，则当点 $B\neq O$ 时（图 127）

$$\theta(B)=\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}=\int_{\overline{AB}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}. \tag{1}$$

设 $\boldsymbol{p}=(x,y,z)$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\cdot d\boldsymbol{p}&=xdx+ydy+zdz\\&=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\&=pdp.\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{p}=q\frac{dp}{p^2}. \tag{2}$$

若以 p 为参数表示线段 $\overline{AB}$，则 p 在$\|A\|$和$\|B\|$之间. 因此，以(2)式代入(1)式得

$$\theta(B)=q\int_{\|A\|}^{\|B\|}\frac{dp}{p^2}=-\frac{q}{\|B\|}+\frac{q}{\|A\|}.$$

其中 A 是任一定点. 若令$\|A\|\to+\infty$，显然仍得一势函数 θ：

$$\theta(B)=-\frac{q}{\|B\|}.$$

这是将一单位点电荷从无穷远处移至点 B 时场强 $\boldsymbol{F}$所作之功. 在

物理学中，习惯把 φ:

$$\varphi(p)=\frac{q}{p}=-\theta(p) \qquad (p\neq 0)$$

叫做点电荷 q 的"电势"．这是单位电荷从 p 点移至无穷远处所作之功．▯

最后，如果在 Ω 上存在一个向量场 $\boldsymbol{B}$ 使

$$\boldsymbol{F}=\mathrm{rot}\boldsymbol{B},$$

则 $\boldsymbol{B}$ 叫做 $\boldsymbol{F}$ 的**向量势**．如果

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=0,$$

则 $\boldsymbol{F}$ 叫做**无源场**．由 § 4.7 定理 5 可见(习题)：如果 Ω 是区间，则 $\boldsymbol{F}$ 有向量势的充分必要条件是 $\boldsymbol{F}$ 为无源场．对于无源场，我们可用 § 4.7 定理 5 中的方法求向量势．

从 § 4.7 的内容我们应注意到，无旋场和无源场在数学上也是统一的，都是恰当微分的问题．

习　　题

1．回答下列问题：

(1) 有势场、保守场和无旋场有什么关系？保守场有什么物理意义？可以作何图解？

(2) 向量场有向量势的充分必要条件是什么？

(3) 为什么说无旋场和无源场的概念在数学上是统一的？

(4) $\mathrm{rot\,grad}\,u=$？ $\mathrm{div\,rot}\,\boldsymbol{F}=$？

2．求出有心场 $\boldsymbol{F}$:

$$\boldsymbol{F}(p)=f(p)\frac{\boldsymbol{p}}{p}$$

的势函数．

3．在一个不包含原点的区间上求出向量场 $\frac{\boldsymbol{p}}{p^3}$ 的向量势．

4．设 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{C}^{(1)}$ 是区间 Ω 上的向量场．证明 $\boldsymbol{F}$ 为无旋场且有向量势的充分必要条件是存在 Ω 上的调和函数 θ 使 $\boldsymbol{F}=\mathrm{grad}\,\theta$．

5. 设有向量场 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{F}$ 有向量势 $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{G}$ 有势函数 θ. 证明

$$\nabla^2\theta=\mathrm{div}\boldsymbol{H},\quad \mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{U})-\nabla^2\boldsymbol{U}.$$

6. 设 $\boldsymbol{H}=(x^2y, y^2z, z^2x)$. 试将 $\boldsymbol{H}$ 分解为无旋场和无源场之和.

7. 设 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $v(x,y,z)=x+y+z$, 计算积分

$$\iint_\Sigma \nabla u\times\nabla v\cdot\boldsymbol{n}d\sigma,$$

其中 Σ 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geqslant 0$; $\boldsymbol{n}$ 是朝上的单位法向场.

提示: 考虑 $v\nabla u$.

8. 设 M 是 Gauss 公式中的闭域, $\boldsymbol{n}$ 是 ∂M 的单位外法向场. M 上的向量场 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}\in\mathscr{C}^{(1)}$ 满足

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F}=\mathrm{rot}\boldsymbol{G},\quad \mathrm{div}\boldsymbol{F}=\mathrm{div}\boldsymbol{G},\quad \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n}.$$

证明 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}$.

提示: 考虑 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G}$. 利用 §5.2 习题 6(2), 取 $f=g$, 证明

$$\iiint_M \|\boldsymbol{H}\|^2dv=0.$$

§5.4 正交曲线坐标

设直角坐标空间 xyz 有参数表示

$$\boldsymbol{p}=(x,y,z)=\boldsymbol{f}(u,v,w),\quad (u,v,w)\in G, \tag{1}$$

其中 G 是直角坐标空间 uvw 中的区域. 映射 $\boldsymbol{f}$ 满足条件:

1) $\boldsymbol{f}\in\mathscr{C}^{(1)}$;

2) $\boldsymbol{f}$ 是单射;

3) $\det J\boldsymbol{f}>0$;

4) $\dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial u}, \dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial v}, \dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial w}$ 正交.

我们在 §4.1(五) 中已经知道, 这时通过空间每一点有一条 u-曲线, 一条 v-曲线和一条 w-曲线. $\dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial u}, \dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial v}, \dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial w}$ 分别是这三族曲线的切向场. 设 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 是分别与 $\dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial u}, \dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial v}, \dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial w}$ 同向的单位向量

(图 128)，于是

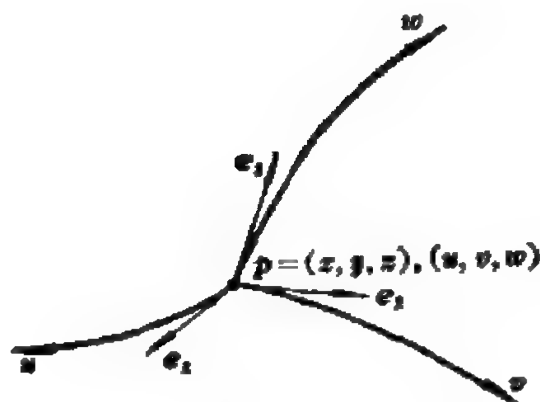


图 128

$$\frac{\partial p}{\partial u}=\frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial u}\boldsymbol{k}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1,$$

$$\frac{\partial p}{\partial v}=\frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial v}\boldsymbol{k}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial w}=\frac{\partial x}{\partial w}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial w}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial w}\boldsymbol{k}=\lambda_3\boldsymbol{e}_3.$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3>0$. 因为由条件3)，

$$\frac{\partial p}{\partial u}\times\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial p}{\partial w}=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}>0,$$

故$\dfrac{\partial p}{\partial u}, \dfrac{\partial p}{\partial v}, \dfrac{\partial p}{\partial w}$成(正交)右手系，所以 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 也成正交右手系. $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$叫做"活动标架". 我们注意到，根据 § 4.1 中定向的概念，参数表示(1)不改变空间 xyz 的方向.

因为f是单射，所以xyz空间中每一点$p=(x, y, z)$对应于G中唯一的一点(u, v, w)，我们把(u,v,w)叫做p点的"正交曲线坐标". 这样，参数表示(1)或映射f就赋予了 xyz 空间一个"正交曲线坐标系". 例如，§ 1.7(1)式赋予直角坐标平面xy一个极坐标系，使得xy平面上每一点(x, y)都有一个极坐标(r, θ). 再如，§ 2.2 (4)式赋予直角坐标空间 xyz 一个球坐标系，使得 xyz 空间中每一点(x, y, z)都有一个球坐标(r, θ, φ). 它们都是正交曲线坐标.

设Φ是定义在 xyz 空间上的函数. 前面我们已经知道梯度

grad Φ 和 Laplace 算子Δ(§5.2 习题3) 在直角坐标系中的表示:

$$\mathrm{grad}\Phi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{k},$$

$$\Delta\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

现在我们要求出它们在正交曲线坐标系中的表示. 就 gradΦ 来说, 这就是要把它表示在活动标架 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ 上, 并以曲线坐标 u, v, w 代换直角坐标x, y, z. 对于散度和旋度自然也有同样的问题, 我们把它作为习题留给读者去做.

记一个矩阵 A 的转置为 A'. 由条件 4) 和(2)式易见.

$$(Jf)'Jf=\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & 0\\ & \lambda_2^2 & \\ 0 & & \lambda_3^2\end{pmatrix},$$

所以

$$[(Jf)']^{-1}=Jf\begin{pmatrix}\lambda_1^{-2} & & 0\\ & \lambda_2^{-2} & \\ 0 & & \lambda_3^{-2}\end{pmatrix}.$$

再由(2)式得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix}=[(Jf)']^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{e}_1\\ \lambda_2\boldsymbol{e}_2\\ \lambda_3\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}=Jf\begin{pmatrix}\lambda_1^{-2} & & 0\\ & \lambda_2^{-2} & \\ 0 & & \lambda_3^{-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\boldsymbol{e}_1\\ \lambda_2\boldsymbol{e}_2\\ \lambda_3\boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}$$

$$=Jf\begin{pmatrix}\dfrac{\boldsymbol{e}_1}{\lambda_1}\\ \dfrac{\boldsymbol{e}_2}{\lambda_2}\\ \dfrac{\boldsymbol{e}_3}{\lambda_3}\end{pmatrix}.$$

所以

$$\text{grad}\,\Phi = J\Phi\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{k}\end{pmatrix} = J\Phi J\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{e}_1}{\lambda_1}\\ \frac{\boldsymbol{e}_2}{\lambda_2}\\ \frac{\boldsymbol{e}_3}{\lambda_3}\end{pmatrix} = J\Phi\circ\boldsymbol{f}\begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{e}_1}{\lambda_1}\\ \frac{\boldsymbol{e}_2}{\lambda_2}\\ \frac{\boldsymbol{e}_3}{\lambda_3}\end{pmatrix}.$$

而

$$J\Phi\circ\boldsymbol{f} = \left(\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial u}, \frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial v}, \frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial w}\right),$$

所以我们得到 grad Φ 的正交曲线坐标表示为

$$\text{grad}\,\Phi = \frac{\boldsymbol{e}_1}{\lambda_1}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial u} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{\lambda_2}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial v} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{\lambda_3}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial w}. \tag{3}$$

下面我们再求出 Δ 的正交曲线坐标表示. 为此, 我们引入一个混合运算: 设 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in R^3$ 是两个向量, ω_1, ω_2 是两个微分形式, 则定义

$$\omega_1\boldsymbol{p}_1 \times \omega_2\boldsymbol{p}_2 = \omega_1\wedge\omega_2\,\boldsymbol{p}_1\times\boldsymbol{p}_2. \tag{4}$$

由(2)式,

$$\begin{aligned} dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k} &= \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial u}du + \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial v}dv + \frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial w}dw \\ &= (\lambda_1 du)\boldsymbol{e}_1 + (\lambda_2 dv)\boldsymbol{e}_2 + (\lambda_3 dw)\boldsymbol{e}_3. \end{aligned} \tag{5}$$

所以

$$\begin{aligned} &dy\wedge dz\,\boldsymbol{i} + dz\wedge dx\,\boldsymbol{j} + dx\wedge dy\,\boldsymbol{k} \\ &= \frac{1}{2}(dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}) \times (dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} + dz\,\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda_1 du\,\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 dv\,\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 dw\,\boldsymbol{e}_3) \\ &\quad\times(\lambda_1 du\,\boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 dv\,\boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 dw\,\boldsymbol{e}_3) \\ &= \lambda_2\lambda_3 dv\wedge dw\,\boldsymbol{e}_1 + \lambda_3\lambda_1 dw\wedge du\,\boldsymbol{e}_2 + \lambda_1\lambda_2 du\wedge dv\,\boldsymbol{e}_3. \end{aligned} \tag{6}$$

令

$$\omega=\frac{\partial\Phi}{\partial x}dy\wedge dz+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dz\wedge dx+\frac{\partial\Phi}{\partial z}dx\wedge dy. \tag{7}$$

则

$$d\omega=\Delta\Phi\, dx\wedge dy\wedge dz. \tag{8}$$

但由(7),(6)和(3)得

$$\begin{aligned}\omega&=\nabla\Phi\cdot(dy\wedge dz\,\boldsymbol{i}+dz\wedge dx\,\boldsymbol{j}+dx\wedge dy\,\boldsymbol{k})\\&=\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial u}dv\wedge dw+\frac{\lambda_3\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial v}dw\wedge du\\&\qquad+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial w}du\wedge dv,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}d\omega=\Big(&\frac{\partial}{\partial u}\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\lambda_3\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial v}\\&+\frac{\partial}{\partial w}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial w}\Big)du\wedge dv\wedge dw.\end{aligned} \tag{9}$$

另一方面,由(2)式和 § 4.2(14)式,

$$\begin{aligned}dx\wedge dy\wedge dz&=\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial w}du\wedge dv\wedge dw\\&=\lambda_1\lambda_2\lambda_3 du\wedge dv\wedge dw.\end{aligned}$$

代入(8)式得

$$d\omega=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\Delta\Phi\, du\wedge dv\wedge dw.$$

再与(9)式比较便得 $\Delta\Phi$ 的正交曲线坐标表示为

$$\begin{aligned}\Delta\Phi=\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\Big(&\frac{\partial}{\partial u}\frac{\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\lambda_3\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial v}\\&+\frac{\partial}{\partial w}\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3}\frac{\partial\Phi\circ\boldsymbol{f}}{\partial w}\Big).\end{aligned} \tag{10}$$

例 1 求出算子 ∇ 和 Δ 的球坐标表示.

解 由 § 2.2(4),对于球坐标我们有

$$\boldsymbol{p}=(x,y,z)=(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta). \tag{11}$$

于是(图 129)

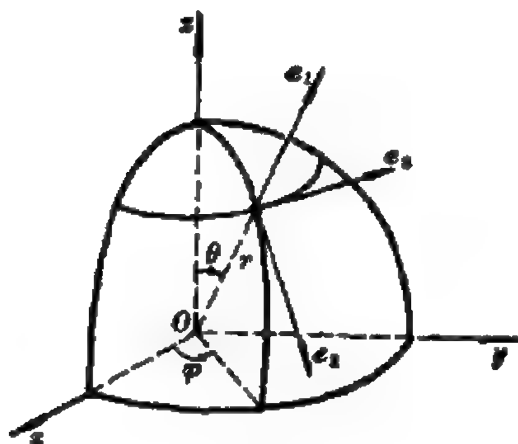


图 129

$$\frac{\partial p}{\partial r}=(\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta)=e_1,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta}=(r\cos\theta\cos\varphi,\ r\cos\theta\sin\varphi,\ -r\sin\theta)=re_2,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi}=(-r\sin\theta\sin\varphi,\ r\sin\theta\cos\varphi,\ 0)=r\sin\theta e_3.$$

所以

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=r,\quad \lambda_3=r\sin\theta.$$

代入(3)式和(10)式便得(其中 f 由(11)式定义)

$$\nabla\Phi=e_1\frac{\partial\Phi\circ f}{\partial r}+\frac{e_2}{r}\frac{\partial\Phi\circ f}{\partial\theta}+\frac{e_3}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi\circ f}{\partial\varphi}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\sin\theta\frac{\partial\Phi\circ f}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Phi\circ f}{\partial\theta}\right.\\&\qquad\left.+\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\Phi\circ f}{\partial\varphi}\right)\\&=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\Phi\circ f}{\partial r}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\Phi\circ f}{\partial\theta}\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi\circ f}{\partial\varphi^2}\right).\end{aligned} \tag{13}$$

例 2 在原点置一点电荷q, 得场强 $F=q\frac{p}{p^3}$, $p=\|p\|$. 再求"电势" Φ 使

$$\mathrm{grad}\Phi=-\boldsymbol{F}. \tag{14}$$

解 由(14)和§5.2例1得Φ满足方程

$$\Delta\Phi=-\nabla\cdot\boldsymbol{F}=0, \tag{15}$$

即Φ是调和函数. 引入球坐标 (11). 因为 $\boldsymbol{F}$ 是等势面 $\Phi=c$ 的法向场, 所以等势面 $\Phi=c$ 应是层层球面. 因此, 若令

$$u=\Phi(x,y,z)$$

并以(11)代入, 则 u 应与 θ 和 φ 无关, 即

$$\frac{\partial u}{\partial\theta}=\frac{\partial u}{\partial\varphi}=0.$$

故由(13)式和(15)式得

$$\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2\frac{\partial u}{\partial p}=0.$$

所以

$$u=\frac{c}{p}+c'.$$

取 $c'=0$. 再由(14)式得

$$-q\frac{\boldsymbol{p}}{p^3}=\mathrm{grad}u=-c\frac{\boldsymbol{p}}{p^3},$$

所以

$$c=q.$$

于是

$$u=\frac{q}{p}.$$

即

$$\Phi(x,y,z)=\frac{q}{p},$$

其中 $p=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. □

习　题

1. 所谓用正交曲线坐标表示三度和算子 Δ 是什么意思?

2. 证明散度的正交曲线坐标表示为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\left(\frac{\partial}{\partial u}\lambda_2\lambda_3\widetilde{P}+\frac{\partial}{\partial v}\lambda_3\lambda_1\widetilde{Q}+\frac{\partial}{\partial w}\lambda_1\lambda_2\widetilde{R}\right),$$

其中 $\widetilde{P},\widetilde{Q},\widetilde{R}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 在活动标架 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 上的分量，即

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\widetilde{P}(u,v,w)\boldsymbol{e}_1+\widetilde{Q}(u,v,w)\boldsymbol{e}_2+\widetilde{R}(u,v,w)\boldsymbol{e}_3.$$

并由 $\Delta=\operatorname{div}\operatorname{grad}$ 再得 Δ 的曲线坐标表示.

3. 证明旋度的正交曲线坐标表示为

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\lambda_2\lambda_3}\boldsymbol{e}_1 & \dfrac{1}{\lambda_3\lambda_1}\boldsymbol{e}_2 & \dfrac{1}{\lambda_1\lambda_2}\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w}\\ \lambda_1\widetilde{P} & \lambda_2\widetilde{Q} & \lambda_3\widetilde{R}\end{vmatrix}.$$

4. 在直角坐标空间 xyz 中引入柱坐标

$$\boldsymbol{p}=(x,y,z)=(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z).$$

试求出梯度和算子 Δ 的柱坐标表示.

第八章　无穷级数

前面我们接触到的主要是初等函数，有相当多的自然现象和工程技术中的问题需要这些函数来描述．但是，随着科学技术的发展，人们对自然界的认识逐步深化，发现有很多自然现象不能用初等函数来描述，特别有很多微分方程的解不能用初等函数来表达．这就要求人们去构造一些新的函数．用什么方法构造新的函数呢？在讲 Taylor 公式时，我们得到过 e^x 的一个表达式：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$$

$$(0<\theta<1,\ -\infty<x<+\infty).$$

对于给定的 x，显然有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}=0.$$

若在上式中命 $n\to+\infty$，就有

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

这样，我们就把 e^x 表成了无穷多个幂函数

$$1,\ x,\ \frac{x^2}{2!},\ \cdots,\ \frac{x^n}{n!},\ \cdots$$

的和．换句话说，无穷多个幂函数的迭加产生了指数函数．这启发我们，把无穷多个函数

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots,\ u_n(x),\ \cdots$$

迭加起来，可能产生新的函数

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots, \tag{1}$$

这是构造新函数的一条重要途径．当然，随之而来会有很多新问

题：无穷多个函数如何相加？如何研究由(1)确定的函数的性质？如何计算它的导数和积分？这些都是本章要解决的问题。

第一节 数项级数

§1.1 基本概念

先定义无穷个数相加的意义。设

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$$

是一给定的数列，称形式和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

为一**无穷级数**，其中各数称为级数的项。无穷个数如何相加呢？我们从一个简单的例子谈起：计算无穷级数

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots \quad |r| < 1 \tag{1}$$

的"和"。我们知道，这个级数的前 n 项的和

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r},$$

n 愈大，加的项数愈多。如果当 $n \to +\infty$ 时，S_n 有极限，自然就把这极限规定为级数(1)的和。现在

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1-r} \quad |r| < 1.$$

因此有

$$1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots = \frac{1}{1-r} \quad |r| < 1.$$

对于一般的级数，我们有下面的

定义 1 无穷级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{2}$$

的前 n 项的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

称为这级数的第 n 个部分和；如果这些部分和构成的数列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$$

有有限的极限 S，我们就说级数(2)是收敛的，其和为 S，记作

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S;$$

如果数列(S_n)没有有限的极限，就说级数(2)是发散的.

例 1 刚才说过，等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

当$|q|<1$时是收敛的，它的和是$\frac{1}{1-q}$. 当 $q=1$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots \tag{3}$$

的部分和

$$S_n = n \to +\infty$$

故级数(3)发散. 当 $q=-1$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{4}$$

的部分和

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = \text{偶数}, \\ 1, & n = \text{奇数}, \end{cases}$$

没有极限，级数(4)发散. 当$|q|>1$时，

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$$

也没有有限的极限，故级数发散. 综上所述，等比级数$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 只有

当$|q|<1$时才是收敛的. □

例 2 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

的部分和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=1-\frac{1}{n+1},$$

显然$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1$, 故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$收敛, 其和为 1. □

例 3 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots$$

的部分和

$$S_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha},$$

由第四章 §1.3 的例 3 得知: 当$\alpha\leqslant 1$时, S_n不是基本数列, 因而是发散的; 当$\alpha\geqslant 2$时, S_n是基本数列, 因而收敛. 特别当$\alpha=1$时, 调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

发散; 当$\alpha=2$时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

收敛.

这两个级数以后经常要用到，下面我们分别给出它们发散、收敛的直接证明.

先看调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. 由于

$$1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{项}}>\underbrace{\frac{1}{2^k}+\cdots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}\text{项}}=\frac{1}{2},$$

级数的第 2^k 个部分和

$$S_{2^k}=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)>\frac{k}{2},$$

所以$\lim_{k\to+\infty}S_{2^k}=+\infty$. 这说明 S_n 有一个子列 S_{2^k} 发散，因而 S_n 发散，故调和级数发散.

再看级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. 显然它的部分和 S_n 是一单调增加数列，而且

$$S_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=2-\frac{1}{n}<2,$$

即 S_n 是一单调增而有上界的数列，因而收敛，故原级数收敛. □

从级数收敛的定义可以看出，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散及其求和的问题，归结为判断相应的部分和数列S_n的敛散及求其极限的问题；反之，任给一数列S_n，总可以造一级数，使其部分和就是S_n。事实上，只要命

$$a_1=S_1,\ a_2=S_2-S_1,\ \cdots,\ a_n=S_n-S_{n-1},\ \cdots,$$

就有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n,$$

即S_n是级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和数列。如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且其和为S，那么S就是S_n的极限。因此，判断数列的敛散也可化为级数的敛散问题来考虑。由此可见，级数和数列是可以互相转化的，而数列极限则是研究无穷级数的基础。

习　题

1. 回答下列问题

(1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的收敛和发散是怎样定义的？

(2) 等比级数$\sum_{n=0}^{\infty}q^n$在什么条件下收敛？ 什么条件下发散？

(3) 如何把判断数列的敛散问题转化为级数的敛散问题？

(4) 下面五个级数中：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3},\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n},$$

哪些收敛？ 哪些发散？

2. 求下列级数的和：

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$。

(2) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots$。

(3) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots$。

(4) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots$。

(5) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$。

3. 证明下列等式:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\ln 2$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$, 其中 m 是自然数.

4. 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(pn+q)(pn+q+pr)}=\frac{1}{pr}\left(\frac{1}{q+p}+\frac{1}{q+2p}+\cdots+\frac{1}{q+rp}\right),$$

这里 r 是自然数, $pn+q\neq 0\quad(n=1,2,\cdots)$.

注意: 习题 2.3 中哪几个小题是它的特例?

5. 证明 $\sum\limits_{\substack{n=1\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{1}{m^2-n^2}=-\frac{3}{4m^2}$ (m 是给定的自然数)。

6. 证明 $10<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10^6}<20$。

7. 作一无穷级数, 使其部分和 $S_n=\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$.

8. (1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一收敛级数, 其和为 S. 用 (S_n) 记它的部分和数列,

命

$$\sigma_n=\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{n},$$

证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=S$.

(2) 试造一发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 但由(1)所构造的 σ_n 却是收敛的.

(3) 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=S$, 证明 $a_n=o(n)$, 这里 σ_n 就是(1)中定义的数列.

9. 设 $a_n>0$, $S_n=a_1+\cdots+a_n$, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

§1.2 无穷级数的简单性质

研究无穷级数, 一个最基本的问题是判断它的敛散性, 只有在级数收敛的情况下, 讨论它的求和问题才是有意义的. 下面给出一个级数收敛的必要条件.

定理 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

证明很简单. 设

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad S=\sum_{k=1}^{\infty}a_k,$$

那么

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=S,\quad \lim_{n\to+\infty}S_{n-1}=S.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_{n-1})=0. \qquad \square$$

这个简单的事实可以用来判断一些级数的发散性.

例 1 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 发散. 这是因为

$$a_n=(-1)^n\not\to 0\quad (n\to+\infty). \qquad \square$$

例 2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ 发散．这是因为

$$a_n = n\sin\frac{1}{n} \to 1 \neq 0 \quad (n \to +\infty). \qquad \square$$

必须注意，$a_n \to 0$ 仅仅是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件，并不充分，也就是说，从 $a_n \to 0$ 不能得出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的结论．调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 便是一个例子，它的通项 $a_n = \frac{1}{n} \to 0 (n \to +\infty)$，但它却是发散的．

无穷级数的和既然是有限和的极限，因此在运算上当然有与通常有限和类似的性质．这里我们首先指出的是线性性质．

定理 2 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ 也收敛，且有

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

其中 c 是任意常数．

证明 我们证明第二个等式．命

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k), \quad S'_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S''_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,$$

显然有 $S_n = S'_n + S''_n$．由假定，数列 S'_n 和 S''_n 都是收敛的，因而 S_n 也收敛，且

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} S'_n + \lim_{n\to+\infty} S''_n,$$

即

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k+\sum_{k=1}^{\infty}b_k.$$

另一个等式可同法证明. □

这个定理告诉我们,收敛级数可以逐项相加。

例 3 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^n}$ 的和.

解 已知等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}=3.$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^n}=\frac{15}{4}.$$ □

与有限和类似的另一个性质是收敛级数的可结合性。

定理 3 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一收敛级数. 如果将级数的项任意归组而不改变其先后的次序,得新级数

$$(a_1+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots+(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})+\cdots, \tag{1}$$

则新级数也收敛,且与原级数有相同的和。

证明 设原级数的部分和数列为

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots, \tag{2}$$

它有极限 S. 新级数的部分和数列显然是

$$S_{n_1}, S_{n_2}, \cdots, S_{n_k}, \cdots,$$

它是(2)的一个子数列,因而与(2)有相同的极限 S. □

必须注意,这个命题的逆命题是不成立的. 即若(1)收敛, 不

能断言原级数一定收敛. 级数

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

便是一个例子: 如果把它两两结合起来, 便得一收敛级数

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0,$$

但它本身是发散的.

但若对(1)加上一些条件, 定理 3 的逆命题也能成立.

定理 4 如果(1)的在同一括号中的项都有相同的符号, 那么从(1)的收敛, 便能推出原级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 而且二者有相同的和.

证明 设(1)的部分和为

$$A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots,$$

由假定 $\lim_{k\to+\infty}A_k=S$. 由于(1)的括号中的项都同号, 故当 n 由 n_{k-1} 变到 n_k 时, 相应的原级数的部分和 S_n 将单调地在 A_{k-1} 和 A_k 之间变动, 即

$$A_{k-1}\leqslant S_n\leqslant A_k \quad 或 \quad A_k\leqslant S_n\leqslant A_{k-1} \quad (n_{k-1}<n\leqslant n_k).$$

命 $n\to+\infty$, 这时 $k\to+\infty$, 而 $\lim_{k\to+\infty}A_k=\lim_{k\to+\infty}A_{k-1}=S$, 所以

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=S. \qquad \square$$

这个定理下面将要用到.

定理 5 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$前面去掉有限项或加上有限项, 不影响级数的敛散性.

证明 在上述级数前去掉 m 项得级数

$$\sum_{k=m+1}^{\infty}a_k=a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots.$$

记

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k, \qquad S'_{n-m}=\sum_{k=m+1}^{n}a_k,$$

则

$$S_n - S'_{n-m} = a_1 + \cdots + a_m$$

是一与 n 无关的常数，故数列 S_n 与 S'_{n-m} 有相同的敛散性，因而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ 有相同的敛散性。同样可以证明，加上有限项也不影响级数的敛散性。 □

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的必要条件是什么？

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，将级数的项任意归组而不改变其先后次序所得的新级数是否收敛？若收敛，和原级数的和是否相同？反之，从新级数的收敛性能否推出原级数也收敛？若不能，则在何种条件下，从新级数的收敛性一定能保证原级数也收敛？

(3) 任意改变级数的有限项是否会影响这级数的敛散性？若原级数收敛，是否会改变其和？

(4) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都是发散的级数，则对下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

的敛散性能得出什么结论？

2. 证明下列级数发散：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$.　　　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{3n^2-2}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.　　　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

3. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$也收敛．试举例说明，逆命题不成立．但若$a_n\geqslant 0$，则逆命题也成立，试证之．

4. 设$a_n>0$，$\{a_n-a_{n+1}\}$为一严格减的数列．如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，试证

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)=+\infty.$$

5. 设$|x|<1$，试证

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\frac{x}{1-x}.$$

6. 设数列$\{na_n\}$和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$都收敛，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛．

§1.3 正项级数的比较判别法

从这一小节开始，我们要较为系统地讨论判断级数敛散的方法．先讨论正项级数，它与一般级数的敛散问题有密切关系．

若$a_n\geqslant 0\quad(n=1,2,\cdots)$，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数．例如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$都是正项级数．

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是一正项级数，它的部分和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

显然是一单调增数列．由此可得

定理1 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充分必要条件是其部分和数

列(S_n)有界.

证明 必要性是显然的. 现假定(S_n)有界, 则因(S_n)是单调增数列, 故有极限, 因而$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛. ▯

由于正项级数的部分和S_n是单调增数列, 它只有两种情形: 若有界, 则有有限的极限; 若无界, 则必趋于$+\infty$. 因此正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$只有两种可能: 或者收敛于有限数, 这时$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$; 或者发散于$+\infty$, 即$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

定理1是判断正项级数敛散的最基本的方法. 几乎所有其它的判别法都由它导出.

例1 证明级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$收敛.

解 这是一个正项级数, 只须证明它的部分和有界就行了. 事实上,

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= 2 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 3 - \frac{1}{n} < 3,
\end{aligned}
$$

所以该级数收敛. 下面就会看到, 这个级数的和就是自然对数的底e. ▯

例2 讨论级数

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \cdots
$$

的收敛性, 其中α是任意实数.

解 前面已经证明过，当 $\alpha=1$ 时，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的，其部分和数列无界. 而当 $\alpha<1$ 时，由于

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^\alpha}>\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 的部分和数列也无界. 所以当 $\alpha\leqslant1$ 时，上述级数发散.

再看 $\alpha>1$ 的情形. 不妨设 $\alpha=1+\sigma, \sigma>0$. 仿照处理调和级数的方法，取它的第 2^k-1 个部分和，并由第二项起依次分段，每段分别为 $2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^{k-1}$ 项，于是有

$$\begin{aligned}S_{2^k-1}&=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{6^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right)\\&<1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\alpha}\right)+\left(\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right)+\cdots\\&\quad+\left(\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^{k-1})^\alpha}\right)\\&=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\frac{1}{(2^{\alpha-1})^2}+\cdots+\frac{1}{(2^{\alpha-1})^{k-1}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^\sigma}}.\end{aligned}$$

对于给定的 n，总可选择充分大的 k，使 $2^k-1>n$. 于是，由于 S_n 单调增加，得

$$S_n<S_{2^k-1}<\frac{2^\sigma}{2^\sigma-1},$$

即部分和是有界的，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛. □

读者试分析这里的处理和对调和级数处理的异同之处.

由此例看到，虽然只要$\alpha>0$，就有$\frac{1}{n^\alpha}\to 0$，但级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$只有当$\alpha>1$时才收敛．这说明要一个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，不仅要求$a_n\to 0$，还要求$a_n$以一定的速度趋于零才行．

应用定理1可得

定理2（Cauchy积分判别法） 如果$f(x)$是$(a,+\infty)$上一个正的单调减的连续函数，其中a是某个正数，那么级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(a+n)=f(a)+f(a+1)+\cdots+f(a+n)+\cdots$$

和广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

同时敛散．

证明 因为$f(x)$是单调减的，所以当$a+k\leqslant x\leqslant a+k+1$时，有

$$f(a+k+1)\leqslant f(x)\leqslant f(a+k).$$

在区间$[a+k,a+k+1]$上积分，有

$$f(a+k+1)\leqslant\int_{a+k}^{a+k+1}f(x)dx\leqslant f(a+k)\quad(k=0,1,2,\cdots).$$

把这些不等式从$k=0$到$k=n$加起来得

$$\sum_{k=0}^{n}f(a+k+1)\leqslant\int_a^{a+n+1}f(x)dx\leqslant\sum_{k=0}^{n}f(a+k).\tag{1}$$

如果$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，则从(1)的左半不等式推知$\sum_{k=0}^{n}f(a+k+1)$有界，因而级数$\sum_{k=0}^{\infty}f(a+k)$收敛；如果$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散，则从(1)的

有半不等式得知$\sum_{k=0}^{K}f(a+k)$无界，因而级数$\sum_{k=0}^{\infty}f(a+k)$发散． □

例 3 例 2 证明了级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$当$\alpha>1$时收敛，$\alpha\leqslant 1$时发散．利用积分判别法，这个事实显得特别简单．事实上，只要取$a=1$，$f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$，于是级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$和积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$同敛散．而后者当$\alpha>1$时收敛，$\alpha\leqslant 1$时发散，因而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$也是这样． □

例 4 证明级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$当$\alpha>1$时收敛；$\alpha\leqslant 1$时发散．

证明 根据积分判别法，该级数与广义积分

$$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$$

同敛散．容易看出，这个广义积分当$\alpha>1$时收敛；$\alpha\leqslant 1$时发散．因而上述级数也是这样． □

定理 1 固然简单，但直接证明某些级数的部分和有界往往不是很容易的．根据定理 1 得到的比较判别法提供了一个判别级数敛散的简单方法：只须用一个已知敛散的级数和要判别的级数作比较便能得出结论．

定理 3（比较判别法） 设有两个正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$．如果从某项开始有不等式

$$a_n\leqslant b_n \quad (n>N),$$

那么

(i) 若$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛；

(ii) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$也发散.

证明 由于调换级数的有限项不影响其收敛性，故不妨假定不等式 $a_n \leqslant b_n$ 对所有 $n=1, 2, \cdots$ 都成立. 分别用 A_n, B_n 记 $\sum_{k=1}^{n} a_k$、$\sum_{k=1}^{n} b_k$ 的部分和，则显然有

$$A_n \leqslant B_n \quad (n=1, 2, \cdots).$$

(i) 若$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$，则 B_n 有界，因而 A_n 也有界，故

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty;$$

(ii) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$，则由上不等式知$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$. □

例 5 级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$收敛. 这由不等式

$$\frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$$

即知. □

例 6 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$收敛. 这是因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}} \quad (n=1, 2, \cdots).$$

而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$是收敛的，故知原级数也收敛. □

例 7 级数$\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-\ln n}$收敛. 因为当 n 较大时有不等式

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln n \ln \ln n} = n^{\ln \ln n} > n^2,$$

即

$$(\ln n)^{-\ln n}<\frac{1}{n^2} \quad (n>N),$$

故原级数收敛. □

例 8 研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

的敛散性.

我们知道

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \cdots),$$

所以

$$0<\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}$$
$$(n=1, 2, \cdots).$$

故由比较判别法知原级数收敛.

记例 8 中级数的和为 C, 则有

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right]=C.$$

但

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]=\ln(n+1),$$

上式即为

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right]=C.$$

由于 $\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 0\ (n\to+\infty)$, 在上式中不妨用

$\ln n$ 代替 $\ln(n+1)$，得

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C.$$

C 称为 Euler 常数，它的数值是

$$C=0.577215\cdots.$$

若记

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n-C=\varepsilon_n,$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$ 且有

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+C+\varepsilon_n.$$

这是调和级数部分和的一个渐近表达式，由此可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1.$$

这说明调和级数的部分和是与 $\ln n$ 等价的无穷大量，它随 n 增长的速度十分缓慢，与 $\ln n$ 相当。曾有人计算过，

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1000}=7.48\cdots,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1000000}=14.39\cdots.$$

这和刚才的结论是一致的。 □

应用比较判别法，就是运用不等式，而不等式是可以通过极限方法来建立的。下面的判别法比比较判别法用起来方便。

定理 4（比较判别法的极限形式） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个正项级数，且有极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=l,$$

那么

(i) 若$0<l<+\infty$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$同敛散；

(ii) 若$l=0$，则当$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛；

(iii) 若$l=+\infty$，则当$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也发散.

证明 (i) 设$0<l<+\infty$，则对$\varepsilon=\frac{l}{2}>0$，存在$N$，当$n\geqslant N$时，有

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\frac{l}{2},$$

即

$$\frac{1}{2}lb_n<a_n<\frac{3}{2}lb_n.$$

如果$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则从上面的右半不等式得知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛，如果$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则从左半不等式得知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也发散．因而二者同敛散．

(ii) 若$l=0$，则对$\varepsilon=1$，可得N，当$n>N$时，

$$0<\frac{a_n}{b_n}<1,$$

即$a_n<b_n$．故当$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛.

同理可证(iii)成立． □

例9 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}$是发散的，这是因为

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^3+2n-1}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}\quad(n\to+\infty).$$

故由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$的发散便知上面的级数发散. □

例 10 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)$的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{x^2}{2},$$

所以不论 x 取什么值,级数都收敛. □

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 正项级数的部分和数列有什么特点? 正项级数收敛的充要条件是什么?

(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$在什么条件下收敛? 什么条件下发散?

(3) 设 $a_n\leqslant b_n$ $(n=1, 2, \cdots)$, 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 能否断言$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛? 试举例说明.

2. 用比较判别法讨论下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+5}$. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{3n^2+1}\right)^n$. (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n-2)}$. (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

(7) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$. (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$.

3. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛；但反之不然，举例说明。

4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛，试证

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$$

也收敛。

5. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ 也收敛；举例说明逆命题不成立，但若 a_n 单调减，则逆命题也成立。

6. 把下列数列换成对应的级数(即这级数的部分和数列就是 $\{a_n\}$)，然后判别它们的收敛性：

(1) $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$.

(2) $a_n = 1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 3 + \cdots + \frac{1}{n}\ln n - \frac{1}{2}\ln^2 n$.

7. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一发散的正项级数。

(1) 试证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ 收敛。

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n a_n}$ 的敛散情况如何？

8. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一收敛的正项级数，试证：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 收敛。

(2) 对任何 $\delta > 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1+\delta}{2}} \sqrt{a_n}$ 收敛。

(3) $\delta = 0$ 时情况如何？

9. 设 $\alpha > 0$，$a_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$，试证：

(1) 若当 $n>N$ 时有 $\left(\ln\frac{1}{a_n}\right)(\ln n)^{-1}\geqslant 1+\alpha$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2) 若当 $n>N$ 时有 $\left(\ln\frac{1}{a_n}\right)(\ln n)^{-1}\leqslant 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

10. 利用上题结果，证明

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$$

收敛.

11. 讨论下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$.

(2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p}(\ln\ln n)^{q}}$.

12. 设 $a_n>0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, 证明

(1) 当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha\leqslant 1$ 且 $S_n\to+\infty$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

提示: (1) 在区间 $[S_{n-1}, S_n]$ 中对函数 $f(x)=x^{1-\alpha}$ 用中值定理.

13. 试证恒等式

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}.$$

并由此证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2.$$

14. 试证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

当 $0<x<\frac{1}{e}$ 时收敛；当 $x\geqslant\frac{1}{e}$ 时发散.

15. 从调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 中划去所有分母中含有数字 9 的那些项 $\left(\text{例如 } \frac{1}{9}, \frac{1}{19}, \frac{1}{391}\right)$ 之后所组成的新级数是收敛的，且其和不超过 80.

§1.4 正项级数的其它判别法

应用比较判别法，将正项级数与几何级数比较，就派生出下面两个常用的判别法.

定理1(Cauchy判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是一正项级数.

(i) 如果存在正数 $q<1$，使得对充分大的 n 都有

$$\sqrt[n]{a_n}\leqslant q<1,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

(ii) 如果对无穷多个 n 都有

$$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1,$$

那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

证明 (i) 由于当 $n>N$ 时有

$$\sqrt[n]{a_n}\leqslant q<1,$$

即 $a_n\leqslant q^n\ (n>N)$，故由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(ii) 由于有无穷多项都不小于 1，因而 $a_n\not\to 0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

这个判别法的极限形式用起来更方便.

定理1′（Cauchy 判别法的极限形式） 设 $a_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，且上极限

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则有

(i) 当$q<1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

(ii) 当$q>1$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

证明 由假定，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$\sqrt[n]{a_n}<q-\varepsilon.$$

(i) 当$q<1$时，可取正数 ε 充分小，使得 $q+\varepsilon<1$. 于是有

$$\sqrt[n]{a_n}<q+\varepsilon<1\quad(n>N),$$

所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(ii) 当$q>1$时，由于有(a_n)的子数列(a_{n_k})使得

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[n_k]{a_{n_k}}=q>1.$$

这说明有无穷多个 n 使得

$$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1,$$

因而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散. □

例1 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\frac{e}{2}>1,$$

所以级数发散. □

例 2　讨论级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots$$

的敛散性。

显然

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[2n-1]{\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

所以该级数收敛。　□

必须注意，如果$q=1$，即若$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=1$，则不能判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的敛散。例如对级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$都有$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$，但前者是发散的，后者是收敛的。

定理 2（D'Alembert判别法）　设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是一正项级数，那么

(i)　如果存在正数$q<1$，使得当$n\geqslant N$时都有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q<1,$$

则级数收敛；

(ii) 如果当$n\geqslant N$时有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1,$$

则级数发散。

证明　(i)　根据假定，有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}\leqslant q,\quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\leqslant q,\quad \cdots,\quad \frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant q$$

把这些不等式乘起来得

$$\frac{a_n}{a_N}\leqslant q^{n-N},$$

即

$$a_n \leqslant \frac{a_N}{q^N} q^n.$$

由于$\frac{a_N}{q^N}$是与 n 无关的常数，故由比较判别法知级数收敛。

(ii) 由假定，当 $n \geqslant N$ 时，$a_{n+1} \geqslant a_n$，即 a_n 单调不减，故$a_n \not\to 0$，所以级数发散。 □

和 Cauchy 判别法一样，它的极限形式往往用起来更方便些。

定理 2′ (D′Alembert 判别法的极限形式) 设 $a_n > 0$，

(i) 如果 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$，那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$；

(ii) 如果 $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q' > 1$，那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

证明 (i) 的证明和定理 1′ 的 (i) 一样。现证 (ii)。从假设知，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q' - \varepsilon.$$

今取 ε 充分小，使得 $q' - \varepsilon > 1$，因而级数发散。 □

例 3 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n! x^n$ $(x \geqslant 0)$ 的敛散性。

解 因为

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)x = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ +\infty, & x \neq 0, \end{cases}$$

所以级数只有当 $x = 0$ 时才收敛。 □

例 4 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ $(x \geqslant 0)$ 的敛散性。

解 因为

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{x}{e},$$

所以级数当 $x>e$ 时发散，$x<e$ 时收敛． □

例5 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ $(x\geqslant 0)$ 的敛散性．

解 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{1+x^{n+1}}=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 0, & x=0,\\ \frac{1}{2}, & x=1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$$

所以级数对任意 $x\geqslant 0$ 都收敛． □

和 Cauchy 判别法的情况一样，当 $q=1$ 或 $q'=1$ 时，不能对级数的敛散作出判断．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 就是这样的例子．

Cauchy 判别法和 D'Alembert 判别法哪个强些？为了回答这个问题，先看

定理3 设 (a_n) 是任意的正数列，那么

$$\varliminf_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\varliminf_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

证明 我们只证明右半不等式，另一半的证法是一样的．设 $\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，如果 $q=+\infty$，不等式当然成立，故不妨设 $q<+\infty$．于是对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n\geqslant N$ 时

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<q+\varepsilon.$$

特别有

$$\frac{a_{N+1}}{a_N}<q+\varepsilon,\quad \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q+\varepsilon,\ \cdots,\ \frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}<q+\varepsilon.$$

把这些不等式乘起来得

$$a_{N+k}<(q+\varepsilon)^k a_N$$

或

$$a_n<a_N(q+\varepsilon)^{-N}(q+\varepsilon)^n \quad (n\geqslant N).$$

于是

$$\sqrt[n]{a_n}<\sqrt[n]{a_N(q+\varepsilon)^{-N}}(q+\varepsilon),$$

由此即得

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant q+\varepsilon.$$

再命 $\varepsilon\to 0$, 即得所要证的不等式. □

从这个定理可以看出, 凡是用 D'Alembert 判别法能判别的, 用 Cauchy 判别法也一定能判别. 但反之不然, 以例 2 的级数为例, 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1,$$

故用 Cauchy 判别法知其收敛. 但因

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0,$$

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n=+\infty,$$

用 D'Alembert 判别法不能判别它是收敛或发散. 由此可见, Cauchy 判别法比 D'Alembert 判别法适用的面要宽些. 但在有些场合下, 使用 D'Alembert 判别法要方便些.

但总的来说, 这两个判别法的适用面都不算宽, 原因是它们只能判别一些比某个几何级数收敛得还快的级数. 所谓级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 比 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛得快, 是指

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$$

成立．例如，当$0<q<1,\alpha>1,\beta>1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}$ 比$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$收敛得快，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$则比$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$收敛得快。

可以证明（证明留给读者作练习），如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$满足条件$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$或$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q<1$，则必存在$r$，$q<r<1$，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{r^n}=0.$$

这就是说$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$比几何级数$\sum_{n=1}^{\infty}r^n$收敛得快．因此，如果某个级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$比几何级数收敛得慢，这两个判别法就无能为力了，必须寻找更精细的判别法．下面介绍的 Raabe 判别法是用$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$和收敛得较慢的级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}(\alpha>1)$作比较，从而能对更多的级数作出判断．

定理 4（Raabe判别法） 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是一正项级数．

(i) 如果存在$r>1$，使得对所有充分大的n，都有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geqslant r, \tag{1}$$

那么级数收敛；

(ii) 如果对所有充分大的n，都有

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leqslant 1, \qquad (2)$$

则级数发散.

证明 (i) 取实数 σ, 使得 $r>\sigma>1$, 容易知道,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}-1}{\frac{1}{n}}=\sigma<r.$$

故对充分大的 n, 有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}<1+\frac{r}{n}.$$

由(1)得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\geqslant 1+\frac{r}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sigma}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sigma},$$

或者

$$n^{\sigma}a_n\geqslant(n+1)^{\sigma}a_{n+1}.$$

这说明当 n 充分大时, 数列 $n^{\sigma}a_n$ 是单调减的, 因而是有界数列, 即存在常数M, 使得

$$n^{\sigma}a_n<M \quad (n=1, 2, \cdots),$$

即

$$a_n<\frac{M}{n^{\sigma}} \quad (n=1, 2, \cdots).$$

由比较判别法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(ii) 由(2)得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leqslant 1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n},$$

即 $na_n\leqslant(n+1)a_{n+1}$. 这说明当 n 充分大时, na_n 是一单调增数列. 今取 n_0 充分大, 则当 $n>n_0$ 时, 便有

$$na_n \geqslant n_0 a_{n_0} = C,$$

即$a_n \geqslant \frac{C}{n}$ $(n>n_0)$, 由此即知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散. □

和前面两个判别法一样, 实际应用时, 往往用它的极限形式.

定理4'(Raabe 判别法的极限形式) 设 $a_n>0$,

(i) 若 $\varliminf_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l>1$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty$;

(ii) 若 $\varlimsup_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=l'<1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=+\infty$.

证明留给读者作练习.

例6 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(e+1)(e+2)\cdots(e+n)}$的收敛性.

解 容易知道

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{e+n+1}{n+1},$$

故 $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$, D'Alembert 判别法不能判断它的敛散性. 现用 Raabe 判别法:

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{ne}{n+1}=e>1$$

故级数收敛. 一般来说, 只要 $x>1$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(x+1)\cdots(x+n)}$$

都收敛. □

例7 研究超几何级数

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}x^n$$

的收敛性，这里 α, β, γ, x 都是正数.

解 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}x \to x \quad (n\to+\infty).$

由 D'Alembert 判别法立刻知道 $x<1$ 时级数收敛；$x>1$ 时级数发散. 当 $x=1$ 时，D'Alembert 判别法不能判断. 用 Raabe 判别法：

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{n^2(1+\gamma-\beta-\alpha)+(\gamma-\alpha\beta)n}{(\alpha+n)(\beta+n)}\to 1+\gamma-\beta-\alpha$$

$$(n\to+\infty).$$

故当 $\gamma>\beta+\alpha$ 时，级数 $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ 收敛；当 $\gamma<\alpha+\beta$ 时，$F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ 发散. 当 $\gamma=\alpha+\beta$ 时，Raabe 判别法也无法判断，这时必须用更精细的判别法来判断. □

为了得到更精细的判别法，我们把 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和收敛得更慢的级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ $(\alpha>1)$ 作比较.

定理 5(Gauss 判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足条件

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \quad (n\to+\infty), \tag{3}$$

则当 $\beta>1$ 时级数收敛；$\beta<1$ 时级数发散.

证明 (i) 设 $\beta>1$，取 α 适合 $\beta>\alpha>1$，我们证明，当 $n\geqslant N$ 时，有不等式

$$a_n\leqslant\frac{M}{n(\ln n)^{\alpha}}.$$

为此目的，我们注意

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=1+\frac{1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),$$

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

所以

$$\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}=1+\frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

根据条件(3),就有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{n+1}{n}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{\alpha}=\frac{\beta-\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\quad(n\to+\infty). \tag{4}$$

因为 $\beta-\alpha>0$, 故当 $n\geqslant N$ 时, 上式取正值, 即

$$n(\ln n)^{\alpha}a_n>(n+1)(\ln(n+1))^{\alpha}a_{n+1}\qquad(n\geqslant N).$$

这说明当 n 充分大时, 数列 $n(\ln n)^{\alpha}a_n$ 是单调减的, 因而有界: $n(\ln n)^{\alpha}a_n<M$, 即

$$a_n<\frac{M}{n(\ln n)^{\alpha}}.$$

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(ii) 设 $\beta<1$. 在(4)中取 $\alpha=1$ 就有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}-\frac{n+1}{n}\,\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\frac{\beta-1}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

故当 n 充分大时有

$$(n\ln n)a_n<(n+1)\ln(n+1)a_{n+1},$$

即 $(n\ln n)a_n$ 是单调增的. 于是当 $n\geqslant N$ 时有

$$(n\ln n)a_n\geqslant(N\ln N)a_N=K,$$

即 $a_n\geqslant\frac{K}{n\ln n}$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

例 8 现在来考虑例 7 中 $\gamma=\alpha+\beta$ 的情形. 容易证明, 这时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

这相当于 Gauss 判别法中 $\beta=0$ 的情形, 因而级数发散. □

在 Gauss 判别法中, 如果 $\beta=1$, 则级数的敛散性还是不能判断, 因此必须再找更精细的判别法. 为此我们要把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和比 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛得更慢的级数作比较. 人们自然想到, 如果把级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和某个收敛得“最慢”的级数作比较, 这样得到的判别法当然是最有效的了. 但事实上, 不难证明(见习题 8)这种收敛得“最慢”的级数是不存在的. 因而, 利用和一个已知的级数作比较来建立能判断一切级数敛散性的“万能”判别法是不存在的. 不过上面介绍的这些判别法对于一般的级数已经足够用了.

习 题

1. 回答下列问题:

(1) Cauchy 判别法和 D'Alembert 判别法哪个适用的范围广些?

(2) 完成定理 3 左半不等式的证明.

(3) 在下面三个判别法:

(i) Gauss 判别法, (ii) Raabe 判别法, (iii) Cauchy 判别法中, (i)比(ii)强, (ii)比(iii)强, 为什么?

(4) 能否找到一个能对一切收敛的正项级数作出判断的判别法? 为什么?

2. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$. (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^n}[\sqrt{3}+(-1)^n]^n$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

(6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}(x>0)$.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-4}{3n+1}\right)^n$.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sqrt{\ln\frac{n+1}{n}}\right)$.

(9) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-\frac{b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{2}\right)$, $(a>0, b>0, c>0)$.

3. 利用 Raabe 判别法, 讨论下列级数的收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(a+\sqrt{1})(a+\sqrt{2})\cdots(a+\sqrt{n})}$, $(a>0)$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$, $(p>0, q>0)$.

4. 利用 Raabe 判别法证明, 当 $b-1>a>0$ 时, 级数

$$1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}$$

收敛, 其和为$\frac{b-1}{b-a-1}$.

5. 设 a_n 是单调减的正数列, 证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ 同敛散.

6. 利用上题结果证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$当 $\alpha>0$ 时收敛, $\alpha\leqslant 0$ 时发散.

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散.

7. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是一正项级数. 如果

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q<1 \quad 或 \quad \overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{a_n}=q<1,$$

则必存在$r\in(q,1)$, 使得$a_n=o(r^n)$ $(n\to+\infty)$.

8. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是一收敛的正项级数, 试作一收敛的正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=0.$$

§1.5 一般级数

所谓一般级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 是指$a_n$可正可负. 例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\sin nx$$

都属于这种情形.

因为级数的敛散性等价于它的部分和数列的敛散性, 利用关于数列的 Cauchy 收敛原理, 立刻得到

定理 1(Cauchy 收敛原理) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的充分必要条件, 是对任意$\varepsilon>0$, 存在自然数$N$, 当$n>N$时

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

对一切自然数p成立.

这个定理告诉我们, 在收敛级数的充分远的地方任意截取一段(不论这一段包括多少项), 它的绝对值可以小于任意事先指定的正数; 反之亦然.

例 1 设a_n是单调减的正数列, 如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛, 则必有$a_n=$

$o\left(\frac{1}{n}\right)$.

证明 根据 Cauchy 收敛原理，对任意 $\varepsilon>0$，存在N，当 $n>N$ 时，

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon/2$$

对任意自然数 p 成立。今取 $p=n$，且因 a_n 是单调减的正数列，故当 $n>N$ 时有

$$2na_{2n}\leqslant 2(a_{n+1}+\cdots+a_{2n})<\varepsilon.$$

又因

$$(2n+1)a_{2n+1}\leqslant 2na_{2n}+a_{2n+1}\to 0\quad(n\to+\infty),$$

所以有 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n=0$. □

收敛原理是一个普遍的原则，它适用于一切级数，而不考虑某些级数的特殊规律．正因为如此，用它去判别某些具体级数的敛散性并不方便．因此，我们必须针对某些级数的特殊规律给出相应的判别方法．前面关于正项级数的许多判别法就是按照"正项"这个条件给出的．

现在讨论一般级数中较为特殊的一种——交错级数，它的项正负交错地出现．例如，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

便是一个交错级数．我们把一般交错级数记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots,$$

其中 $a_n>0$ $(n=1, 2, \cdots)$．对于这种级数，有一个很简单的判别法。

定理2(Leibnitz 判别法) 如果 a_n 单调减趋于 0，那么交错

级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛.

证明 用S_n记这交错级数的部分和. 由于a_n单调减, $a_{2n-1}-a_{2n}\geqslant 0$, 所以

$$S_{2n}=S_{2n-2}+(a_{2n-1}-a_{2n})\geqslant S_{2n-2},$$

即S_{2n}是一单调增的数列; 又因为

$$S_{2n}=a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}$$
$$\leqslant a_1,$$

即S_{2n}有上界, 故S_{2n}是一收敛数列, 记其极限为S. 于是

$$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}\to S\quad(n\to+\infty),$$

这里我们用到了$a_n\to 0\quad(n\to+\infty)$的条件. 既然$S_n$的偶数项子列$S_{2n}$和奇数项子列$S_{2n+1}$有相同的极限$S$, 所以$S_n$也以$S$为极限, 即$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$收敛. □

应用 Leibnitz 判别法, 容易知道下列交错级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\qquad\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$$

都是收敛的.

设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=S$. 若用$S_n$代替$S$, 则其误差为

$$|S_n-S|\leqslant a_{n+1},$$

即用第n个部分和S_n代替S时的误差不超过第$n+1$项的绝对值. 事实上, 由于S_{2n}单调增趋于S, 而

$$S_{2n+1}=S_{2n-1}-(a_{2n}-a_{2n+1})\leqslant S_{2n-1},$$

即S_{2n+1}单调减趋于S, 所以不论n是奇数还是偶数, 都有

$$|S_n-S|\leqslant|S_n-S_{n+1}|=a_{n+1}.$$

这个结论在今后近似计算作误差估计时很有用.

交错级数毕竟是很特殊的一类级数，下面我们将给出两个较为重要的一般变号级数的判别定理. 为此，先证明两个引理:

引理 1(分部求和法) 设 $S_k=a_1+\cdots+a_k \quad (k=1,2,\cdots)$, 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=\sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k-b_{k+1})+S_n b_n.$$

证明 因为 $a_k=S_k-S_{k-1}$, 所以

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=S_1 b_1+(S_2-S_1)b_2+\cdots+(S_n-S_{n-1})b_n$$

$$=S_1(b_1-b_2)+S_2(b_2-b_3)+\cdots+S_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+S_n b_n$$

这就是要证明的. □

从分部求和公式可以推出一个重要的引理.

引理 2(Abel 引理) 设

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant 0,$$

$$m \leqslant S_k=\sum_{l=1}^{k} a_l \leqslant M, \ (k=1,2,\cdots,n),$$

则有

$$b_1 m \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant b_1 M$$

证明 由分部求和公式得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k=\sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k-b_{k+1})+S_n b_n$$

$$\leqslant M\left[\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})+b_n\right]=M b_1,$$

同理可证$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geqslant m b_1$. □

利用 Abel 引理便可证明

定理 3(Dirichlet 判别法) 如果级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 满足下面两个条件:

(i) b_k 单调减趋于 0,

(ii) $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 有界, 即 $|S_k| \leqslant M$ $(k=1, 2, \cdots)$,

那么该级数收敛.

证明 由条件(ii)得

$$-M - S_n \leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} \leqslant M - S_n \quad (p=1, 2, \cdots).$$

故由 Abel 引理得

$$-b_{n+1}(M + S_n) \leqslant a_{n+1} b_{n+1} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p} \leqslant b_{n+1}(M - S_n)$$

或者

$$|a_{n+1} b_{n+1} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}| \leqslant 2M b_{n+1}.$$

由于$b_n \to 0$, 故当 $n > N$ 时, 可使 $b_{n+1} < \frac{\varepsilon}{2M}$. 于是当 $n > N$ 时,

$$|a_{n+1} b_{n+1} + \cdots + a_{n+p} b_{n+p}| < \varepsilon$$

对任何自然数 p 成立, 所以$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛. □

如果在上面的级数中取 $a_k = (-1)^{k-1}$, 则显然有

$$|S_k| = |a_1 + \cdots + a_k| \leqslant 1,$$

故当 b_k 单调下降趋于 0 时, 级数$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} b_k$ 收敛, 这就是前面已经得到过的 Leibnitz 判别法. 可见 Leibnitz 判别法只是 Dirichlet 判别法在 $a_k = (-1)^{k-1}$ 的特殊情形.

定理 4 (Abel 判别法) 如果级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 满足下面两个条

件：

(i) b_k 单调有界，(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，那么级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛．

证明 因为 b_k 单调有界，故有极限，设其极限为 b．不妨假定 b_k 单调减趋于 b．命 $b'_k = b_k - b$，则 b'_k 单调减趋于 0．又因为 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 的部分和有界，根据 Dirichlet 判别法，级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b'_k$ 收敛．于是

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b'_k + b \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ 收敛． □

上面两个判别法的条件互有强弱：Dirichlet 判别法中 b_k 单调减趋于 0 的条件比 Abel 判别法中 b_k 单调有界的条件强；而 S_n 有界的条件则弱于 Abel 判别法中 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的条件．因此，在使用中用哪个判别法较好，要针对具体问题作具体分析．

例 2 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 的收敛性．

解 这个级数既非正项级数，又非交错级数．若取 $b_n = \frac{1}{n}$，则 b_n 单调减趋于 0．命 $a_n = \cos nx$，则

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{N} \cos nx \right|$$

$$= \left| \frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

因此，只要 x 不是 2π 的倍数，$\sum_{n=1}^{N} a_n$ 有界．根据 Dirichlet 判别法，原级数在 $x \neq 2k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时收敛．事实上，当 $x = 2k\pi$ 时，上面的级数就变成调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，因而是发散的． □

例 3　研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的收敛性．

解．由上例知道，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{n}$ 是收敛的，而数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调增趋于 e，因而有界．根据 Abel 判别法，该级数收敛． □

例 4　研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 的收敛性．

解　因为 $\sin^2 n = \frac{1}{2}(1-\cos 2n)$，而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos 2n}{n}$$

由 Dirichlet 判别法易知是收敛的，因而原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos 2n}{n}\right)$$

收敛． □

习　题

1．回答下列问题

(1) 若对 $p=1, 2, 3\cdots$，均有

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+\cdots+a_{n+p})=0,$$

能否断言 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛？

(2) 设$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$是一交错级数，如果$a_n\to 0$，但$a_n$不是单调数列，能否断言这交错级数收敛(见习题6)?

(3) 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都是收敛级数，问$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$是否收敛？若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都是收敛的正项级数，情况又如何?

(4) 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是一收敛级数，如果

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=1,$$

能否断言$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$也是收敛级数？请研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right\}.$$

2. 利用 Cauchy 收敛原理，讨论下列级数的收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n!)}{n!(n+1)}$.　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos n+b\sin n}{n(n+\sin(n!))}$.

3. 试用 Cauchy 收敛原理，证明交错级数的 Leibnitz 判别法.

4. 设$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$ $(n=1,2,\cdots)$，如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都是收敛级数，证明$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$也收敛.

5. 设(a_n)是一个正的单调增的数列，证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$$

收敛的充要条件是(a_n)有界.

6. 证明级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\left[\frac{n+1}{2}\right]}+(-1)^n}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$$

发散.

7. 讨论下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$.　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$.

8. 讨论下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$.　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin nx}{n}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

9. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

10. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\alpha}$ 收敛, 那么对任意 $\beta>\alpha$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\beta}$ 也收敛.

11. 如果

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lambda>0,$$

那么交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

12. 试作一收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 使得 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散.

13. 设 b_n 单调减趋于 0, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n=0.$$

提示: 利用 Cauchy 收敛原理和 Abel 引理.

14. 如果$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\sigma}$ $(\sigma>0)$收敛，试证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^\sigma}=0.$$

15. 设(b_n)是正的单调增趋于$+\infty$的数列，如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，试证

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n=o(b_n).$$

§1.6 绝对收敛和条件收敛

前面我们介绍了一般变号级数的两个重要判别法，但对于某些变号级数来说，可以用更简单的方法判定它收敛．例如级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt{n}]}\frac{1}{n^2}$的符号变化规律并不容易掌握，但若干脆让每项都取绝对值，便得一收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$．问题是从$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$的收敛性能否推出$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛？结论是肯定的．

定理 1 若$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛．

证明 因为$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，根据收敛原理，对任意$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，

$$|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|<\varepsilon$$

对任意自然数p成立．于是当$n>N$时，不等式

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|\leqslant|a_{n+1}|+\cdots+|a_{n+p}|<\varepsilon$$

对任意自然数p成立，因而$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛． □

由这个定理易知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$$

都是收敛的。

可是必须注意，定理 1 的逆定理不成立，即从 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，不能断言 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 就是这样的例子．

由此可见，所有收敛的变号级数可以分成两类：一类是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 也收敛；另一类是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散．我们把前一类级数叫做**绝对收敛级数**；后一类叫做**条件收敛级数**．

例如上面的三个级数都是绝对收敛级数，而 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$ 便是条件收敛级数．

例 1　证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin^2 n}{n}$ 条件收敛．

证明　该级数的收敛性已在 § 1.5 的例 4 中证明过．现在证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n}\frac{\sin^2 n}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$$

发散．如果它收敛，则因 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}$ 收敛，因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

也收敛，这是不可能的，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$发散． □

绝对收敛级数和条件收敛级数有十分重要的差别．

大家知道，有限个数相加时，被加项可以任意交换次序而不影响其和．无限个数相加时，级数的项是否可以任意交换？

显然，交换级数中有限多项的次序，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和．但若交换级数中无穷多项的次序，情况就不同了．例如记级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$的和为$S$，即

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\cdots=S. \tag{1}$$

两边乘以$\frac{1}{2}$得

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\cdots=\frac{1}{2}S,$$

把上面的级数改写成

$$0-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{4}+0-\frac{1}{6}+0+\frac{1}{8}-\cdots=\frac{1}{2}S. \tag{2}$$

(1)和(2)逐项相加，即得

$$-1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{4}-\cdots=\frac{3}{2}S.$$

这个级数是由(1)交换了无穷多项的次序后得到的，它的和变成了$\frac{3}{2}S$．这个例子说明，交换级数中无穷多项的次序，有可能改变级数的和．下面将要看到，之所以会发生这种情况，原因在于$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$是一个条件收敛级数，而绝对收敛级数则可以任意改变其项的次序而不影响级数的和．下面就来分析产生这种差别的原因．

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是一变号级数，我们用下面的办法将其正项和负项分开。命

$$a_n^+=\begin{cases}a_n, & 若\ a_n\geqslant 0,\\ 0, & 若\ a_n<0,\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots);$$

$$a_n^-=\begin{cases}-a_n, & 若\ a_n\leqslant 0,\\ 0, & 若\ a_n>0\end{cases}\quad (n=1,2,\cdots).$$

显然，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 是两个正项级数，前者是由原级数中的正项和零组成的级数，后者是由负项的绝对值和零组成的级数。以条件收敛的交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 来说，它的正项组成发散的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}=+\infty;$$

它的负项的绝对值也组成发散的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}=+\infty.$$

此事并非偶然，这正是一般条件收敛级数的特征。绝对收敛级数则不然，它的正项和负项分别组成两个收敛级数。

定理 2　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充分必要条件是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛；当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \tag{3}$$

证明　容易知道

$$|a_n|=a_n^++a_n^-\quad (n=1,2,\cdots),$$

因此

$$\sum_{n=1}^{N}|a_n|=\sum_{n=1}^{N}a_n^{+}+\sum_{n=1}^{N}a_n^{-}\quad (N=1,2,\cdots).$$

如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则从上式知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{+}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-}$必须都收敛；反之，若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{+}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-}$都收敛，则显然$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛．这就证明了定理的前半部分．再注意到

$$a_n=a_n^{+}-a_n^{-}\quad (n=1,2,\cdots),$$

由于$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{+}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-}$都收敛，由上式立得(3)． □

作为定理 2 的推论，我们有

定理 3 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则必有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{+}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-}=+\infty.$$

证明 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，则由定理 2 知，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{+}$和$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-}$不能都收敛．如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{+}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-}$发散．于是从等式

$$\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{N}a_n^{+}-\sum_{n=1}^{N}a_n^{-}$$

立即推知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，这与假设不符．所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{+}$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-}$只能都发散． □

正是由于这一原因，在交换级数项的次序问题上，条件收敛级

数和绝对收敛级数产生了深刻的差别.

定理 4 交换绝对收敛级数中无穷多项的次序所得的新级数仍然绝对收敛,和也不变.

证明 我们把证明分为两步:

(一) 假定$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是一正项级数, 交换其中无穷多项的次序所得的新级数为$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$. 易知新级数的任何一个部分和$\sum_{n=1}^{N}b_n$都是从$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$中挑选出某有限项构成的和,因而

$$\sum_{n=1}^{N}b_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

从而级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛,且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n; \tag{4}$$

另一方面,我们也可把$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$看成是由$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$经交换项的次序后得到的级数,因而有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}b_n. \tag{5}$$

综合(4),(5)即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

这就证明了命题对正项级数是成立的.

(二) 假定$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是一变号的绝对收敛级数. 由定理 2, 它可

表示为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-. \tag{6}$$

设改变$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$中无穷多项次序所得的新级数为$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，那么显然$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$是分别由$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$改变项的次序得来的．由于$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$和$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$都是收敛的正项级数，故由(一)所证，得知

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-.$$

既然$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^+$，$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^-$都收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$绝对收敛，而且

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} b_n^-. \tag{7}$$

注意(6)，(7)两式，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \qquad \square$$

然而，条件收敛级数与绝对收敛级数有着截然不同的结果，改变它的无穷多项次序，不仅和要改变，而且总可适当改变其次序，使其收敛于任一事先指定的数，也可使其发散．这一深刻结果，首先是由 Riemann 证明的．

定理 5 (Riemann)　若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则适当交换各项的次序，可使其收敛于任一事先指定的数 S，也可使其发散．

证明　分两部分来证明：

（一）不妨假定 $S>0$. 因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛，据定理 3 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=+\infty.$$

为了使级数的和为 S，我们这样来安排级数中项的次序：按照级数原来的次序，把它的正项取出来，只要它们的和还不大于 S，就一直取下去，直到这些项的和刚刚大于 S 为止；接着就取级数的负项（按照它们原来的次序），我们又可取得足够多负项，使整个和刚好小于 S 为止；然后再按原来的次序把剩下的正项依次取出来，直到整个的和刚好大于 S 为止；这个过程可以无休止地进行下去. 把上面这个过程用符号表示出来，就是先按次序选取 n_1 个正项，使得

$$a_1^++a_2^++\cdots+a_{n_1-1}^+\leqslant S,\quad a_1^++a_2^++\cdots+a_{n_1-1}^++a_{n_1}^+>S,$$

这时有

$$0<(a_1^++\cdots+a_{n_1-1}^++a_{n_1}^+)-S\leqslant a_{n_1}^+;\tag{8}$$

再按次序取出 n_1' 个负项，使得

$$a_1^++\cdots+a_{n_1}^+-a_1^--\cdots-a_{n_1'-1}^-\geqslant S,$$

$$a_1^++\cdots+a_{n_1}^+-a_1^--\cdots-a_{n_1'-1}^--a_{n_1'}^-<S,$$

这时有

$$0<S-\left(\sum_{n=1}^{n_1}a_n^+-\sum_{n=1}^{n_1'}a_n^-\right)\leqslant a_{n_1'}^-.\tag{9}$$

再取 n_2 个正项使得

$$\sum_{n=1}^{n_1}a_n^+-\sum_{n=1}^{n_1'}a_n^-+\sum_{n=n_1+1}^{n_2-1}a_n^+\leqslant S,\quad \sum_{n=1}^{n_1}a_n^+-\sum_{n=1}^{n_1'}a_n^-+\sum_{n=n_1+1}^{n_2}a_n^+>S,$$

这时有

$$0<\sum_{n=1}^{n_1}a_n^+-\sum_{n=1}^{n_1'}a_n^-+\sum_{n=n_1+1}^{n_2}a_n^+-S\leqslant a_{n_2}^+. \qquad (10)$$

把这过程无限地继续下去，可得一无穷级数，它显然是由原级数交换无穷多项的次序得到的新级数。我们证明，它的和就是 S. 事实上，由(8)，(9)，(10)三式看到，不论取正项或取负项，总有不等式

$$0<\left(\sum_{n=1}^{n_1}a_n^+-\sum_{n=1}^{n_1'}a_n^-+\cdots+\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k}a_n^+\right)-S\leqslant a_{n_k}^+,$$

$$0<S-\left(\sum_{n=1}^{n_1}a_n^+-\sum_{n=1}^{n_1'}a_n^-+\cdots-\sum_{n=n_{k-1}'+1}^{n_k'}a_n^-\right)\leqslant a_{n_k'}^-.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$a_n\to0$，故当 $k\to+\infty$ 时有

$$a_{n_k}^+\to0,\quad a_{n_k'}^-\to0.$$

这样，我们就证明了级数

$$(a_1^++\cdots+a_{n_1}^+)-(a_1^-+\cdots+a_{n_1'}^-)+(a_{n_1+1}^++\cdots+a_{n_2}^+)$$
$$-(a_{n_1'+1}^-+\cdots+a_{n_2'}^-)+\cdots$$

的和是 S. 由于括号中的项都有相同的符号，由 §1.2 定理 4 知，去掉括号后所得级数的和仍为 S.

（二）考虑 $S=+\infty$ 的情形. 为了使级数发散到 $+\infty$，我们这样来安排级数的项：先按级数原来的次序取出若干正项，使其和大于 1；在这些项的后面放上级数的第一个负项；然后再在余下的正项中取若干项，使整个和大于 2，又在这些项之后放上级数的第二个负项；再在余下的正项中取出若干项，使整个和大于 3，接着

放上第三个负项；无限继续这个过程，得一新级数，它是由原级数交换无限多项的次序得到的．由于 n 充分大时，a_n^- 可以任意小，故当 $n>N$ 时，负项的出现并不影响级数部分和的增大，所以级数发散到 $+\infty$．同样可以适当交换项的次序使其发散到 $-\infty$． □

简言之，条件收敛级数之所以收敛，是由于正负项相互抵消造成的，因此与各项的先后次序有关；而绝对收敛级数则是由于其项的绝对值减小的速度而使其收敛的，因而与各项的次序无关．

习　题

1．回答下列问题：

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充要条件是什么？

(2) 定理 3 的逆定理是否成立？

(3) 在级数交换次序的问题上，条件收敛级数和绝对收敛级数有什么重要的差别？其实质性的原因是什么？

2．下列级数，哪些是绝对收敛的，哪些是条件收敛的？

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^a}\ (a>1)$． (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cos nx$．

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$． (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\frac{n^{10}}{a^n}\ (a>1)$．

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$． (6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$．

3．讨论下列级数的绝对收敛性和条件收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-\left(p+\frac{1}{n}\right)}$． (2) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$．

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\right)^p$．

(4) $\frac{1}{1^p}-\frac{1}{2^q}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^q}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^q}+\cdots$.

4. 如果对任意一个趋于 0 的数列 (x_n)，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 都收敛，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定绝对收敛，试证之。如果把条件中的"任意一个趋于 0 的数列"改为"任意一个单调趋于 0 的数列"，结论是否还成立?

5. 若把级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

的项重新这样安排：先依次取 p 个正项，接着依次取 q 个负项，再接着依次取 p 个正项，如此继续下去。试证所得新级数的和为

$$\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}.$$

提示：利用公式 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n-C+o(1)$.

6. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，$b_n \to 0$ $(n\to+\infty)$，证明

$$\lim_{n\to+\infty}(a_1 b_n+a_2 b_{n-1}+\cdots+a_n b_1)=0.$$

§1.7 级数的乘法

设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n=B \tag{1}$$

是两个收敛级数，我们讨论这两级数如何相乘。大家知道，有限和

$$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\ B_m=b_1+b_2+\cdots+b_m$$

相乘的结果是把所有可能的乘积 $a_i b_j$ $(i=1, 2, \cdots, n; j=1, 2, \cdots, m)$ 加起来。仿照这个做法，我们把(1)的所有可能乘积写出来:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_1b_1, & a_2b_1, & \cdots, & a_nb_1, & \cdots \\
a_1b_2, & a_2b_2, & \cdots, & a_nb_2, & \cdots \\
a_1b_3, & a_2b_3, & \cdots, & a_nb_3, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_1b_m, & a_2b_m, & \cdots, & a_nb_m, & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

这是一个无穷矩阵，这些项如何相加，通常有两种加法，一是按对角线相加：

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots;$$

一是按方块相加：

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_3+a_3b_3+a_3b_2+a_3b_1)+\cdots,$$

用得较多的是按对角线相加。

按照对角线相加的原则，两级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$相乘，得一新级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$，其中

$$c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1.$$

现在提出一个问题，在$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，且其和分别为 A，B 的条件下，$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$是否收敛？其和是否等于 AB？一般来说，答案是否定的。例如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$是一收敛级数，它自乘后得新级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$，其中

$$c_n=(-1)^{n-1}\left[1\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot 1\right],$$

显然

$$|c_n|\geqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}}=1,$$

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$发散。

这个例子说明，收敛级数的乘积未必收敛。但若两级数都绝对收敛，则乘积所得的级数也必绝对收敛。我们有

定理 1 (Cauchy)　如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都绝对收敛，且其和分别为 A，B，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}c_n\left(c_n=\sum_{k=1}^{n}a_k b_{n-k+1}\right)$也绝对收敛，且其和等于 AB。

证明　根据假设，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$，$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$都收敛，设其和分别为 A^*，B^*，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$的部分和

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}|c_n|&\leqslant|a_1b_1|\\&\quad+(|a_1b_2|+|a_2b_1|)+\cdots+(|a_1b_N|+\cdots+|a_Nb_1|)\\&\leqslant(|a_1|+\cdots+|a_N|)(|b_1|+\cdots+|b_N|)\leqslant A^*B^*,\end{aligned}$$

故$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$绝对收敛。下面证明$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=AB$。

由于级数

$$|a_1b_1|+(|a_1b_2|+|a_2b_1|)+(|a_1b_3|+|a_2b_2|+|a_3b_1|)+\cdots$$

是收敛的，根据 §1.2 定理 4，去掉括号后的级数

$$|a_1b_1|+|a_1b_2|+|a_2b_1|+|a_1b_3|+|a_2b_2|+|a_3b_1|+\cdots$$

也收敛，即级数

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + \cdots \tag{2}$$

绝对收敛. 因而(2)不但具有可结合性, 而且具有可交换性. 记级数(2)的和为 C, 则显然有 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C$. 我们证明 $C=AB$. 把级数(2)按方块相加的方式结合起来, 其和仍为 C, 即

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_3 + a_3b_3 + a_3b_2 + a_3b_1) + \cdots = C \tag{3}$$

如果记 $A_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, $B_N = \sum_{n=1}^{N} b_n$, 则(3)的部分和数列为

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ \cdots,\ A_NB_N,\ \cdots.$$

令 $N\to+\infty$, 即得 $AB=C$. ‖

定理1的条件还可减弱. 我们有

定理2 (Mertens) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 其和分别为 A, B. 如果其中至少有一个绝对收敛, 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = AB,$$

其中
$$c_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1.$$

证明 不妨假定 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 令 $C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k$, 我们要证明 $\lim_{n\to+\infty} C_n = AB$. 易知

$$\begin{aligned} C_n &= a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) \\ &\quad + \cdots + (a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1) \\ &= a_1(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &\quad + a_2(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_nb_1 \\ &= a_1B_n + a_2B_{n-1} + \cdots + a_nB_1. \end{aligned}$$

如果命 $B_n = B + \beta_n$ $(n=1,2,\cdots)$，其中 $\beta_n \to 0$ $(n\to+\infty)$，则

$$C_n = A_nB + \gamma_n,$$

这里 $\gamma_n = a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1} + \cdots + a_n\beta_1$. 这样问题就归结为证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma_n = 0$. 把 n 分解为两项的和：$n=p+q$，要求当 $n\to+\infty$ 时，p、q 也都趋于 $+\infty$. 这是不难办到的，例如当 n 为偶数时，取 $p=q=\frac{n}{2}$；当 n 为奇数时，取 $p=\frac{n-1}{2}$，$q=\frac{n+1}{2}$ 就行. 这样一来，γ_n 可以写成两部分的和：

$$\gamma_n = (a_1\beta_n + a_2\beta_{n-1}+\cdots+a_p\beta_{q+1}) + (a_{p+1}\beta_q + a_{p+2}\beta_{q-1}+\cdots+a_n\beta_1).$$

第一部分 β_n 的指标可以很大，第二部分 a_n 的指标可以很大. 我们就根据这一特点，证明当 n 充分大时，γ_n 可以任意小. 事实上，由于 $\lim\limits_{q\to+\infty}\beta_q=0$，故对任意 $\varepsilon>0$，能找到 N_1，当 $q>N_1$ 时，$|\beta_q|<\varepsilon$. 此外，存在常数 M_1，使得对任意 q，均有 $|\beta_q|\leqslant M_1$. 又因级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，故存在 N_2，当 $p>N_2$ 时，

$$|a_{p+1}|+|a_{p+2}|+\cdots+|a_{p+s}|<\varepsilon$$

对任意自然数 s 成立. 此外，存在常数 M_2，对任意自然数 p 均有

$$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_p|<M_2.$$

现在取 n 充分大，使得 $p>N_2$，$q>N_1$，于是

$$\begin{aligned}|\gamma_n|&\leqslant(|a_1|+\cdots+|a_p|)\varepsilon + (|a_{p+1}|+\cdots+|a_n|)M_1\\&\leqslant(M_1+M_2)\varepsilon.\end{aligned}$$

这就是我们要证明的. □

如果两个级数都仅仅是条件收敛，那么定理的结论就可能不对，本节开头已经举出了这样的例子.

例 1 用 D'Alembert 判别法容易验证，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 对任意实数

x都收敛，用$E(x)$记它的和．我们来计算乘积$E(x)E(y)$．乘积所得级数的通项是

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}=\frac{(x+y)^n}{n!},$$

因而有

$$E(x)E(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=E(x+y). \qquad \square$$

稍后我们将证明，级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$的和就是指数函数$e^x$．这里不过是从级数出发证明了指数函数的乘法定理．

习　题

1．回答下列问题：

(1) 通常有哪两种级数相乘的方法？

(2) 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都是收敛级数，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n,\quad c_n=a_1b_n+\cdots+a_nb_1$$

是否一定收敛？在什么条件下才能保证$\sum_{n=1}^{\infty}c_n$绝对收敛或收敛？

(3) 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都是发散级数，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n,\quad c_n=a_1b_n+\cdots+a_nb_1$$

是否一定发散？（请看习题5）

2．证明

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n,\quad |q|<1.$$

3. 证明级数

$$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},\qquad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

对所有 x 绝对收敛，而且

$$S(2x)=2S(x)C(x).$$

4. 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 对 $(-R,R)$ 中的 x 绝对收敛，证明

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

其中 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

5. 证明下面两个发散级数

$$2+2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n+\cdots;\quad -1+1+1+1+\cdots+1+\cdots$$

的积是一个绝对收敛级数.

6. 证明下面两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}}\quad(\alpha>0,\beta>0)$$

的积当 $\alpha+\beta>1$ 时收敛，当 $\alpha+\beta\leqslant1$ 时发散.

§1.8 无穷乘积

给定数列

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots,$$

我们已经学会如何把这无穷个数相加，现在讨论如何把这无穷个数相乘. 称

$$\prod_{n=1}^{\infty}p_n=p_1p_2\cdots p_n\cdots$$

为一个无穷乘积. 仿照无穷级数的做法，我们定义无穷乘积收敛发散的概念.

定义 1 设$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$是一个无穷乘积，称

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k = p_1 p_2 \cdots p_n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

为这个无穷乘积的**部分乘积**. 如果当 $n\to+\infty$时，数列 P_n 有有限的极限 P，而且 $P\neq 0$，则称这无穷乘积是**收敛**的，记为 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$；如果 P_n的极限不存在，或者虽然存在但却等于零，就说它是**发散**的.

例 1 无穷乘积$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$是收敛的，因为

$$\begin{aligned} P_{n-1} &= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\to\frac{1}{2} \quad (n\to+\infty). \end{aligned}$$ □

例 2 证明当$|x|<1$时，

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+x^{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{1-x}.$$

事实上，用 $1-x$ 乘它的部分乘积 P_n，即得

$$\begin{aligned} (1-x)P_n &= (1-x)\left[(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots\left(1+x^{2^{n-1}}\right)\right] \\ &= 1-x^{2^n}. \end{aligned}$$

由此得

$$P_n = \frac{1-x^{2^n}}{1-x},$$

让 $n\to+\infty$，即得所要证的结果. □

例 3 证明 Wallis 公式

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

证明 当 $0<x<\frac{\pi}{2}$，n 为自然数时有

$$\sin^{2n+1}x<\sin^{2n}x<\sin^{2n-1}x,$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x\,dx.$$

由此得

$$\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n+1)(2n-1)\cdots3\cdot1}<\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}\,\frac{\pi}{2}$$
$$<\frac{(2n-2)(2n-4)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1},$$

即

$$\left[\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}\right]^2\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi}{2}$$
$$<\left[\frac{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}\right]^2\frac{1}{2n}.$$

若记 P_n 为(1)的部分乘积，则上式可写为

$$P_n<\frac{\pi}{2}<P_n\frac{2n+1}{2n}.$$

因而有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P_n=\frac{\pi}{2}$，这就是要证明的． □

Wallis 公式有时也写成

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=\frac{\pi}{2}.$$

例 4 设 $p_n=\frac{1}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$，则其部分乘积

$$P_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\to0\quad(n\to+\infty).$$

所以无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots$是发散的. □

类似于无穷级数，我们容易得到无穷乘积收敛的必要条件.

定理 1 无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 1.$$

证明很简单. 设$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$，即$\lim_{n\to+\infty} P_n = P \neq 0$，于是

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1. \qquad □$$

如果$\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P = 0$，上面的结论就可能不对，例 4 便是这样一个例子. 从这里我们可以看出，为什么在收敛的定义中要去掉$P=0$的情形. 下面我们将一再看到，只有那种P_n的极限存在而且不等于零的无穷乘积，才有许多类似于无穷级数的性质.

从定理 1 知道，收敛的无穷乘积的通项$p_n \to 1$ $(n\to+\infty)$. 因而从某个n起，p_n都是正数，也就是说在整个无穷乘积中，负因子只能有有限个. 如果把这些负因子的符号都变为正的，那么整个乘积或者改变一个符号或者和原来一样. 不论哪一种情况，对无穷乘积的敛散性均无影响. 因此不妨假定所有的p_n都是正的. 在下面的讨论中，把p_n写成

$$p_n = 1 + a_n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

更为方便，其中$-1 < a_n < +\infty$. 这样$\prod_{n=1}^{\infty} p_n$收敛的必要条件就是$a_n \to 0$ $(n\to+\infty)$.

下面我们来建立无穷乘积和无穷级数之间的联系，从而把判别无穷乘积敛散的问题归结为判别无穷级数的敛散.

定理 2 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的充分必要条件是级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n) \tag{2}$$

收敛. 在收敛的情况下, 如果(2)的和是 S, 那么

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=e^S.$$

证明 因为

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+a_k),$$

所以

$$\ln P_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)=S_n,$$

这里 S_n 是(2)的部分和. 如果 $P_n\to P\neq 0$, 那么 $S_n\to\ln P$; 反之, 当 $S_n\to S$ 时, $P_n\to e^S$.

从定理 2 可得

定理 3 如果从某个 n 起都有 $a_n>0$ (或 $a_n<0$), 那么 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散.

证明 因为不论 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 何者收敛, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 因此总可假定这个条件成立. 这时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+a_n)}{a_n}=1,$$

因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散, 而由定理 2 知 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$

和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 同敛散，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散. □

当 a_n 不保持定号，我们有

定理4 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2<+\infty$，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散.

证明 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$，所以

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n-\ln(1+a_n)}{a_n^2}=\frac{1}{2}, \tag{3}$$

从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛推知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n-\ln(1+a_n)]$ 收敛，根据定理2，可知 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散. □

现讨论一下 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到零的情形. 由

$$\ln P_n=\sum_{k=1}^{n}\ln(1+a_k)$$

可以看出 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0 的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=-\infty.$$

特别，如果 $a_n<0$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，这时必有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1-a_n)=-\infty$，因而 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0.

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散，这时无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 也发散到 0. 事实上，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=+\infty$，从(3)知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n-\ln(1+a_n)]$

$=+\infty$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故必有 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=-\infty$，因而 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 发散到 0.

例 5 从 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$ 立刻知道

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=+\infty,\quad \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=0.$$ □

例 6 从 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$ 知道

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right),\ \prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

都收敛. 后者在例 1 中已算出它的值是 $\frac{1}{2}$. □

例 7 设 $\alpha>\beta>0$，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=0. \tag{4}$$

证明 考虑无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\beta+n}{\alpha+n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right) \tag{5}$$

令 $a_n=\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}$，则 $a_n<0$. 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}$ 发散，故无穷乘积(5)发散到 0. 即(4)成立. □

例 8 设 $\alpha>0$. 讨论无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}\right]$ 的收敛性.

解 记 $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n^{\alpha}}$，当 $\alpha>0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $\alpha>\frac{1}{2}$

时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$收敛，故上述无穷乘积当$\alpha>\frac{1}{2}$时收敛；当$0<\alpha\le\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$发散，该无穷乘积发散到0. □

收敛的无穷乘积能不能任意改变因子的次序？答案是否定的。很容易举出这样的例子：取一条件收敛级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，使得$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，那么$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$便是一个不能随意改变因子次序的收敛的无穷乘积。事实上，在所设的条件下，$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$也是一个条件收敛级数，设其和为$S$，则$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=e^S$。今改变级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$的次序，得一新级数$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n)$，使其和为$\tau\neq S$。于是

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)=e^{\tau}\neq\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n),$$

而$\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$正是由$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$改变因子次序所得的无穷乘积.

在什么条件下可以保证收敛的无穷乘积可以任意改变因子的次序？为此引进无穷乘积绝对收敛的概念.

定义 2 如果无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$收敛，则称无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$绝对收敛.

定理 5 绝对收敛的无穷乘积一定收敛.

证明 设$\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$收敛，由定理3知$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，从

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|\ln(1+a_n)|}{|a_n|}=1$ 知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\ln(1+a_n)|$ 收敛，所以

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 收敛，从而 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛。 □

定理 6 绝对收敛的无穷乘积可以任意改变因子的次序而不影响其收敛性和值。

证明 设 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛，任意改变其因子的次序得一新的无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$，我们证明

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)=\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n). \tag{6}$$

事实上，从定理 5 的证明知道，这时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)$ 绝对收敛，因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+b_n),$$

由此即知(6)成立。 □

习 题

1. 回答下列问题：

(1) 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛的必要条件是什么？

(2) 为什么把满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)=0$ 的无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 定义为发散的？

(3) 设 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 是两个收敛的无穷乘积，下列无穷乘积：

$$\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n),\quad \prod_{n=1}^{\infty}(p_n-q_n),\quad \prod_{n=1}^{\infty}p_nq_n,\quad \prod_{n=1}^{\infty}\frac{p_n}{q_n}$$

是否也都收敛?

(4) 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在收敛性方面的关系如何?

(5) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散, $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 是否一定发散(请看习题5)?

2. 证明下列等式:

(1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$.　　(2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left\{1-\frac{2}{n(n+1)}\right\}=\frac{1}{3}$.

(3) $\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right\}=2$.　　(4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{x}$.

(5) $\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots=\frac{\pi}{2}$.

3. 讨论下列无穷乘积的收敛性:

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.　　(2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

(3) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.　　(4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

(5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$.　　(6) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\ln(n+x)-\ln n}$.

4. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos a_n$ 也收敛.

5. 设

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}, & 若\ n=2k-1,\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k\sqrt{k}}, & 若\ n=2k.\end{cases}$$

证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散, 但无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛.

6. 试证 $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}e^{-1}=0$, 并由此证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n}}{n!}e^{-n}=0.$$

7. 如果级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x^2-1)(x^2-2^2)\cdots(x^2-n^2)$$

在 $x=x_0$ (非整数) 处收敛, 那么它对所有的 x 都收敛.

提示: 把原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x_0^2-1)\cdots(x_0^2-n^2)\cdot\frac{(x^2-1)\cdots(x^2-n^2)}{(x_0^2-1)\cdots(x_0^2-n^2)},$$

然后用 Abel 判别法.

8. 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{n}+o(b_n)\quad(n=1,2,\cdots),$$

这里 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 是一绝对收敛级数, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

第二节 函数项级数

§2.1 问题的提出

有了上一节关于数项级数的准备知识, 我们就有可能讨论如何通过无穷个函数的迭加来产生新函数, 以及研究这样产生的新函数的性质.

设 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的一列函数. 称

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots \tag{1}$$

是 $[a, b]$ 上的一个函数项级数. 在 $[a, b]$ 中任取一点 x_0, 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + \cdots + u_n(x_0) + \cdots \tag{2}$$

便是一个数项级数．如果(2)收敛，就说函数项级数(1)在点x_0收敛，反之，就说(1)在点x_0发散．如果(1)在$[a,b]$的每点都收敛，就说(1)在区间$[a,b]$上收敛．一般来说，(1)可能在$[a,b]$的某些点上收敛，在另一些点上发散．使(1)收敛的那些点的全体称为(1)的收敛点集；使(1)发散的那些点的全体称为(1)的发散点集．例如，

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

是定义在$(-\infty, +\infty)$上的函数项级数，它的收敛点集是$(-1,1)$，发散点集是$(-\infty, -1]$和$[1, +\infty)$．

设$[a,b]$是(1)的一个收敛点集，对$[a,b]$中每一点x，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$都有一个确定的和，记为$S(x)$，即

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad x \in [a,b] \tag{3}$$

是确定在$[a,b]$上的一个函数，称为(1)的和函数，它是由级数(1)所确定的．我们首先关心的是，由无穷级数(1)所确定的函数(3)是否具有有限和的那些性质？提得明确些，就是：

(i)　若函数$u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$都在$[a,b]$上连续，它们的和$S(x)$是否也在$[a,b]$上连续？

(ii)　如果$S(x)$和$u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$都是$[a,b]$上的连续函数，等式

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$$

是否还成立？或者说，积分(3)时，能否“逐项积分”？

(iii) 如果 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都在$[a,b]$上可导，$S(x)$是否也在$[a,b]$上可导？等式

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u'_n(x)$$

是否成立？或者说，对(3)求导时，是否可以“逐项求导”？

上面三条，对于有限个函数的和都是正确的，但对无穷级数的和则未必成立。

例 1 在区间$[0,1]$上考虑级数

$$x+\sum_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})=x+(x^2-x)+(x^3-x^2)+\cdots, \qquad (4)$$

它的第 n 个部分和显然是 $S_n(x)=x^n$，因而和函数

$$S(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$$

它在$x=1$处不连续. 但级数的每一项在$[0,1]$上都是连续的. 这个例子说明，每项都连续的级数，其和函数未必连续. 另外，(4)的每一项在$[0,1]$上也都是可导的，其和函数在 $x=1$ 处却不可导. 这说明每项都可导的级数，其和函数未必可导. 当然也就更谈不上“逐项求导”了. □

例 2 在$[0,1]$上考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[2n^2xe^{-n^2x^2}-2(n-1)^2xe^{-(n-1)^2x^2}],$$

它的第 n 个部分和为 $S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2}$. 显然有

$$S(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=0,$$

因而$\int_0^1 S(x)dx=0$. 但另一方面，将级数逐项积分得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1[2n^2xe^{-n^2x^2}-2(n-1)^2xe^{-(n-1)^2x^2}]dx$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}[(1-e^{-n^2})-(1-e^{-(n-1)^2})]$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-(n-1)^2}-e^{-n^2}]=1.$$

这个例子说明，在一般情况下"逐项积分"也是不允许的. □

由此看来，要使上面提出的三个命题成立，还必须补充条件. 下节介绍的"一致收敛"便是这种条件中最重要的一个.

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛的含义是什么?

(2) 构造一个函数项级数，使得在 $(0,1)$ 中的有理点上收敛，无理点上发散.

2. 求下列函数项级数的收敛点集:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{x}{3x+1}\right)^n$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x(x+n)}{n}\right)^n$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^ny^n}{x^n+y^n}\quad(x>0,y>0)$.

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+y^n}\quad(y\geqslant0)$.

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+x^n)}{n^y}\quad(x\geqslant0)$.

3. 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在有界闭区间 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$，如果 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 都是 $[a,b]$ 上的非负连续函数.

(1) 证明 $S(x)$ 必在 $[a, b]$ 上取到最小值.

(2) $S(x)$ 是否一定能在 $[a, b]$ 上取到最大值?

(3) 若把(1)中的有界闭区间 $[a, b]$ 换成开区间 (a, b) 或无穷区间, (1)中的结论是否还成立?

§2.2 一致收敛

现在我们对函数项级数的收敛概念作进一步考察. 我们讲过, 所谓级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \tag{1}$$

在区间 $[a, b]$ 上收敛, 是指对 $[a, b]$ 中的每一点 x_0, 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛. 由于 $[a, b]$ 中有无穷多个点, 因此(1)在 $[a, b]$ 中收敛. 就意味着无穷多个数项级数收敛. 一般来说, 这些数项级数收敛的快慢是"不一致"的. 有的收敛得快些, 有的慢些. 对于给定的 $x \in [a, b]$, 如果用 $S_n(x)$ 记(1)的部分和, $S(x)$ 记(1)的和, 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 存在着自然数 N_x, 当 $n > N_x$ 时, 不等式

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \tag{2}$$

成立. 这里的 N_x 不仅与 ε 有关, 也与 x 有关. 也就是说, 对于不同的 x, 相应的 N_x 是不同的. 对于收敛得快的级数来说, N_x 的值不必很大, (2)就能成立; 而对那些收敛得较慢的级数, N_x 必须很大, 才能使(2)成立. 于是产生一个问题, 对于在 $[a, b]$ 上收敛的级数(1), 能否找到一个仅依赖于 ε, 而与 x 无关的自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 不等式(2)对 $[a, b]$ 上所有的 x 都成立? 如果存在这样的 N, 我们就认为无穷个数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $(x \in [a, b])$ 收敛的快慢是"一致的", 因为从所有级数的第 $N+1$ 个部分和 $S_{N+1}(x)$

起，$S_n(x)$与$S(x)$之差都不超过ε. 从下面两个例子看到，这样的N不是对所有级数都存在的。

例 1 上节例1那个级数

$$x+\sum_{n=2}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$$

的部分和$S_n(x)=x^n$，当$x\in(0,1)$时，$S(x)=0$. 我们证明不存在上面所说的那种与x无关的N. 因为如果有那种N存在，那么对任意给定的$\varepsilon>0$，只要$n>N$，便有

$$|S_n(x)-S(x)|=x^n<\varepsilon$$

对(0, 1)中所有的x成立。事实上，这是办不到的。不妨取$\varepsilon=\frac{1}{4}$，再取定某个自然数$n_0>N$，于是不等式

$$x^{n_0}<\frac{1}{4} \tag{3}$$

对(0, 1)中所有的x都成立。今取$x=2^{-\frac{1}{n_0}}$，它是(0, 1)中的点，代入(3)，便得$\frac{1}{2}<\frac{1}{4}$的矛盾。由此可见，这个级数所对应的无穷个数项级数的收敛快慢是不一致的。 □

例 2 考虑级数

$$\frac{1}{1+x}+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n-1+x}\right),$$

它的部分和序列$S_n(x)=\frac{1}{n+x}$，对(0, 1)上的任意x，均有

$$S(x)=\lim_{n\to+\infty}S_n(x)=0.$$

由于

$$|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{n+x}<\frac{1}{n}$$

对(0, 1)中一切 x 成立. 因此对任意的 $\varepsilon>0$, 只要取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 当 $n>N$ 时,

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

对(0, 1)中所有的 x 都成立. 显然 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ 与 x 无关. □

以上两例, 同样都在(0, 1)上收敛. 然而却有似乎很微小但又是非常重要的差别: 在给定正数 ε 以后, 例 1 对于每一个 x 都有相应的 N_x, 但却找不到一个与 x 无关, 因而适用于一切 x 的 N; 例 2 则有这样的 N. 因此例 2 比例 1 多满足了一个条件——存在与 x 无关的 N. 这个条件对于上节提出的三个命题的成立具有实质性的作用. 所以有必要在原来的收敛概念的基础上建立一个更强的收敛概念.

定义 1 设有定义在区间 I(开或闭, 有限或无限)上的函数项级数(1)和函数 $S(x)$. 如果对任意给定的正数 ε, 都有相应的与 x 无关的自然数 N 存在, 当 $n>N$ 时, 不等式

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$$

对 I 中一切 x 都成立, 就说级数(1)在区间 I 上一致收敛于函数 $S(x)$.

例 2 是一致收敛的例子, 例 1 是不一致收敛的例子.

定义 1 实际上也给出了函数列一致收敛的概念, 而函数项级数一致收敛只是这级数的部分和构成的函数列一致收敛.

从几何上来看, $y=S_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 表示一系列曲线. 所谓一致收敛, 就是从某个足标 N 开始, 所有的曲线

$$y=S_n(x) \quad (n=N+1, \ N+2, \ \cdots)$$

全部落入条形区域 $S(x)-\varepsilon<y<S(x)+\varepsilon$(图 1).

从图 2 可以看出, 不论 n 多大, 曲线 $y=x^n$ 永远不会全部落入

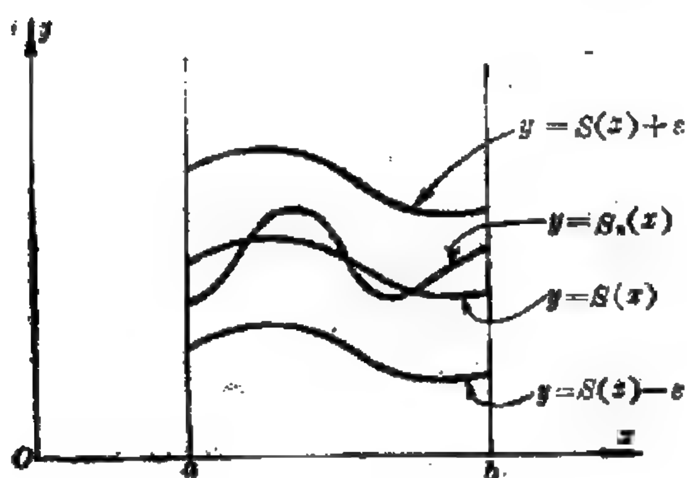


图 1

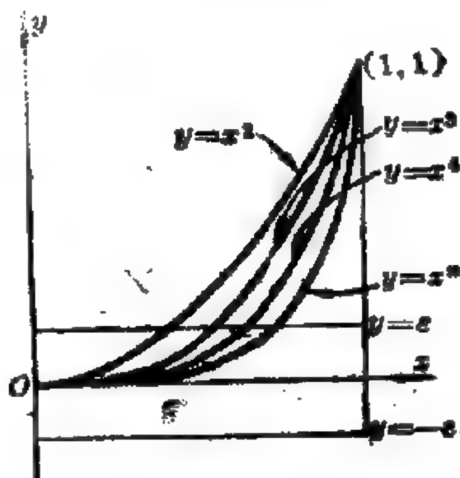


图 2

条形区域$-\varepsilon<y<\varepsilon$之中，因而例 1 的级数在区间$(0, 1)$中不是一致收敛的.

一致收敛的定义也可叙述为

定义 1′ 如果当$n\to+\infty$时，

$$\beta_n=\sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|\to 0,$$

就说级数(1)在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$.

这个定义和定义 1 是等价的. 事实上，如果级数(1)满足定义 1 的要求，那么对任意$\varepsilon>0$，存在 N，当$n>N$时，不等式$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$对 I 中所有 x 成立. 因而

$$\beta_n=\sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|\leqslant\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=0$. 反之也真.

根据定义1′，例 1 的级数在$(0, 1)$中不一致收敛是显然的，因为这时

$$\beta_n=\sup_{0<x<1}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{0<x<1}x^n=1\not\to 0.$$

例 3 上节例 2 的级数的部分和$S_n(x)$和$S(x)$分别为

$$S_n(x)=2n^2xe^{-n^2x^2},\quad S(x)=0.$$

因而

$$\beta_n=\sup_{0<x<1}|S_n(x)-S(x)|\geqslant\left|S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)\right|=2ne^{-1}\nrightarrow 0.$$

所以原级数在(0, 1)中不一致收敛. □

函数项级数也有类似于数项级数的收敛原理.

定理 1 级数(1)在区间 I 上一致收敛的充分必要条件是：对任意 $\varepsilon>0$, 存在与 x 无关的 N, 当 $n>N$ 时,

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon \tag{4}$$

对一切自然数 p 以及 I 上所有的点 x 都成立.

证明 如果级数(1)在 I 上一致收敛于 $S(x)$, 那么对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n>N$ 时, 不等式

$$|S_n(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |S_{n+p}(x)-S(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对任意自然数 p 及 I 中一切点 x 成立. 于是

$$\begin{aligned}|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|&=|S_{n+p}(x)-S_n(x)|\\&\leqslant|S_{n+p}(x)-S(x)|+|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon,\end{aligned}$$

这就证明了条件的必要性.

再证条件的充分性. 如果 (4) 成立, 根据数项级数的收敛原理, 级数(1)在 I 中收敛, 设其和为 $S(x)$. 根据(4), 当 $n>N$ 时

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon \tag{5}$$

对一切自然数 p 及 I 中所有的 x 成立. 在(5)中令 $p\to+\infty$, 即得 $|S(x)-S_n(x)|\leqslant\varepsilon$ 对 I 中一切 x 成立, 这就是说(1)在 I 上一致收敛于 $S(x)$. □

在上面的定理中, 取 $p=1$, 就得到级数一致收敛的一个必要条件:

级数(1)在 I 上一致收敛的必要条件是它的通项 $u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 0.

这个必要条件常被用来判定级数的非一致收敛性。

例 4 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在$(0, +\infty)$上不一致收敛。为了证明这一点，只须证明它的通项

$$u_n(x)=ne^{-nx}$$

在$(0, +\infty)$上不一致地趋于0. 不然的话，对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，不等式 $ne^{-nx}<\varepsilon$ 对$(0, +\infty)$中所有的 x 成立。取定 $n_0>N$，则不等式$n_0e^{-n_0 x}<\varepsilon$ 对$(0, +\infty)$中所有的 x 成立。令取$x=\frac{1}{n_0}$，代入不等式得 $n_0e^{-1}<\varepsilon$，这是不可能的。 □

例 5 设(a_n)是单调减的正数列，证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx \tag{6}$$

在任何区间上都一致收敛的充要条件是

$$\lim_{n\to+\infty} na_n=0.$$

证明 先证条件的必要性. 设(6)在任何区间上都一致收敛，于是对任意 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n, m>N$ 时，有

$$|a_n \sin nx+a_{n+1}\sin(n+1)x+\cdots+a_m \sin mx|<\varepsilon$$

对任何 x 成立. 今取$m>2N$，$n=\left[\frac{m}{2}+1\right]$，则$n>N$，再取 $x=\frac{\pi}{2m}$，于是有

$$\left|a_n \sin n\frac{\pi}{2m}+a_{n+1}\sin(n+1)\frac{\pi}{2m}+\cdots+a_m \sin m\frac{\pi}{2m}\right|<\varepsilon.$$

当 $n\leqslant k\leqslant m$ 时，$\frac{\pi}{4}\leqslant k\cdot\frac{\pi}{2m}\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以$\sin k\frac{\pi}{2m}\geqslant\sin\frac{\pi}{4}$. 于是

$$\varepsilon>a_n \sin n\frac{\pi}{2m}+a_{n+1}\sin(n+1)\frac{\pi}{2m}+\cdots+a_m \sin m\frac{\pi}{2m}$$

$$\geqslant(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_m)\sin\frac{\pi}{4}\geqslant(m-n+1)a_m \sin\frac{\pi}{4}$$

$\geqslant\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)ma_m$, 这就证明了

$$\lim_{n\to+\infty} na_n=0.$$

再证充分性. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n=0$. 命 $\mu_n=\sup\limits_{m\geqslant n}\{ma_m\}$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n=0$. 记

$$S_{n,m}=a_n\sin nx+\cdots+a_m\sin mx,$$

我们证明对任意 x, 均有

$$|S_{n,m}|\leqslant(\pi+1)\mu_n. \tag{7}$$

由于 $S_{n,m}$是周期 2π 的奇函数, 故只须证明在$[0,\pi]$上(7) 成立就行了. 把区间$[0,\pi]$分成

$$\left[0,\frac{\pi}{m}\right],\left[\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right],\left[\frac{\pi}{n},\pi\right]$$

三段, 我们证明(7)在这三段上都成立。

(一) $x\in\left[\frac{\pi}{n},\pi\right]$. 根据不等式$\sin\theta\geqslant\frac{2}{\pi}\theta\ \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, 有

$$|\sin nx+\cdots+\sin mx|=\left|\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\leqslant\frac{\pi}{x},$$

由 Abel 引理(§1.5 引理 2)即得

$$|S_{n,m}|\leqslant a_n\frac{\pi}{x}\leqslant na_n\leqslant\mu_n.$$

(二) $x\in\left[0,\frac{\pi}{m}\right]$. 从 $\sin\theta\leqslant\theta$ 可得

$$|S_{n,m}|\leqslant a_nnx+\cdots+a_mmx\leqslant m\mu_nx\leqslant\pi\mu_n.$$

(三) $x\in\left[\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right]$. 这时$n\leqslant\frac{\pi}{x}\leqslant m$. 令 $k=\left[\frac{\pi}{x}\right]$,

把 $S_{n,m}$ 分成两段:

$$S_{n,m}=a_n\sin nx+\cdots+a_k\sin kx+a_{k+1}\sin(k+1)x$$
$$+\cdots+a_m\sin mx=S_{n,k}+S_{k+1,m}.$$

对于第一个和,由于$x\leqslant\frac{\pi}{k}$,由(二)知

$$|S_{n,k}|\leqslant\pi\mu_n;$$

对于第二个和,由于$x>\frac{\pi}{k+1}$,故由(一)得

$$|S_{k+1,m}|\leqslant\mu_n.$$

于是有

$$|S_{n,m}|\leqslant|S_{n,k}|+|S_{k+1,m}|\leqslant(\pi+1)\mu_n,$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n=0$, 即知(6)在任何区间上一致收敛。 □

下面的 Weierstrass 判别法是判断级数一致收敛的最常用的方法.

定理 2 (Weierstrass 判别法) 如果存在收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,使得在区间 I 上有不等式

$$|u_n(x)|\leqslant a_n\quad(n=1,2,\cdots),\tag{8}$$

那么级数(1)在区间 I 上一致收敛.

证明 对收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 应用 Cauchy 收敛原理. 任给 $\varepsilon>0$, 存在N, 当 $n>N$时,

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}<\varepsilon$$

对任意自然数 p 成立. 由(8)知, 当 $n>N$ 时,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}|u_k(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k<\varepsilon$$

对任意自然数 p 及 I 中一切 x 成立, 因而(1)在 I 上一致收敛。 □

满足条件(8)的数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$称为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$上的优级数. 定理2是说: 在区间$I$上有收敛的优级数的级数在$I$上一致收敛.

例6 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛. 这是因为在$(-\infty, +\infty)$上有不等式

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}\qquad(n=1, 2, \cdots),$$

即该级数在$(-\infty, +\infty)$上有收敛的优级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, 故在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛. □

例7 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}$在$[0, +\infty)$上一致收敛. 这是因为当$x\geqslant 0$时有不等式

$$\frac{x}{1+n^4x^2}\leqslant\frac{1}{2n^2}\quad(n=1, 2, \cdots).\qquad □$$

例8 例4已经证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$(0, +\infty)$中不一致收敛, 但它在$[\delta, +\infty)$中一致收敛, 这里$\delta$是任意一个正数. 事实上, 由于$x\geqslant\delta>0$, 故当$n$充分大时有

$$ne^{-nx}\leqslant ne^{-n\delta}\leqslant\frac{1}{n^2}\quad(n>N),$$

故级数在$[\delta, +\infty)$中一致收敛. □

Weierstrass判别法用起来很方便, 但条件太强, 它要求$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$绝对收敛, 而且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$和$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$都一致收敛才行.

实际上存在这样的级数，它一致收敛，但却不绝对收敛；还可能有这样的情形，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$绝对且一致收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$却不一致收敛.（习题6）. 对于这种级数，Weierstrass 判别法就无效了，因此还需研究更精细一些的判别法.

类似于数项级数的 Dirichlet 和 Abel 判别法，我们有

定理 3（Dirichlet 判别法） 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$满足下面两个条件:

(i) $b_n(x)$对于每个 x 单调，且在区间 I 上一致趋于 0;

(ii) $A_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(x)$在 I 上一致有界，即存在常数M，使得对任意 n 及 $x\in I$ 均有$|A_n(x)|\leqslant M$；那么该级数在区间 I 上一致收敛.

定理 4（Abel 判别法） 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$满足下面两个条件:

(i) $b_n(x)$对每个 x 而言是单调数列，且在区间 I 上一致有界;

(ii) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$在区间 I 上一致收敛；那么该级数在 I 上一致收敛.

这两个定理的证明方法和数项级数中相应定理的证明类似，建议读者作为练习把证明补出来.

例 9 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$在$[\delta,\ 2\pi-\delta]$ $(\delta>0)$上一致收敛.

证明 命$a_n(x)=\cos nx$, $b_n(x)=\frac{1}{n}$, 则$b_n(x)$单调下降趋于0, 而且

$$|A_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right|$$

$$= \left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}.$$

由于 $x\in[\delta, 2\pi-\delta]$, 所以 $\left|\sin\frac{x}{2}\right| \geqslant \sin\frac{\delta}{2}$, 因而有

$$|A_n(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

即 $A_n(x)$ 在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 中一致有界. 故由 Dirichlet 判别法知级数在 $[\delta, 2\pi-\delta]$ 中一致收敛. □

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上收敛于 $S(x)$, 如何用 ε-N 语言表达 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上不一致收敛于 $S(x)$?

(2) 从几何上看, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$ 意味着什么?

(3) 如果对任意正数 δ, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[\delta, +\infty)$ 中一致收敛, 由此能否断言该级数在 $(0, +\infty)$ 中一致收敛?

(4) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 中收敛, 并分别在 (a, c), (c, b) 中一致收

敛，由此能否断言该级数在(a, b)中一致收敛？

(5) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, b]$上绝对并一致收敛，能否断言$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$在$[a, b]$上一致收敛(请看习题6)？

(6) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$在$[a, b]$上一致收敛，是否一定能找到收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，使得$|u_n(x)| \leqslant a_n$在$[a, b]$上成立(请看习题7)？

2. 研究下列级数在指定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$ $(0<x<+\infty)$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1-2x)\cdots(1+nx)}$, (i) $0 \leqslant x \leqslant \delta$; (ii) $\delta \leqslant x<+\infty$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5 x^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ $\left(\frac{1}{2} \leqslant|x| \leqslant 2\right)$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ $(-\infty<x<+\infty)$.

(6) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n \ln^2 n}\right)$ ($|x|<a$, a是任意正数).

(7) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

(8) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ $(0<x<+\infty)$.

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}$ $(0 \leqslant x<+\infty)$.

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n(n+x)}}$ $(0\leqslant x<+\infty)$.

3. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-nx}$在$0\leqslant x<+\infty$中一致收敛。

4. 补出定理 3, 4 的证明.

5. 设$u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$是$[a, b]$上的单调函数，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(a)$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(b)$绝对收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a, b]$上绝对并一致收敛。

6. 证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n(1-x)$$

在$[0, 1]$上绝对并一致收敛，但$\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$在$[0, 1]$上并不一致收敛。

7. 设在区间$[0, 1]$上定义

$$u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{1}{n},\\ 0, & \text{其它 } x.\end{cases}$$

证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[0, 1]$上一致收敛，但不存在收敛的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，使得对所有的$x\in[0, 1]$以及一切自然数$n$成立不等式

$$u_n(x)\leqslant a_n.$$

8. 设$S_0(x)=1$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$，命

$$S_n(x)=\sqrt{xS_{n-1}(x)}\quad (n=1, 2, \cdots).$$

证明$S_n(x)$在$[0, 1]$上一致收敛.

9. 设$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a, b]$上收敛，如果存在常数$M$，使得对任意$x\in[a, b]$及一切自然数$n$都有$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k'(x)\right|\leqslant M$，证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a, b]$上一致收敛。

提示：证明$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在充分小的区间$[\alpha,\beta](\subset[a,b])$上一致收敛.

10．利用上题结果，讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos nx,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$$

的一致收敛性.

§2.3 和函数的性质

现在回过来研究§2.1中提出的问题．我们将看到，只要加上一致收敛的条件，那里所提问题的答案都是肯定的.

定理1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I$上一致收敛于$S(x)$，且每项$u_n(x)$都在$I$上连续，那么和函数$S(x)$也在$I$上连续.

证明 我们证明$S(x)$在I的任一点x_0处连续．因为级数在I上一致收敛，故对任给的$\varepsilon>0$，可取一充分大的自然数n_0，使得不等式

$$|S(x)-S_{n_0}(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

对I上一切x都成立，其中$S_{n_0}(x)$是级数的第n_0个部分和．因为$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$都在I上连续，故$S_{n_0}(x)$也在I上连续，因此有正数δ，当$|x-x_0|<\delta$时，有$|S_{n_0}(x)-S_{n_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$．于是，当$|x-x_0|<\delta$时，便有

$$\begin{aligned}|S(x)-S(x_0)|\leqslant&|S(x)-S_{n_0}(x)|\\&+|S_{n_0}(x)-S_{n_0}(x_0)|+|S_{n_0}(x_0)-S(x_0)|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了$S(x)$在x_0处连续．　　□

例1 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，因此它的和

函数是整个数轴上的连续函数. □

例 2 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2$, 计算 $\lim_{x\to 1}f(x)$.

解 在区间 $[-2,2]$ 上考察这个函数, 由于

$$\left|\frac{x^n}{3^n}\cos n\pi x^2\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

因而原级数在 $[-2,2]$ 上一致收敛, 所以和函数 $f(x)$ 是 $[-2,2]$ 上的连续函数. 于是

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cos n\pi$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=\frac{3}{4}. \qquad □$$

例 3 证明 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数.

证明 §2.2 的例 4 已经证明这级数在 $(0,+\infty)$ 中不一致收敛, 因而不能直接用定理 1 来证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的连续性. 但可以这样做, 设 x_0 是 $(0,+\infty)$ 中任一点, 这时总能取适当的 δ, 使得 $0<\delta<x_0$. 由 §2.2 的例 8 知, 该级数在 $[\delta,+\infty)$ 中一致收敛, 因而 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 由于 x_0 是 $(0,+\infty)$ 中任一点, 故知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 中连续. □

定理 1 告诉我们, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的每一项 $u_n(x)$ 都在区间 I 上连续, 那么, 加上一致收敛的条件后就能保证它的和函数 $S(x)$ 在 I 上连续. 现在反过来问, 在每个 $u_n(x)$ 都连续的前提下, 从和函数 $S(x)$ 的连续性能否推出级数在 I 上一致收敛? 一般来说, 答案是否定的. §2.2 的例 3 就说明了这个问题. 但如果考虑的是正项级数, 而且 I 是有界的闭区间, 答案则是肯定的.

定理 2 (Dini) 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的每一项在有界闭区间$[a,b]$上连续且非负，如果它的和函数$S(x)$也在$[a,b]$上连续，那么该级数在$[a,b]$上一致收敛。

证明 用$S_n(x)$记级数的部分和，由于$u_n(x)\geqslant 0$，故对每个给定的x，$S_n(x)$是单调增的数列。记

$$r_n(x)=S(x)-S_n(x)\quad (n=1,2,\cdots),\tag{1}$$

则$r_n(x)$是非负的单调减的数列。我们要证明$r_n(x)$在$[a,b]$上一致趋于0。如果不是这样，那么存在某个$\varepsilon>0$，不论n多大，总能在$[a,b]$上找到这样的点x_n，使得

$$r_n(x_n)\geqslant\varepsilon\quad (n=1,2,\cdots).\tag{2}$$

(x_n)既然是$[a,b]$中的一个点列，那么根据Bolzano-Weierstrass定理，从它中间能挑出一个收敛的子列x_{n_k}，设$\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=x_0$，则$x_0\in[a,b]$。根据$r_m(x)$的连续性，我们有

$$\lim_{k\to+\infty}r_m(x_{n_k})=r_m(x_0)\quad (m=1,2,\cdots).$$

另一方面，对于任意给定的m，总能找到充分大的k，使$n_k>m$。于是，对于任意给定的x，就有$r_m(x)\geqslant r_{n_k}(x)$，特别有$r_m(x_{n_k})\geqslant r_{n_k}(x_{n_k})$。因而从(2)得$r_m(x_{n_k})\geqslant\varepsilon$，命$k\to+\infty$，就得

$$r_m(x_0)\geqslant\varepsilon\quad (m=1,2,\cdots).\tag{3}$$

但从(1)知道，

$$r_m(x_0)=S(x_0)-S_m(x_0)\to 0\quad (m\to\infty),$$

这和(3)矛盾。从而证明了级数在$[a,b]$上一致收敛于$S(x)$。 □

注意，如果把定理中的有界闭区间$[a,b]$换成开区间或者无穷区间，结论就可能不成立。例如级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$的每一项x^n在区间$[0,1)$中非负且连续，它的和函数$\frac{1}{1-x}$也在$[0,1)$中连续，但该级数在

[0, 1) 中并不一致收敛. 对于无穷区间的情形, 读者试自举一例以说明之.

现在讨论逐项积分和逐项微分的问题.

定理 3 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 且每项 $u_n(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 那么

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx.$$

证明 由定理 1 知 $S(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 因而是可积的. 由假设, 级数是一致收敛的, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$\left| S_n(x) - S(x) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

对 $[a, b]$ 中所有的 x 成立. 于是, 当 $n > N$ 时有

$$\left| \int_a^b S_n(x) dx - \int_a^b S(x) dx \right|$$

$$\leqslant \int_a^b |S_n(x) - S(x)| dx < \varepsilon,$$

因而

$$\int_a^b S(x) dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b S_n(x) dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx. \qquad \square$$

例 4 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, 计算 $\int_0^{\pi} f(x) dx$.

解 因级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 故在任意有限区间内能逐项积分. 于是

$$\int_0^\pi f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\pi \frac{\cos nx}{n^2}dx=0. \qquad \Box$$

定理 4 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 满足下面三个条件:

(i) 在区间 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$;

(ii) 每个 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数;

(iii) 由导函数构成的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛;

那么函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数, 且可逐项求导:

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x), \quad x\in[a,b].$$

证明 从(ii), (iii)知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 满足定理 1 的条件. 若记 $\sigma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$, 则 $\sigma(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 我们要证 $S'(x)=\sigma(x)$ 在 $[a,b]$ 上成立. 由定理 3 知, 当 $x\in[a,b]$ 时, 有

$$\begin{aligned}\int_a^x \sigma(t)dt &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(t)dt\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}[u_n(x)-u_n(a)]\\ &=S(x)-S(a).\end{aligned}$$

由 $\sigma(x)$ 的连续性, 在上式两端求导, 即得

$$S'(x)=\sigma(x). \qquad \Box$$

例 5 证明 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中有二阶连续导函数, 并计算 $f''(x)$.

解 容易看出，原级数以及每项求导后所得的级数都在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛，因而有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}.$$

对这个级数再逐项求导所得的级数仍在$(-\infty, +\infty)$上一致收敛，因而有

$$f''(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}. \qquad \square$$

作为级数理论的应用，我们给出一个处处连续处处不可微的函数的例子．这种函数的例子首先是由 Weierstrass 提出来的．下面介绍的是 Van der Waerden 的例子，这个例子比 Weierstrass 的简单，但基本想法和 Weierstrass 是一样的．

先在实数轴上定义函数 $u_0(x)$如下：它是一个以 1 为周期的周期函数，在区间$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$上定义为

$$u_0(x)=|x|,$$

这是一个锯齿形的函数．利用 $u_0(x)$再定义一串函数如下：

$$u_k(x)=\frac{1}{4^k}u_0(4^kx) \quad (k=1, 2, \cdots).$$

容易知道，$u_k(x)$是以$\frac{1}{4^k}$为周期的周期函数：

$$u_k\left(x+\frac{1}{4^k}\right)=\frac{1}{4^k}u_0(4^kx+1)$$

$$=\frac{1}{4^k}u_0(4^kx)=u_k(x);$$

其次，因为 $u_0(x)$在$\left[\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}\right]$上是线性的（这里 s 是任意整数），所以 $u_k(x)$ 在区间$\left[\frac{s}{2\cdot 4^k}, \frac{s+1}{2\cdot 4^k}\right]$上是线性的．

由此可知，$u_k(x)$也是锯齿形的函数，只是随着 k 的增大，锯齿越来越细.

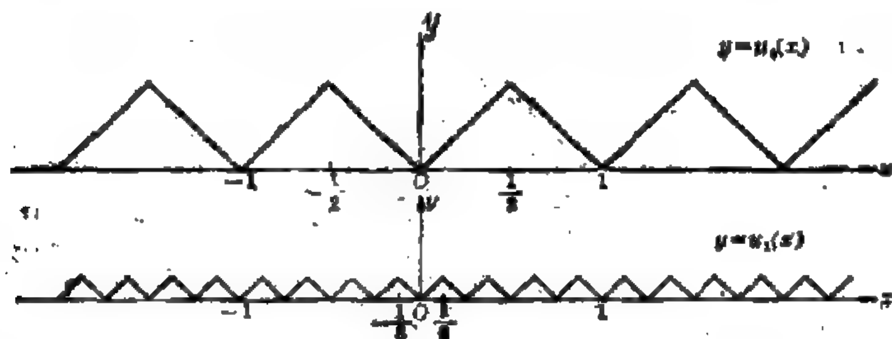


图 3

现在定义

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)\quad(-\infty<x<+\infty).$$

我们证明 $f(x)$在实数轴上处处连续但却处处不可微. 事实上，因为

$$0\leqslant u_k(x)=\frac{1}{4^k}u_0(4^kx)\leqslant\frac{1}{4^k}\quad(-\infty<x<+\infty),$$

所以级数$\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x)$在实数轴上一致收敛. 故$f(x)$在实数轴上处处连续. 现证它处处不可微. 为此任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，记$[2\cdot 4^nx_0]=s_n$，则$\frac{s_n}{2\cdot 4^n}\leqslant x_0<\frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}$. 又取 $x_n\in\left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n},\frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right]$，使得$|x_n-x_0|=\frac{1}{2}\,\frac{1}{2\cdot 4^n}=\frac{1}{4^{n+1}}$. 显然，当 $n\to+\infty$时，$x_n\to x_0$. 我们要证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\tag{4}$$

不存在. 按照$f(x)$的定义，

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}.\tag{5}$$

暂时固定 n，当 $k>n$ 时，由于 $u_k(x)$的周期是$\frac{1}{4^k}$，所以

$$u_k(x_n)=u_k\left(x_0\pm\frac{1}{4^{n+1}}\right)$$
$$=u_k\left(x_0\pm\frac{1}{4^k}\cdot 4^{k-(n+1)}\right)=u_k(x_0),$$

于是(5)变为

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{n}\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0},$$

当 $k\leqslant n$ 时，不难证明

$$\left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n},\ \frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right]\subset\left[\frac{s_k}{2\cdot 4^k},\ \frac{s_k+1}{2\cdot 4^k}\right].$$

已知 $u_k(x)$ 在$\left[\frac{s_k}{2\cdot 4^k},\ \frac{s_k+1}{2\cdot 4^k}\right]$上是线性的，因而在$\left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n},\ \frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right]$上也是线性的．现在 $x_n, x_0\in\left[\frac{s_n}{2\cdot 4^n},\ \frac{s_n+1}{2\cdot 4^n}\right]$，所以

$$\frac{u_k(x_n)-u_k(x_0)}{x_n-x_0}=\pm 1,$$

由此可得

$$\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{n}(\pm 1).$$

容易知道，如果 n 为奇数，那么$\sum_{k=0}^{n}(\pm 1)=$偶数；如果 n 为偶数，那么$\sum_{k=0}^{n}(\pm 1)=$奇数．这就证明了(4)不存在，因而 $f(x)$在实数轴上处处不可微． □

习　题

1．回答下列问题：

(1) 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 中收敛于 $S(x)$，对于任意 $\delta>0$，它在 $[\delta, +\infty)$ 中一致收敛．如果 $u_n(x)\ (n=1, 2, \cdots)$ 都在 $(0, +\infty)$ 中连续，能否断言 $S(x)$ 也在 $(0, +\infty)$ 中连续?

(2) 在 Dini 定理的证明中，"有界闭区间"这个条件用在何处?

(3) 在 Dini 定理中，把"有界闭区间"改为"无穷区间"，定理是否成立? 举例说明之．

2. 确定下列函数的定义域，并研究它们的连续性:

(1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$．　　(2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$．

3. 证明函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中有二阶连续导函数，并计算 $f''(x)$．

4. 证明 Riemann ζ 函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在区间 $(1, +\infty)$ 内是连续的，并在这区间内有各阶连续导函数．

5. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$　$(x>0)$，计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$．

6. 设 $r_1, r_2, \cdots$ 是 $[0, 1]$ 中的全部有理数，证明函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}\quad (0\leqslant x\leqslant 1)$$

在 $[0, 1]$ 中连续，且在无理点可微；但在有理点不可微．

7. 设 A 是 $(-\infty, +\infty)$ 中一个点集，x_0 是 A 的一个极限点．如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 A 上一致收敛，而且 $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} u_n(x)=a_n,\ (n=1, 2, \cdots)$．证明:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛．

(2) $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$　(x_0 可以是 ∞)．

8. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^{n}\cos\frac{n\pi}{x}$, 计算

$$\lim_{x\to1}f(x),\qquad \lim_{x\to+\infty}f(x).$$

9. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\ln2$, 证明

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{x}}=\ln2.$$

10. 证明

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}.$$

11. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上收敛, 如果

$$\left|S_n(x)\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\leqslant M\quad(a\leqslant x\leqslant b,\ n=1, 2, \cdots),$$

就说 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界收敛.

设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 对任意 $\delta>0$ 在 $[a, c-\delta]$, $[c+\delta, b]$ 上一致收敛, 且在 $[a, b]$ 上有界收敛, 证明若 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也在 $[a, b]$ 上可积, 而且

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

12. 如果函数 $u_n(x)$ $(n=1, 2, \cdots)$ 在 $[a, b]$ 上可积, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 证明 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且有

$$\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx.$$

13. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，证明

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

第三节　幂　级　数

这一节我们要研究一种特殊的函数项级数——幂级数．称每项都是幂函数的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

为幂级数，它是一种理论上简单、应用起来方便的函数项级数．如果在(1)中命

$$a_{n+1}=a_{n+2}=\cdots=0,$$

那么级数(1)就退化为一多项式．因此多项式可看作一种特殊的幂级数．反之，幂级数也可看作一个“无穷次”的多项式．下面将会看到，幂级数确有许多和多项式类似的性质．

本节主要讨论两个问题，一是研究幂级数的和函数的性质，二是讨论在什么条件下能把一个给定的函数展开成幂级数以及如何展开．

§3.1　幂级数的收敛半径

我们首先关心的是幂级数的收敛点集，这与一般的函数项级数不一样，幂级数的收敛点集一定是一个区间，从下面的定理即可得知．

定理 1　对于给定的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

记$\alpha=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$, $R=\dfrac{1}{\alpha}$,那么

(i) 当$R=0$(即$\alpha=+\infty$)时,(1)只在$x=0$这一点收敛;

(ii) 当$R=+\infty$(即$\alpha=0$)时,(1)在整个数轴上都绝对收敛;

(iii) 当$0<R<+\infty$时,(1)在区间$(-R,R)$中绝对收敛,在$(-R,R)$之外发散.

证明 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\alpha,$$

根据数项级数的Cauchy判别法即得定理的证明. □

由此可见,幂级数的收敛点集是区间$(-R,R)$,R称为(1)的收敛半径,$(-R,R)$称为(1)的收敛区间. 定理1实际上给出了计算R的公式.

例1 用定理1容易算出下列三个幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n,\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\ \sum_{n=1}^{\infty}n^nx^n$$

的收敛半径分别为1, $+\infty$, 0. □

例2 计算幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^kx^{2k}$的收敛半径.

解 当$n=2k$时,$a_n=2^k$;当$n=2k+1$时,$a_n=0$,所以

$$\alpha=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{k\to+\infty}\sqrt[2k]{2^k}=\sqrt{2},$$

因而$R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. □

必须指出,在幂级数的收敛区间$(-R,R)$的两个端点$x=\pm R$处,级数的收敛性没有肯定的结论. 下面三个级数

$$\text{(i)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},\ \text{(ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},\ \text{(iii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

的收敛区间都是$(-1,1)$，但其中(i)在左端点$x=-1$处条件收敛，在右端点$x=1$发散；(ii) 在左右两个端点都绝对收敛；(iii) 在两个端点都发散.

从定理 1 还可得

定理 2 (Abel)　如果幂级数 (1) 在点 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 处收敛，那么它必在区间$|x|<|x_0|$中绝对收敛；如果(1) 在点$x=x_1$处发散，那么也在$|x|>|x_1|$发散.

证明　设(1)的收敛半径为R. 由假设$|x_0|<R$，即$(-|x_0|, |x_0|)\subset(-R,R)$，故(1)在$(-|x_0|, |x_0|)$中绝对收敛. 因(1)在$x=x_1$处发散，$x_1\notin(-R,R)$，故(1)在$|x|>|x_1|$处发散. ∎

习　题

1. 回答下列问题：

(1) 幂级数的收敛点集和一般的函数项级数有什么区别？如何计算幂级数的收敛半径？

(2) 幂级数在其收敛区间的两个端点上是否收敛？

2. 求下列幂级数的收敛半径，并研究它在收敛区间端点的性质：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}x^n$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n^2}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\quad(a>0,\ b>0)$.

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}\quad(a>0,\ b>0)$.　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$.

3. 求下列广义幂级数的收敛点集：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}e^{-nx}$.

(3) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$.　　　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$.

4. 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$是一个发散的正项级数，如果$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_0+\cdots+a_n}=0$，那么级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$R=1$. 试证之.

5. 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$的收敛半径分别为$R_1$和$R_2$, 证明

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$的收敛半径$R\geqslant\min(R_1, R_2)$.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_n)x^n$的收敛半径$R\geqslant R_1R_2$.

(3) 举例说明在(1)中$R>\min(R_1, R_2)$和在(2)中$R>R_1R_2$都是可能发生的.

§ 3.2 和函数的性质

设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

的收敛半径为R，它在区间$(-R, R)$内确定了一个和函数$S(x)$. 为了研究$S(x)$在$(-R, R)$内的性质，首先要知道幂级数在它的收敛区间中是否一致收敛. 一般来说答案是否定的, 例如级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$在它的收敛区间$(-1, 1)$中就不一致收敛. 但我们有下面的

定理 1 设(1)的收敛半径为R，则对任意的$r\in(0, R)$，级数在$[-r, r]$中一致收敛.

证明很简单，因为当$x\in[-r, r]$时，有

$$|a_nx^n|\leqslant|a_n|r^n,$$

而$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$收敛，因此$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$[-r, r]$上一致收敛. □

幂级数的这一性质保证了它的和函数不仅在收敛区间内是连续的，而且具有任意阶导数.

定理 2 设(1)的收敛半径为 R，则其和函数 $S(x)$在 $(-R, R)$ 中连续.

证明 任取 $x_0\in(-R, R)$，即$|x_0|<R$，在$|x_0|$，R之间任取一数 r，于是 $x_0\in[-r, r]\subset(-R, R)$. 据定理 1，(1)在$[-r, r]$中一致收敛，因而 $S(x)$在 x_0 连续. 由于 x_0 是在$(-R, R)$中任意取的，故 $S(x)$在$(-R, R)$中连续. □

定理 3 设 (1) 的收敛半径为R，则其和函数 $S(x)$ 在区间$(-R, R)$中可导，其导函数可通过逐项求导而得：

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}, \tag{2}$$

而且逐项求导后的幂级数的收敛半径仍为 R.

证明 因为

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{n|a_n|}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{|a_n|},$$

由 § 3.1 定理 1 知，(2)式右端的幂级数的收敛半径也是 R，因而对任意 $r\in(0, R)$，该幂级数在$[-r, r]$中一致收敛. 于是对幂级数 (1) 而言，§ 2.3 定理 4 的三个条件都满足，因而等式(2) 在$[-r, r]$上成立. 由于 r 可任意接近R，所以(2)在$(-R, R)$ 中成立. □

反复应用定理 3，可得

推论 设(1)的收敛半径为 R，则其和函数 $S(x)$在 $(-R, R)$ 中有任意阶导数：

$$S^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k} \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{3}$$

且其收敛半径仍为 R.

这条推论所揭示的正是幂级数和多项式的相似之处.

定理 4 设 (1) 的收敛半径为 R, $S(x)$是它的和函数. 对于 $(-R,R)$中的任意 x, 均有

$$\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}, \tag{4}$$

而且上式右端幂级数的收敛半径仍为 R.

证明 不妨设 $x>0$, 由于(1)在$[0,x]$中一致收敛, 故由 § 2.3 定理 3 知, 它在$[0,x]$上能逐项积分, 因而有

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x(a_nt^n)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

这就是(4). 由 § 3.1 定理 1 易知(4)右端的级数的收敛半径也是 R. □

利用上面这些定理可以求出一些幂级数的和, 以及把一些初等函数展开为幂级数.

例 1 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和.

解 容易知道这个幂级数的收敛半径 $R=1$. 为了求出它的和, 对下列幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\quad(|x|<1)$$

逐项求导, 就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}\quad(|x|<1).\qquad □$$

在上式中取 x 的一些特殊值，即可得一些数项级数的和，例如分别取 $x=\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}$，就得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{3}{4}$$

例 2 把 $\ln(1+x)$，$\operatorname{arc\,tg}x$ 展开成幂级数.

解 当 $x\in(-1,1)$时，有

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,$$

由 0 到 x 逐项积分得

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\quad(-1<x<1).$$

再逐项积分等式

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},$$

即得$\operatorname{arc\,tg}x$的展开式

$$\operatorname{arc\,tg}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1<x<1).\qquad\Box$$

在收敛区间的两端点处，和函数有如下性质.

定理 5 (Abel) 设(1)的收敛半径为 R，如果在 $x=R$ 处，级数收敛，则其和函数 $S(x)$ 在 $x=R$ 处左连续；如果(1)在 $x=-R$ 处收敛，则 $S(x)$在 $x=-R$ 处右连续.

证明 设(1)在 $x=R$ 处收敛，我们证明(1)必在$[0,R]$上一致收敛. 事实上，把(1)写成

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n\left(\frac{x}{R}\right)^n.$$

由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nR^n$收敛，数列$\left(\frac{x}{R}\right)^n$对$[0,R]$中的每个$x$而言是单调的，而且一致有界．因而根据级数一致收敛的 Abel 判别法，(1) 在$[0,R]$上一致收敛，所以$S(x)$在$x=R$处左连续．定理的另一半可同法证之． ∎

例 3 求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

的和．

解 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的收敛半径为 1，设其和函数为$S(x)$．因该级数在收敛区间的右端点$x=1$处收敛，故$S(x)$在$x=1$处左连续，即

$$\lim_{x\to1^-}S(x)=S(1). \tag{5}$$

但由例 2 知$S(x)=\ln(1+x)\quad(-1<x<1)$，由(5)即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\ln 2.$$

利用例 2 的另一展开式

$$\operatorname{arc\,tg}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1<x<1),$$

即得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{4}. \quad ∎$$

幂级数的一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \tag{6}$$

其中 a 是一个定数. 通过变换 $y=x-a$, 即可把(6)化为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n. \tag{7}$$

如果(7)的收敛半径为 R, 那么(6)的收敛区间便是 $(a-R, a+R)$. 其它的结论都和前面讨论过的一样.

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 幂级数在其收敛区间中是否一致收敛?

(2) 幂级数和多项式有哪些相同之处, 哪些不同之处?

2. 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n+1}$.　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

3. 证明下列等式($|x|<1$):

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\frac{2}{(1-x)^3}$.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3x^n=\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3!}(n+1)(n+2)(n+3)x^n=\frac{1}{(1-x)^4}$.

4. 利用等式 $\int_0^1 t^{n-1}\,dt=\frac{1}{n}$, 证明

(1) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln 2\right)$.

(2) $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots=\frac{1}{4\sqrt{2}}(\pi+2\ln(\sqrt{2}+1))$.

5. 利用等式$\int_0^1 t^{n-1}(1-t)dt=\frac{1}{n(n+1)}$, 证明

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

6. 证明下列等式:

(1) $\int_0^1 (1-t^2)^n dt=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{n-1}=\int_0^1\frac{1-t^2}{1-x+xt^2}dt \quad (|x|<1)$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$.

7. 证明下列各式:

(1) $\int_0^1 t^{n-1}\ln t dt=-\frac{1}{n^2}$.

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t dt=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

(3) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=\frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (|x|<1)$.

(4) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi}{2}\ln 2$.

8. 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 且 $a_n\geqslant 0$, 证明

$$\lim_{x\to R-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n R^n.$$

9. 利用上题结果证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$.

10. 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=a$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n=b$, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=c$, 其中 $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$, 证明

$$c=ab.$$

§ 3.3 函数的幂级数展开式

现在开始研究第二个问题：函数在什么条件下能展开成幂级数以及如何展开.

如果函数 f 在区间 $(a-R, a+R)$ 中能展开成幂级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n,$$

根据 § 3.2 定理 3 的推论，f 在 $(a-R, a+R)$ 中有任意阶导数，这是 f 能展为幂级数的必要条件. 其次，由于

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-a)^{n-k}$$

$$(k=1, 2, \cdots),$$

命 $x=a$, 就得

$$a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\quad (k=0, 1, 2, \cdots).$$

这就是说，如果 f 能展为 $x-a$ 的幂级数，那么这个幂级数一定是下面这种形式：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

现在设 f 在 $x=a$ 处有任意阶导数，那么从 f 就能作出幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

称这个幂级数为 f 在 $x=a$ 处的 Taylor 级数，记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{1}$$

特别当 $a=0$ 时，级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

也称为 f 的 Maclaurin 级数.

只要 f 在 $x=a$ 处有任意阶导数,就能作出它的 Taylor 级数(1), 至于这个级数是否收敛, 以及如果收敛, 它的和是否就是 $f(x)$, 这些都是不知道的. 事实上, 不难举出这样的例子: f 的 Taylor 级数虽然收敛, 但它的和却不等于 $f(x)$.

例如

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

不难算出

$$f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

因而它的 Taylor 级数收敛于 0, 而不收敛于 $f(x)$. 同样不难举出这样的函数, 它的 Taylor 级数除一点外处处发散. 例如

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!},$$

它在 $x=0$ 处的 Taylor 级数除 $x=0$ 外是处处发散的 (证明留给读者作练习).

于是产生这样的问题: f 要满足什么条件, 才能保证它的 Taylor 级数收敛于 f 自己? 即在什么条件下, 等式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

成立?

设 f 在 $(a-R,a+R)$ 上有任意阶导数, 根据 Taylor 公式, 对 $(a-R,a+R)$ 中的任一 x, 有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)$是余项，它有两种表达式:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1},$$

这里 $0<\theta<1$. 由此便得

定理 1 设 f 在$(a-R, a+R)$上有任意阶导数，则 f 能在$(a-R, a+R)$上展开为 Taylor 级数的充分必要条件是对任意 $x\in(a-R, a+R)$有

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x)=0.$$

根据这个定理，可以得到一个便于应用的充分条件.

定理 2 如果存在常数M, 使对$(a-R, a+R)$中的所有 x 以及一切自然数 n, 均有

$$|f^{(n)}(x)|\leqslant M,$$

那么 f 能在$(a-R, a+R)$中展为 Taylor 级数.

证明 只须证明在上述条件下有

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x)=0 \quad x\in(a-R, a+R).$$

事实上，

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|$$
$$\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}\leqslant M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$

由于级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}$收敛，因而$\lim_{n\to+\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 故得

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x)=0 \quad x\in(a-R, a+R).$$ □

例 1 求函数 e^x 的 Maclaurin 展开式.

解 因为$(e^x)^{(n)}=e^x$ $(n=0, 1, \cdots)$, 故其 Maclaurin 级数为

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

为了证明上式等号成立，任取正数R，当$|x|<R$时，对一切自然数n均有

$$|(e^x)^{(n)}| = e^x < e^R,$$

根据定理2即得

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{2}$$

在$(-R, R)$中成立．由于R是任意的，故(2)在$(-\infty, +\infty)$中成立．$\square$

例2 求函数$\sin x$和$\cos x$的Maclaurin展开式.

解 因为

$$(\sin x)^{(n)}\Big|_{x=0} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\Big|_{x=0} = \sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 0, & n=2k, \\ (-1)^k, & n=2k+1. \end{cases}$$

又因为

$$|(\sin x)^{(n)}| = \left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1$$

对一切x和一切自然数n成立，根据定理2有

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

用同样的方法可得

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (-\infty < x < +\infty). \qquad \square$$

例3 求函数$f(x)=(1+x)^a$的Maclaurin展开式．其中a为任意实数.

解 因为

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以 $f(x)=(1+x)^{\alpha}$ 的 Maclaurin 级数为

$$(1+x)^{\alpha}\sim 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n},\tag{3}$$

当 α 为自然数或 0 时，级数只有有限项，即大家熟知的 Newton 二项展开式．因此不妨假定 α 不是自然数或 0，这时级数(3)中没有一项为 0．容易算出，幂级数(3)的收敛半径为 1．为了证明(3)的和就是 $(1+x)^{\alpha}$，我们采用余项的 Cauchy 表达式，即

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^{n}x^{n+1}.$$

为了证明它当 $n\to+\infty$ 时趋于 0，把它改写为三部分的乘积：

$$R_n(x)=\left\{\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots[(\alpha-1)-n+1]}{n!}x^{n}\right\}\cdot$$
$$[\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}]\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n}.$$

其中第一部分是函数 $(1+x)^{\alpha-1}$ 的 Maclaurin 级数的通项，当 $|x|<1$ 时，这个级数是收敛的，因而当 $n\to+\infty$ 时，它趋于 0；第二部分是个有界量，它的绝对值介于

$$|\alpha x|(1-|x|)^{\alpha-1}\text{ 与 }|\alpha x|(1+|x|)^{\alpha-1}$$

之间；由于当 $x>-1$ 时，$1+\theta x>1-\theta>0$，所以第三部分小于 1．由此得知，对于 $x\in(-1,1)$，有

$$\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0.$$

故由定理 1 知，等式

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}\tag{4}$$

对 $(-1,1)$ 中的 x 成立．至于在收敛区间端点的情形，我们只指出

下面的结论(证明从略)：当 $x=1$ 时，(4)对 $\alpha>-1$ 成立；当 $x=-1$ 时，(4)对 $\alpha>0$ 成立. □

下面是 $\alpha=-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$ 三个特例：

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad (-1<x<1),$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots \quad (-1\leqslant x\leqslant 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n+\cdots \quad (-1<x\leqslant 1).$$

定理 1 和定理 2 给出了把函数展开为幂级数的方法. 除此之外，利用某些函数的已知展开式，通过幂级数的微分、积分以及代数运算也能作出其它一些函数的幂级数展开式. 上节例 2 通过幂级数的逐项积分求得了 $\ln(1+x)$ 和 $\operatorname{arc\,tg} x$ 的幂级数展开式. 下面举两个利用幂级数的代数运算求函数的幂级数展开式的例子. 为此，我们需要.

定理 3 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2, 命 $R=\min(R_1, R_2)$, 那么在区间 $(-R, R)$ 中有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n,$$

其中 $c_n=\sum_{l=0}^{n}a_l b_{n-l}$.

定理的证明留给读者作练习。

例 4　将函数 $\frac{1}{(1-x)(2-x)}$ 展开为幂级数。

解　易知

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x},$$

而

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1),$$

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (-2<x<2),$$

因而当 $-1<x<1$ 时，有

$$\frac{1}{(1-x)(2-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n. \qquad \square$$

例 5　将函数 $\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ 展开为幂级数。

解　已知在区间$(-1,1)$中有

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

根据幂级数的乘法定理，

$$c_n=\sum_{l=0}^{\infty}a_l b_{n-l}=-\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{l},$$

所以

$$\frac{\ln(1-x)}{1-x}=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n \quad (-1<x<1). \qquad \square$$

下面六个初等函数的幂级数展开式以后经常要碰到，必须熟

练地掌握:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\qquad(-\infty<x<+\infty),$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\qquad(-1<x\leqslant 1),$$

$$\operatorname{arc\,tg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\qquad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\quad(-1<x<1).$$

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 函数 f 能在区间 $(a-R, a+R)$ 中展开成幂级数的必要条件是什么?

(2) 如果 f 在区间 $(a-R, a+R)$ 中有任意阶导数, f 是否能在这区间上展开成幂级数?

(3) 如果 f 的 Taylor 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 中处处收敛, 是否一定收敛到 f 本身?

(4) 已知 f 的幂级数展开式是 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n$ 是哪个函数的展开式?

2. 利用已知的初等函数展开式, 写出下列函数的幂级数展开式:

(1) e^{x^2}.　　　　(2) $\cos^2 x$.

(3) $\frac{x^{12}}{1-x}$.　　　　(4) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

(5) $\frac{x}{1+x-2x^2}$.　　　　(6) $(1+x)e^{-x}$.

3. 利用逐项微分法和逐项积分法求下列函数的幂级数展开式:

(1) $\arcsin x$.　　　　(2) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

(3) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$.

4. 求下列函数的幂级数展开式:

(1) $(1+x)\ln(1+x)$.　　　　(2) $x\operatorname{arctg}x-\ln\sqrt{1+x^2}$.

(3) $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.　　　　(4) $(1+x^2)\operatorname{arctg}x$.

5. 把函数 $f(x)=\ln x$ 按 $\frac{x-1}{x+1}$ 的正整数幂展开成幂级数.

6. 证明函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^n x)}{n!}$$

的 Taylor 级数除 $x=0$ 外, 处处发散.

7. 给出定理 3 的证明.

8. 设 f 及其所有导数在 $[0, r]$ 上都是非负的, 证明 f 的 Taylor 级数在 $[0, r)$ 上收敛于 f, 即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(x)\qquad(0\leqslant x<r).$$

提示: 证明 f 的 Taylor 展开式的余项 $R_n(x)$ 满足

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}f(r)\quad(0\leqslant x\leqslant r).$$

§3.4 用多项式一致逼近连续函数

设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 总能找到多项式 P, 使得对 $[a, b]$ 中所有 x 均有

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon$$

成立, 就说 f 在 $[a, b]$ 上能用多项式一致逼近.

如果 f 在 $(-R, R)$ 中能展开成幂级数, 那么对任意 $[a, b]\subset$

$(-R, R)$, f 在 $[a, b]$ 上能用多项式一致逼近. 但是能展开成幂级数的函数毕竟是很狭的一类函数, 因为它要求函数有任意阶导数, 而且就象 § 3.3 中所看到的, 即使这样强的条件还是不充分的. 因此, 自然产生这样一个问题: 能用多项式一致逼近的那类函数是否比能展开成幂级数的那类函数要求低一些? 事实上, 如果 f 能展开成一致收敛的多项式级数:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x),$$

这里 P_n 是多项式, 那么 f 就能用多项式一致逼近. 反之, 能用多项式一致逼近的函数也一定能展开为一致收敛的多项式级数. 事实上, 如果 f 在 $[a, b]$ 上能用多项式一致逼近, 那么对任意自然数 n, 都可以找到一个多项式 Q_n, 使得

$$|f(x)-Q_n(x)|<\frac{1}{n} \quad x\in[a, b]. \tag{1}$$

命

$$P_1=Q_1, \quad P_n=Q_n-Q_{n-1} \quad (n>1),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ 的部分和就是 $Q_n(x)$, 不等式 (1) 说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

由此可见, f 在 $[a, b]$ 上可以用多项式一致逼近, 等价于 f 在这个区间上可以展开为一致收敛的多项式级数. 因而 f 在 $[a, b]$ 上能用多项式一致逼近的必要条件是 f 在 $[a, b]$ 上连续. Weierstrass 在 1885 年证明了数学分析中最基本的事实之一: f 连续也是 f 能用多项式一致逼近的充分条件.

定理 1 (Weierstrass) 有限闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 f 可以在这个区间上用多项式一致逼近.

证明 (一) 先假定$[a,b]=[0,1]$，并且$f(0)=f(1)=0$. 当$x\notin[0,1]$时，定义$f(x)=0$. 于是f在整个数轴上一致连续. 考虑多项式序列

$$Q_n(x)=c_n(1-x^2)^n \quad (n=1,2,\cdots),$$

这里$c_n=\left\{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx\right\}^{-1}$. 于是

$$\int_{-1}^{1}Q_n(x)dx=1 \quad (n=1,2,\cdots).$$

容易证明在区间$[0,1]$上有不等式

$$(1-x^2)^n\geqslant 1-nx^2,$$

因而

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx=2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx\geqslant 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-x^2)^n dx$$

$$\geqslant 2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}(1-nx^2)dx=\frac{4}{3\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{2}$$

于是得c_n的估计式

$$c_n<\sqrt{n}.$$

这样，对任意$\delta>0$，当$\delta\leqslant|x|\leqslant 1$时有

$$Q_n(x)\leqslant\sqrt{n}(1-\delta^2)^n. \tag{3}$$

现在命

$$P_n(x)=\int_{-1}^{1}f(x+t)Q_n(t)dt \quad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

容易证明，$P_n(x)$是x的一个多项式. 事实上，对上面的积分作变量代换$x+t=u$，并注意到f在$[0,1]$外恒等于0，便得

$$P_n(x)=\int_{-1+x}^{1+x}f(u)Q_n(u-x)du=\int_{0}^{1}f(u)Q_n(u-x)du.$$

因为Q_n是多项式，所以$P_n(x)$也是x的多项式. 由(1)，可写

$$f(x)=\int_{-1}^{1}f(x)Q_n(t)dt.$$

于是，因为当 $x\in[0,1]$ 时 $Q_n(x)\geqslant 0$，故当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时有

$$|P_n(x)-f(x)|=\left|\int_{-1}^{1}[f(x+t)-f(x)]Q_n(t)dt\right|$$
$$\leqslant\int_{-1}^{1}|f(x+t)-f(x)|Q_n(t)dt.$$

因为 f 在整个数轴上一致连续，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}$。记 $M=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)|$，并注意到不等式(3)，便有

$$|P_n(x)-f(x)|\leqslant 2M\int_{-1}^{-\delta}Q_n(t)dt+\frac{\varepsilon}{2}\int_{-\delta}^{\delta}Q_n(t)dt$$
$$+2M\int_{\delta}^{1}Q_n(t)dt\leqslant 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n+\frac{\varepsilon}{2},$$

只要取 n 充分大，便得

$$|P_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

（二）如果 $f(0)=f(1)=0$ 的条件不成立，考虑函数

$$g(x)=f(x)-f(0)-x[f(1)-f(0)]\quad(0\leqslant x\leqslant 1),$$

则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $g(0)=g(1)=0$，故由（一）知，$g(x)$ 能在 $[0,1]$ 上用多项式一致逼近．而 f 是 g 和一多项式之和，故也能用多项式一致逼近．

（三）设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，命 $x=a+(b-a)t$，$f(x)=f(a+(b-a)t)=g(t)$，则 $g(t)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数．因而对任意 $\varepsilon>0$，存在多项式 P，使得

$$|g(t)-P(t)|<\varepsilon\quad(0\leqslant t\leqslant 1),$$

即

$$\left|f(x)-P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right|<\varepsilon\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

显然 $P\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$ 还是 x 的多项式。这就证明了 f 在 $[a,b]$ 上可用多

项式一致逼近. □

必须注意，如果把有限闭区间$[a, b]$改成开区间或者无穷区间，定理就不一定成立。例如，$f(x)=\frac{1}{x}$在$(0,1]$上连续，但它在$x=0$附近是无界的，因此不可能用多项式来一致逼近. 同样，$f(x)=\frac{1}{x}$也在$[1,+\infty)$上连续且有界，而任一多项式在$[1,+\infty)$上无界，故也不能用来一致逼近$f(x)$。

习 题

1. 回答下列问题：

(1) 函数f在有界闭区间$[a, b]$上能用多项式一致逼近的充分必要条件是什么？

(2) 在定理1的证明中，"有界闭区间"的条件用在何处？

(3) 另举两例说明定理1中"有界闭区间"的条件不能改为"有界开区间"或"无穷区间".

2. 按照下列步骤给出Weierstrass逼近定理的另一个证明：

(1) 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=1.$$

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=nx.$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}=nx(1-x+nx).$$

(2) 对于任意自然数n及实数x，证明不等式：

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k}\leqslant\frac{n}{4}.$$

(3) 设f是$[0,1]$上的连续函数，称

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

是f的 Bernstein 多项式. 证明

$$B_n(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right\}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

(4) 证明

$$\lim_{n\to+\infty}B_n(x)=f(x)$$

在[0,1]上一致地成立.

3. 设 f 是$[a,b]$上的连续函数,如果

$$\int_a^b x^n f(x)dx=0 \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

那么 f 在$[a,b]$上恒等于0.

4. 若 f 在$(-\infty,+\infty)$中能用多项式一致逼近,则 f 必为多项式.

§3.5 母函数

作为幂级数理论的一个应用,我们引进数列 a_n $(n=0,1,2,\cdots)$的母函数的概念.

定义 1 设(a_n)是一个给定的数列,称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

为(a_n)的**母函数**.

数列和它的母函数之间是一一对应的. 引进母函数概念后,有些与数列有关的问题可以通过它的母函数来解决.

如果记

$$C_\alpha^0=1,\ C_\alpha^k=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!},$$

那么二项式的展开式可写为

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}C_\alpha^k x^k \qquad (|x|<1). \tag{1}$$

这说明函数$(1+x)^\alpha$是数列

$$C_\alpha^0, C_\alpha^1, \cdots, C_\alpha^n, \cdots$$

的母函数.

根据这一事实,便可推出若干有趣的组合恒等式.

例1 设 α,β 是非负实数,证明

$$\sum_{k=0}^{n}C_{\alpha}^{k}C_{\beta}^{n-k}=C_{\alpha+\beta}^{n}. \tag{2}$$

证明 因为数列(C_{α}^{k}), (C_{β}^{k})的母函数分别为 $(1+x)^{\alpha}$, $(1+x)^{\beta}$. 由于

$$(1+x)^{\alpha+\beta}=(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_{\alpha}^{k}x^{k}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}C_{\beta}^{k}x^{k}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_{\alpha}^{k}C_{\beta}^{n-k}\right)x^{n},$$

因此数列$\sum_{k=0}^{n}C_{\alpha}^{k}C_{\beta}^{n-k}$ $(n=0,1,2,\cdots)$的母函数是$(1+x)^{\alpha+\beta}$. 但另一方面,$C_{\alpha+\beta}^{n}$ $(n=0,1,2,\cdots)$的母函数也是$(1+x)^{\alpha+\beta}$, 因而(2)成立. □

若在上式中取 $\alpha=\beta=n$, 则可得等式

$$\sum_{k=0}^{n}(C_{n}^{k})^{2}=C_{2n}^{n}.$$

例2 设 p,q,n 是任意自然数,证明

$$\sum_{k=0}^{n}C_{p+k}^{p}C_{q+n-k}^{q}=C_{p+q+n+1}^{p+q+1}. \tag{3}$$

证明 在(1)中取 $\alpha=-p-1$, 并用 $-x$ 代 x, 便得

$$(1-x)^{-(p+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{p+k}^{p}x^{k},$$

同理

$$(1-x)^{-(q+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{q+k}^{q}x^{k},$$

$$(1-x)^{-(p+q+2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}C_{p+k}^{p}C_{q+n-k}^{q}\right)x^{n}.$$

这说明$(1-x)^{-(p+q+2)}$是数列

$$\sum_{k=0}^{n}C_{p+k}^{p}C_{q+n-k}^{q}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

的母函数；但同时它又是数列

$$C_{p+q+n+1}^{p+q+1}\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

的母函数，因而(3)成立. □

母函数方法还是确定线性递归数列一般表达式的有力工具.

例 3 设数列(a_n)满足关系式

$$a_n=-a_{n-1}+16a_{n-2}-20a_{n-3}\quad(n=3,4,5,\cdots).\tag{4}$$

已知初始值$a_0=0,a_1=1,a_2=-1$，求a_n的一般表达式.

解 设数列(a_n)的母函数是$f(x)$，则有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x-x^2+\sum_{n=3}^{\infty}a_nx^n,$$

$$xf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=x^2+\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-1}x^n,$$

$$-16x^2f(x)=-16\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}=-16\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^n$$

$$=-16\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-2}x^n,$$

$$20x^3f(x)=20\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+3}=20\sum_{n=3}^{\infty}a_{n-3}x^n.$$

把上面四个式子加起来，并注意到(4)，即得

$$(1+x-16x^2+20x^3)f(x)$$

$$=x+\sum_{n=3}^{\infty}(a_n+a_{n-1}-16a_{n-2}+20a_{n-3})x^n=x,$$

即

$$f(x)=\frac{x}{1+x-16x^2+20x^3}.$$

母函数找到了，剩下的只是把它展开成幂级数．先把它分解为部分分式：

$$f(x)=\frac{1}{7(1-2x)^2}-\frac{2}{49(1-2x)}-\frac{5}{49(1+5x)},$$

再把

$$\frac{1}{(1-2x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^n,$$

$$\frac{1}{1-2x}=\sum_{n=0}^{\infty}2^nx^n,$$

$$\frac{1}{1+5x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n5^nx^n$$

代入上式得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{7}(n+1)2^n-\frac{2}{49}2^n-\frac{5}{49}(-1)^n5^n\right\}x^n,$$

由此即得

$$a_n=\frac{1}{7}(n+1)2^n-\frac{1}{49}2^{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{49}5^{n+1}$$

$$(n=0,1,2,\cdots).$$]

母函数方法也是解决某些计数问题的有力工具．

例 4　口袋中放着12个字母，其中有 3 个 a，4 个 b，5 个 c，从中任取 10 个字母，问有多少种不同的取法？

解　设任取 n 个字母的不同取法有 a_n 种，只要能求出数列a_n的母函数，问题便解决了．不难证明，数列 a_n 的母函数是

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5).$$

(5)

事实上,(5)的展开式中每一项 x^n 必定是这样构成的:

$$x^n=x^{m_1}\cdot x^{m_2}\cdot x^{m_3},\ m_1+m_2+m_3=n,$$

其中 x^{m_1},x^{m_2},x^{m_3} 分别取自第一,二,三个括弧,如果让第一,二,三个括弧分别对应字母 a,b,c,从第一个括弧中取 x^{m_1} 解释为"字母 a 被取了 m_1 次",从第二个括弧中取 x^{m_2} 解释为"字母 b 被取了 m_2 次"从第三个括弧中取 x^{m_3} 解释为"字母 c 被取了 m_3 次",由于第一,二,三括弧中最高次数分别为 3, 4, 5,因此在任一取法中,a 不能超过 3 个,b 不能超过 4 个,c 不能超过 5 个.这样一来,(5)的展开式中每个 x^n 就对应一种 a,b,c 的取法。合并同类项之后,x^n 的系数就是每次取 n 个的所有可能取法的总数,即为 a_n。我们的问题是要确定 a_{10} 的数值,这只须直接计算(5)的展开式中 x^{10} 的系数得 $a_{10}=6$。 □

习　　题

1. 用母函数方法证明下列等式:

(1) $C_n^r+C_n^{r+1}=C_{n+1}^{r+1}$.

(2) $\sum\limits_{k=0}^{n-r}C_n^kC_n^{r+k}=\dfrac{(2n)!}{(n-r)!(n+r)!}$.

(3) $\sum\limits_{k=0}^{m}C_{n+k}^{n}=C_{n+m+1}^{n+1}$.

2. 求满足下列递推关系和初始条件的数列(a_n):

(1) $a_n=a_{n-1}+9a_{n-2}-9a_{n-3},\ a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=2.$

(2) $a_n=3a_{n-2}-2a_{n-3},\ a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=0.$

(3) $a_n=2a_{n-1}-a_{n-2}+2^n,\ a_0=a_1=1.$

3. 有甲、乙、丙三个小圆桌,甲桌上有 n 个大小不同的盘子依大小次序叠在一起,最大的在底下,最小的在顶上.现要把这些盘子按甲桌上的次序移到另一桌上,现规定每次只能移动最上面的一个盘子,而且不允许把大的盘子放在小的盘子上.问至少要移动多少次,才能把这些盘子移到另一桌上(假定每个圆桌的大小只够放一个最大的盘子)?

提示：设至少要移动 a_n 次，证明 a_n 满足递推关系 $a_n=2a_{n-1}+1$.

4. 口袋中放着 12 个球，其中 3 个是红的，3 个是白的，6 个是黑的，从中任取 8 个球，问有多少种不同的取法？

5. 口袋中有红、白、黑三种颜色的球各 8 个，从中任取 9 个，要求三种颜色的球都有，问有多少种不同的取法？

第九章　含参变量积分

第一节　含参变量的常义积分

在第八章中已经看到，无穷级数是构造新函数的一种重要工具．和无穷级数具有同样重要意义的另一种构造新函数的工具是含参变量的积分．

设二元函数 $f(x,u)$ 在闭区间 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么，对于固定的 u，函数 $f(x,u)$ 对变量 x 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，这时称积分

$$\int_a^b f(x,u)\,dx$$

是**含参变量 u 的常义积分**．如果对于固定的 u，被积函数 $f(x,u)$ 对变量 x 在 $[a,b]$ 上无界，或者积分区间是无限的，则称相应的参变量积分是**含参变量 u 的广义积分**．例如积分

$$\int_0^{+\infty} x^{u-1}e^{-x}\,dx$$

是含参变量 u 的广义积分；积分

$$\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}\,dx$$

当 $u<1$ 或 $v<1$ 时是含两个参变量 u,v 的广义积分．

这一节讨论含参变量的常义积分的性质．

定理 1　如果函数 f 在闭区间 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)\,dx$$

是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数．

证明 在$[\alpha,\beta]$上任取一点u_0，我们证明$\varphi(u)$在u_0处连续。为此，注意

$$\varphi(u)-\varphi(u_0)=\int_a^b[f(x,u)-f(x,u_0)]dx,$$

或者

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|\leqslant\int_a^b|f(x,u)-f(x,u_0)|dx. \tag{1}$$

由于$f(x, u)$在闭区间I上连续，因而必定一致连续。故对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对于闭区间I中任意两点(x_1, u_1)，(x_2, u_2)，只要它们的距离小于δ，就有

$$|f(x_1,u_1)-f(x_2,u_2)|<\varepsilon.$$

由于点(x,u)和点(x, u_0)的距离等于$|u-u_0|$，所以当$|u-u_0|<\delta$时，便有

$$|f(x,u)-f(x,u_0)|<\varepsilon.$$

于是由(1)便得

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|<\varepsilon(b-a).$$

这就证明了$\varphi(u)$在u_0处连续。由于u_0是在$[\alpha, \beta]$中任意取的，故$\varphi(u)$在$[\alpha,\beta]$中连续。 ▯

注 $\varphi(u)$在u_0处连续意味着

$$\lim_{u\to u_0}\varphi(u)=\varphi(u_0), \tag{2}$$

而

$$\varphi(u_0)=\int_a^b f(x,u_0)dx=\int_a^b \lim_{u\to u_0}f(x,u)dx.$$

于是，(2)可写为

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^b f(x,u)dx=\int_a^b \lim_{u\to u_0}f(x,u)dx.$$

这就是说，$f(x, u)$的连续性保证了积分运算和极限运算可以交换次序。

既然 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，我们就可讨论 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的积分

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)du=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,u)dx\right]du.$$

我们的问题是在计算上述积分时，能否交换积分的次序？也就是说，等式

$$\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,u)dx\right]du=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx \tag{3}$$

是否成立？大家知道，当 $f(x,u)$ 在闭区间 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续时，上面两个积分都等于二重积分

$$\iint_I f(x,u)dxdu,$$

因而等式(3)成立．这就是下面的

定理 2 如果函数 $f(x,u)$ 在闭区间 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)du=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^b f(x,u)dx\right]du=\int_a^b\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx.$$

利用这个定理，可以研究函数 $\varphi(u)$ 的微分性质．我们有

定理 3 如果函数 f 及其偏导数 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 都在闭区间 $I=[a,b]\times[\alpha,\beta]$ 上连续，那么函数

$$\varphi(u)=\int_a^b f(x,u)dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，而且

$$\frac{d}{du}\varphi(u)=\int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\right]dx.$$

证明 命

$$\int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial u}f(x,u)\right]dx=g(u)\quad(\alpha\leqslant u\leqslant\beta),$$

在$[\alpha,\beta]$中任取一点 v，则由定理 2 知

$$\int_\alpha^v g(u)\,du=\int_\alpha^v\left[\int_a^b\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx\right]du$$
$$=\int_a^b\left[\int_\alpha^v\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}du\right]dx$$
$$=\int_a^b[f(x,v)-f(x,\alpha)]dx=\varphi(v)-\varphi(\alpha).$$

由定理 1 知，$g(u)$是$[\alpha,\beta]$上的连续函数，上式对 v 求导数，即得

$$\varphi'(v)=g(v),$$

这就是我们要证明的。 □

这个定理告诉我们，在 f 和$\frac{\partial f}{\partial u}$连续的条件下，微分和积分的次序可以交换。

例 1 计算积分

$$I=\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx\quad(0<a\leqslant b).$$

解 把被积函数写为

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^u du,$$

于是

$$I=\int_0^1\left[\int_a^b x^u du\right]dx.$$

交换积分次序，即得

$$I=\int_a^b\left[\int_0^1 x^u dx\right]du=\int_a^b\frac{du}{u+1}=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

也可在上述积分中把 a 看作常数，把 b 看作参变量，应用定理 3 可得

$$\frac{dI}{db}=\int_0^1 x^b dx=\frac{1}{b+1},$$

所以

$$I=\ln(b+1)+C.$$

当 $b=a$ 时，显然有 $I=0$，故 $C=-\ln(a+1)$，由此即可得

$$I=\ln\frac{b+1}{a+1}. \quad \square$$

在很多问题中，经常要遇到这样的情形，不仅被积函数含有参变数，积分限也含有参变数．这时积分可写为

$$\psi(u)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx. \tag{4}$$

对于这样的含参变量积分，我们有

定理 4 设函数 f 在闭区间 I 上连续；函数 $a(u)$，$b(u)$ 都在区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，而且

$$a\leqslant a(u)\leqslant b,\ a\leqslant b(u)\leqslant b \quad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta),$$

则由(4)所确定的函数 ψ 在 $[\alpha,\beta]$ 上也连续．

证明 在 $[\alpha,\beta]$ 上任取一点 u_0，则当 $u\in[\alpha,\beta]$ 时，我们有

$$\psi(u)-\psi(u_0)=\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx-\int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u_0)\,dx.$$

由于

$$\int_{a(u)}^{b(u)} f(x,u)\,dx=\int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x,u)\,dx+\int_{a(u_0)}^{b(u_0)} f(x,u)\,dx+\int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x,u)\,dx,$$

所以

$$\psi(u)-\psi(u_0)=\int_{a(u)}^{a(u_0)} f(x,u)\,dx+\int_{b(u_0)}^{b(u)} f(x,u)\,dx+\int_{a(u_0)}^{b(u_0)}[f(x,u)-f(x,u_0)]\,dx.$$

当 $u\to u_0$ 时，按照定理 1 的证法，容易知道上式最后一个积分是趋于 0 的；而前面两个积分的绝对值显然分别不超过

$$M|a(u)-a(u_0)|,\quad M|b(u)-b(u_0)|,$$

其中 M 是 $|f(x,u)|$ 在 I 上的最大值．根据 $a(u)$，$b(u)$ 的连续性，当 $u\to u_0$ 时，它们也都趋于 0．因此

$$\lim_{u\to u_0}\psi(u)=\psi(u_0). \qquad \Box$$

关于 $\psi(u)$的微分性质有

定理 5 如果函数 f 在闭区间 I 上连续，而且有连续的偏导数$\frac{\partial f}{\partial u}$；又函数 $a(u)$, $b(u)$都在$[\alpha, \beta]$上可微，且

$$a\leqslant a(u)\leqslant b, \quad a\leqslant b(u)\leqslant b \quad (\alpha\leqslant u\leqslant\beta),$$

则由(4)确定的函数 $\psi(u)$ 在$[\alpha, \beta]$上可微，而且

$$\psi'(u)=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x, u)}{\partial u}dx+f(b(u), u)b'(u)-f(a(u), u)a'(u). \tag{5}$$

证明 把 $\psi(u)$写为

$$\psi(u)=\int_{a(u)}^{a(u_0)}f(x, u)dx+\int_{a(u_0)}^{b(u_0)}f(x, u)dx+\int_{b(u_0)}^{b(u)}f(x, u)dx, \tag{6}$$

我们分别算出上述三项在 $u=u_0$ 处的导数. 由定理 3 知道，第二项的导数是

$$\int_{a(u_0)}^{b(u_0)}f'_u(x, u_0)dx.$$

为了计算第三项的导数，根据积分中值定理，我们有

$$\frac{1}{u-u_0}\int_{b(u_0)}^{b(u)}f(x, u)dx=\frac{b(u)-b(u_0)}{u-u_0}f(\bar{x}, u),$$

其中 $\bar{x}$ 是 $b(u_0)$与 $b(u)$中的某一点. 当 $u\to u_0$ 时，上式左端的极限就是(6)的第三项在 u_0 处的导数，右端则趋于 $b'(u_0)f(b(u_0), u_0)$. 同样道理，(6)的第一项在 u_0 处的导数为 $-a'(u_0)f(a(u_0), u_0)$. 所以(5)成立. $\Box$

定理 4, 5 也可从多元复合函数的连续性、可微性及求导法则得到. 事实上，如果命

$$F(u, \xi, \eta)=\int_{\xi}^{\eta}f(x, u)dx,$$

那么 $\psi(u)$是由 $F(u, \xi, \eta)$, $\xi=a(u)$, $\eta=b(u)$复合而成的，因而由

复合函数的连续性和可微性即可推知ψ的连续性和可微性. 再根据复合函数的求导法则, 即得

$$\psi'(u)=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial \xi}\frac{d\xi}{du}+\frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{d\eta}{du}$$

$$=\int_{a(u)}^{b(u)}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx+f(b(u),u)b'(u)$$

$$-f(a(u),u)a'(u),$$

这就是公式(5).

习　题

1. 求极限

(1) $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+a^2}dx$.　　　(2) $\lim\limits_{t\to 0}\int_{0}^{2}x^2\cos tx dx$.

2. 设f在$[a,A]$上连续, 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{a}^{x}[f(t+h)-f(t)]dt=f(x)-f(a)\quad (a<x<A).$$

3. 证明n阶 Bessel 函数

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)d\varphi$$

满足 Bessel 方程

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

4. 利用对参数的微分法, 计算下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)dx$.　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(a\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1-2a\cos x+a^2)dx$.　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\frac{dx}{\cos x}\ (|a|<1)$.

5. 设$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, 证明

$$\int_0^1dy\int_0^1f(x,y)dx\neq\int_0^1dx\int_0^1f(x,y)dy,$$

并说明等式不成立的原因.

6. 计算下列函数的导数:

(1) $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x} e^{\sqrt{1-t^2}}dt$.　　(2) $f(x)=\int_{a+x}^{b+x}\frac{\sin xt}{t}dt$.

(3) $f(x)=\int_{x}^{x^2} e^{-xy^2}dy$.　　(4) $\varphi(a)=\int_0^a f(x+a, x-a)dx$.

7. 设 φ, ψ 分别是可以微分两次和一次的函数, 证明

$$u(x, t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

第二节　广义积分的收敛判别法

§2.1　无穷积分的收敛判别法

第三章第三节介绍过两种广义积分——无穷积分和瑕积分, 但对如何判断这两种积分的敛散, 没有作进一步的讨论. 学过无穷级数后再来学习广义积分的收敛判别法, 就会发现二者在许多方面基本上是一样的.

先讨论无穷积分. 所谓无穷积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛, 是指

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

有有限的极限. 如果记

$$F(A)=\int_a^A f(x)dx,$$

那么$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛, 就是指$\lim\limits_{A\to+\infty}F(A)$ 有有限的极限. 这里$F(A)$就相当于无穷级数中的部分和.

为了导出类似于级数中的 Cauchy 收敛原理, 先讲一下关于函数极限的 Cauchy 收敛原理.

定理 1　当 $x\to+\infty$时, 函数 $F(x)$有一有限极限的充分必要

条件是，对于任一 $\varepsilon>0$，存在 $X>0$，只要 $x,x'>X$，就有

$$|F(x)-F(x')|<\varepsilon.$$

证明 必要性是显然的．今证充分性．根据数列极限和函数极限的关系（第一章 §3.2 定理 6），只要证明对于任意趋于 $+\infty$ 的数列 x_n，$\lim\limits_{n\to+\infty}F(x_n)$ 都有相同的有限极限．为了证明这一点，我们注意，由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$，故对 $X>0$，存在 N，只要 m，$n>N$，便有 $x_n>X$，$x_m>X$，于是

$$|F(x_n)-F(x_m)|<\varepsilon.$$

这说明 $F(x_n)$ 是一基本数列，因而 $\lim\limits_{n\to+\infty}F(x_n)$ 有有限的极限．再任取另一趋于 $+\infty$ 的数列 (x_n')，把 (x_n)，(x_n') 交错排列，得一新的趋于 $+\infty$ 的数列

$$x_1, x_1', x_2, x_2', \cdots, x_n, x_n', \cdots.$$

根据上面的讨论，数列

$$F(x_1), F(x_1'), F(x_2), F(x_2'), \cdots, F(x_n), F(x_n'), \cdots$$

有有限的极限．因而

$$\lim_{n\to+\infty}F(x_n)=\lim_{n\to+\infty}F(x_n'). \qquad \square$$

由此立刻得到

定理 2（Cauchy 收敛原理） 积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $A_0>a$，只要 A'，$A''>A_0$，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

这个定理说明，要想使广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，必须而且只须在充分远的不管多长的区间上的积分值可以任意小．

根据定理 2 容易证明

定理 3 如果积分$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$收敛，那么积分$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛。

证明 由于$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 收敛，故对 $\varepsilon>0$，存在 A_0，当 A', $A''>A_0$ 时，就有 $\int_{A'}^{A''}|f(x)|dx<\varepsilon$，所以

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|\leqslant\int_{A'}^{A''}|f(x)|dx<\varepsilon. \qquad \square$$

仿照无穷级数中的说法，如果积分

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$$

收敛，就说$\int_a^{+\infty}f(x)dx$**绝对收敛**.

定理 3 告诉我们，绝对收敛的积分一定收敛．但反之不然．例如积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

是收敛的（证明见例 5），但积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

却是发散的．事实上，把$[0, +\infty)$分成一串区间：

$$[0, \pi], [\pi, 2\pi], \cdots, [(n-1)\pi, n\pi], \cdots.$$

易知

$$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin x dx=2 \quad (n=1, 2, \cdots),$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}dx$$

$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}|\sin x|dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty.$$

如果积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，而 $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 发散，就称 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ **条件收敛**．积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 就是一个条件收敛的例子．

象无穷级数中的正项级数一样，非负函数的积分有一些便于应用的判别法．

设 $f(x)\geqslant0$，则积分

$$\int_a^A f(x)dx$$

是上限 A 的递增函数，所以

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

存在的充分必要条件是 $\int_a^A f(x)dx$ 有界．这样我们就得到

定理 4 若 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数，则积分

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

收敛的充分必要条件是 $\int_a^A f(x)dx$ 有界 $(a\leqslant A<+\infty)$．

根据这个定理，就能得到类似于级数中的比较判别法．

定理 5 设函数 f 和 φ 都在 $[a,+\infty)$ 上连续，且对充分大的 x 满足不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x),$$

那么 (i) 若 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；

(ii) 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 发散。

证明和级数中的比较判别法一样，留给读者作练习

由于当 $p>1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$ 收敛；$p\leqslant 1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 发散，故经常拿 f 和函数 $\frac{1}{x^p}$ 作比较.

例 1 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx$，$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ 绝对收敛.

例 2 研究积分 $\int_1^{+\infty} x^{100}e^{-x}dx$ 的敛散性.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty} x^{100}e^{-x}x^2=0,$$

故对充分大的 x 有

$$x^{100}e^{-x}\leqslant\frac{1}{x^2},$$

因而上述积分收敛. □

定理 5 的极限形式更便于应用.

定理 6 设 f 和 φ 都是 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数，且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k,$$

那么(i) 若 $0<k<+\infty$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 同敛散；

(ii) 若 $k=0$，则当 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛；

(iii) 若 $k=+\infty$，则当 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也发散.

证明和级数中相应的定理一样，留给读者作练习.

例 3 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^2dx}{x^4-x^2-1}$ 是收敛的. 因为当 $x\to+\infty$ 时，

$$\frac{x^2}{x^4-x^2-1}\sim\frac{1}{x^2}.$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$是收敛的，由定理 6 的(i)即知原积分收敛. □

例 4 研究积分$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$的收敛性.

由于当 $x\to+\infty$时，

$$\frac{\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)^{3/2}}\sim\frac{\pi}{2x^3}.$$

所以原积分收敛. □

以上关于非负函数的判别法都是为绝对收敛的积分设计的，对于一些重要的条件收敛的积分，如

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx,\ \int_0^{+\infty}\sin x^2dx,\ \int_0^{+\infty}\cos x^2dx,$$

它们就无能为力了. 象无穷级数中一样，处理这类问题需要更精细的判别法，如 Dirichlet 和 Abel 的判别法.

在无穷级数中，Dirichlet 和 Abel 判别法是通过 Abel 引理推出来的. 为了导出无穷积分中相应的判别法，我们需要类似于 Abel 引理的结果. 这就是下面的

定理 7(第二积分平均值定理) 若函数 f 在$[a,\ b]$上可积，$g(x)\geqslant0$ 且单调非增，则必存在某一 ξ $(a\leqslant\xi\leqslant b)$，使得

$$\int_a^bf(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx.$$

证明 因为 $f(x)$可积，$g(x)$是非负的非增函数，也是可积的. 所以 $f(x)g(x)$可积. 用分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

分割区间$[a,b]$，于是

$$\int_a^bf(x)g(x)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)g(x)dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}g(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx+\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)[g(x)-g(x_i)]dx. \tag{1}$$

如果用K表示$|f(x)|$在$[a, b]$上的上确界，ω_i表示$g(x)$在小区间$[x_i, x_{i+1}]$上的振幅，那么上式右端第二个和数的绝对值不超过

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)||g(x)-g(x_i)|dx\leqslant K\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i.$$

因为$g(x)$可积，所以

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i=0 \quad (\lambda=\max_i\Delta x_i).$$

这样一来(1)可以写成

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}g(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx, \tag{2}$$

若记$b_i=g(x_i)$，则有

$$b_0\geqslant b_1\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant 0.$$

记$a_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx$，则

$$\sum_{i=0}^{k}a_i=\int_a^{x_{k+1}}f(x)dx.$$

由于函数$F(x)=\int_a^x f(t)dt$是$[a, b]$上的连续函数，其最大、最小值分别记为M, m，于是

$$m\leqslant\sum_{i=0}^{k}a_i\leqslant M \quad (k=0, 1, \cdots, n-1).$$

利用 Abel 引理，(2)右端的和式有估计式:

$$mg(a)\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}g(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x)dx\leqslant Mg(a).$$

命 $\lambda\to0$, 即得

$$mg(a)\leqslant\int_a^b f(x)g(x)dx\leqslant Mg(a).$$

由 $F(t)$ 的连续性, 根据连续函数的介值定理, 存在 ξ $(a\leqslant\xi\leqslant b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx.\qquad \square$$

如果 $g(x)\geqslant0$ 且单调非减, 则可用同样的方法证明: 存在 $\eta(a\leqslant\eta\leqslant b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_\eta^b f(x)dx.$$

如果 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 中有正有负, 这时有

定理 8(推广的第二积分平均值定理) 设 f 在 $[a,b]$ 中可积, g 在 $[a,b]$ 中单调, 则必在 $[a,b]$ 中存在 ξ, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx.\qquad(3)$$

证明 不妨设 g 单调非增, 则对任意 $x\in[a,b]$, 均有 $g(x)\geqslant g(b)$. 命

$$\varphi(x)=g(x)-g(b),$$

则 φ 非负, 且单调非增. 由定理 7 知, 存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=\varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx,$$

即

$$\int_a^b f(x)[g(x)-g(b)]dx=[g(a)-g(b)]\int_a^\xi f(x)dx.$$

由此即得(3).

如果 g 单调非减, 则可命

$$\psi(x)=g(b)-g(x),$$

仍用定理 7 可得(3). □

第二积分平均值公式把两个函数乘积的积分化为一个函数的积分来计算. 下面的 Dirichlet 和 Abel 判别法就是用了这样的方法.

定理 9(Dirichlet 判别法) 如果 f, g 满足下面两个条件:

(i) $F(A)=\int_a^A f(x)dx \quad (a<A<+\infty)$ 有界;

(ii) g 在 $[a,+\infty)$ 中单调, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$;

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

收敛.

证明 应用推广的第二积分平均值定理, 有

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx=g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x)dx+g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x)dx$$

或者

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right|\leqslant|g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)dx\right| + |g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)dx\right| \tag{4}$$

由假定, 存在常数 M, 使得

$$|F(A)|=\left|\int_a^A f(x)dx\right|\leqslant M \quad (a<A<+\infty).$$

因而

$$\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)dx\right|=\left|\int_a^{\xi} f(x)dx-\int_a^{A'} f(x)dx\right|\leqslant 2M,$$

$$\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)dx\right|=\left|\int_a^{A''} f(x)dx-\int_a^{\xi} f(x)dx\right|\leqslant 2M.$$

又因 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 A_0, 当 $A', A''>A_0$ 时, 均

有

$$|g(A')|<\varepsilon, \quad |g(A'')|<\varepsilon.$$

所以，只要 $A', A''>A_0$，由(4)便可推出

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right|\leqslant 4M\varepsilon,$$

因而积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$收敛. □

推论 如果当 $x\to+\infty$时，$g(x)$单调非增趋于 0，那么

$$\int_a^{+\infty} g(x)\sin x dx, \quad \int_a^{+\infty} g(x)\cos x dx$$

收敛.

证明 由于

$$\left|\int_a^A \sin x dx\right| = |\cos A-\cos a|\leqslant 2,$$

$$\left|\int_a^A \cos x dx\right| = |\sin A-\sin a|\leqslant 2.$$

根据 Dirichlet 判别法，上面两个积分收敛. □

例 5 积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$收敛. 这由上面的推论即明. □

例 6 判断积分$\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx$, $\int_0^{+\infty} x\sin x^3 dx$的收敛性.

解 命 $x^2=t$，有

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,$$

故知原积分收敛. 用同样方法可以证明积分$\int_0^{+\infty} x\sin x^3 dx$ 也是收敛的. □

定理 10(Abel 判别法) 如果 f, g 满足下面两个条件:

(i) 积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

(ii) $g(x)$在$[a, +\infty)$上单调有界;

那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

收敛.

证明 因为$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛,故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 A_0, 只要A', $A''>A_0$, 便有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

由于 $g(x)$单调,故推广的第二积分平均值公式成立:

$$\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx=g(A')\int_{A'}^{\xi} f(x)dx+g(A'')\int_{\xi}^{A''} f(x)dx$$

$$(A'\leqslant\xi\leqslant A'').$$

于是由$|g(x)|\leqslant M$即可得

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right|\leqslant|g(A')|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x)dx\right|$$

$$+|g(A'')|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x)dx\right|\leqslant 2M\varepsilon.$$ □

关于无穷积分的收敛判别法就介绍到此. 这部分内容和无穷级数的相应部分是平行的,很多定理几乎是逐字逐句搬过来的.原因很简单,因为无穷积分和无穷级数同样是一个极限过程,只不过无穷积分是函数的极限, 无穷级数是数列的极限罢了. 但是必须注意,二者还是有差别的:数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=0,$$

而无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛时,被积函数当 $x\to+\infty$ 时可以不趋于0,甚至可以是无界的.

例 6 的两个收敛积分

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx,\quad \int_0^{+\infty} x\sin x^3 dx$$

就说明这个问题.

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 如果$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛, 能否断言$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$?

(2) 如果f在$[a,+\infty)$中是非负的连续函数, 从$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛能否断言$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

(3) 设$\int_a^{+\infty}f(x)dx$, $\int_a^{+\infty}g(x)dx$都收敛, 是否能断言$\int_a^{+\infty}f(x)g(x)dx$也收敛?

(4) 从$\int_a^{+\infty}|f|dx$收敛能否断言$\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$收敛? 从$\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$收敛能否断言$\int_a^{+\infty}|f|dx$收敛? 试举例说明.

(5) 把$\int_a^{+\infty}f(x)dx$写成$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n}f(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, 从这级数的收敛是否能断言积分的收敛? 从积分的收敛能否断言级数的收敛? 若$f\geqslant0$, 情况又如何?

(6) 设φ在$[a,+\infty)$中有界, $\int_a^{+\infty}fdx$收敛, 能否断言$\int_a^{+\infty}f\varphi dx$收敛? 若$\int_a^{+\infty}fdx$绝对收敛, 情况又如何?

2. 判断下列无穷积分的收敛性:

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$.

(2) $\int_2^{+\infty}\frac{3x^3-2}{x^5-x^3+1}dx$.

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

(4) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

(5) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

(6) $\int_1^{+\infty}x\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)^p dx$.

(7) $\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$.　　　　(8) $\int_1^{+\infty}\frac{(\ln x)^p}{1+x^2}dx\quad(p>0)$.

3. 证明：若函数 f 在$[a,+\infty)$中非负、连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b\neq0$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx=+\infty$.

4. 证明积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$ 收敛，这里$[x^2]$是 x^2 的整数部分。

5. 设 f 为单调函数，且 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，证明当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$.

6. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 中是正的单调非增的函数，那么$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty}f(x)\sin^2 x dx$ 同敛散。由此证明积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx,\quad \int_2^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x\ln x}dx$$

发散.

7. 下列积分是绝对收敛还是条件收敛？

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(1-2x)}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{x^2+1}}$.　　　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx$.

(3) $\int_2^{+\infty}\frac{\sin x}{x\ln x}dx$.

8. 设 f,g 在$[a,b]$上连续，g 在(a,b)内可微，而且 $g'(x)\geqslant0\ (a<x<b)$，试用分部积分法证明第二积分平均值公式.

9. 证明积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^a+\sin x}dx\qquad\left(0<a\leqslant\frac{1}{2}\right)$$

发散.

提示：利用等式

$$\frac{\sin x}{x^a+\sin x}=\frac{\sin x}{x^a}-\frac{\sin^2 x}{x^a(x^a+\sin x)}$$

及习题 6 的结果.

本题说明在 Dirichlet 判别法中，“$g(x)$ 单调趋于 0 ”这一条件中的“单调性”是不能去掉的.

10. 试作函数 f，它在$[a,+\infty)$中非负、连续、而且无界，但 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$收

敛. 例如研究积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^{a}\sin^{2}x}\quad (a>4).$$

§2.2 瑕积分的收敛判别法

现在讨论另一种广义积分——瑕积分. 我们知道, 如果函数 f 定义在区间 $(a, b]$ 上, 而当 $x\to a$ 时, $f(x)$ 无界, 则称 a 是 f 的瑕点. 这时 f 在 $(a, b]$ 上按 Riemann 积分的意义是不可积的. 但若对任意 $\varepsilon>0$, f 在 $[a+\varepsilon, b]$ 上可积, 而且

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

有有限的极限, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 收敛, 并把上面的极限定义为瑕积分的值. 在第三章第三节中我们已经看到不少瑕积分的例子.

对于给定的瑕积分, 如何判断它的敛散性呢? 先看一个简单的例子. 为了研究积分 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 的收敛性, 作变换 $\frac{1}{\sqrt{x}}=y$, 即得

$$\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int_{1}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}\frac{dy}{y^{2}}$$

这样就把判断瑕积分 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 收敛的问题归结为判断无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{dy}{y^2}$ 的收敛问题.

一般来说, 如果 a 是 f 的瑕点, 作变换 $x=a+\frac{1}{y}$, 那么

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{b-a}} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^{2}}\,dy=\int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(a+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^{2}}\,dy.$$

这就是说，通过上面的变换，每一个瑕积分一定可以化成一个无穷积分．因此，前面写的判断无穷积分敛散的一些方法，都可以平行地对瑕积分建立起来．这里我们不再重复这些定理的证明，而只是把结果写下来，读者不难补出这些定理的证明．

为一致起见，下面的定理中都假定积分下限 a 是瑕点．

定理 1（Cauchy 收敛原理） 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充分必要条件是，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $0<\delta'<\delta$，$0<\delta''<\delta$，就有

$$\left|\int_{a+\delta'}^{a+\delta''} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

定理 2 如果积分 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛，那么积分 $\int_a^b f(x)dx$ 也收敛．

定理 3 如果对于充分接近 a 的 $x(>a)$ 有不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant\varphi(x),$$

那么(i) 若 $\int_a^b\varphi(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

(ii) 若 $\int_a^b f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^b\varphi(x)dx$ 发散．

定理 4 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是 $(a,b]$ 上的非负连续函数，且

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=k,$$

那么(i) 若 $0<k<+\infty$，则 $\int_a^b f(x)dx$ 和 $\int_a^b\varphi(x)dx$ 同时敛散；

(ii) 若 $k=0$，则当 $\int_a^b\varphi(x)dx$ 收敛时，$\int_a^b f(x)dx$ 收敛；

(iii) 若 $k=+\infty$，则当 $\int_a^b\varphi(x)dx$ 发散时，$\int_a^b f(x)dx$ 发散．

例 1 研究积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{1-x^2}dx$ 的收敛性．

解 看上去似乎 $x=0$，$x=1$ 都是瑕点，但实际上，由于

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x^2}=-\frac{1}{2},$$

被积函数在 $x=1$ 附近是有界的，因此 $x=1$ 并非瑕点。

考虑点 $x=0$ 附近的情况．对于充分小的 x，恒有 $1-x^2\geqslant\frac{1}{2}$，所以

$$\left|\frac{\ln x}{1-x^2}\right|\leqslant 2\left|\ln x\right|,$$

而积分 $\int_0^1|\ln x|dx=-\int_0^1\ln x dx$ 是收敛的，因此原积分收敛． □

例 2 研究积分 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}}$ 的收敛性．

解 $x=1$ 是瑕点．当 $x\to 1$ 时

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}\frac{1}{\sqrt[4]{(1+x)(1+x^2)}}\sim\frac{1}{\sqrt[4]{4}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}},$$

所以原积分收敛． □

例 3 研究积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ 的收敛性．

解 当 $p<1$ 时，$x=0$ 是瑕点；$q<1$ 时，$x=1$ 是瑕点．为了分别考虑函数在这两点附近的情况，把积分拆成两部分：

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$$
$$=\int_0^a x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx+\int_a^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx\quad(0<a<1).$$

当 $x\to 0$ 时，

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim x^{p-1},$$

故当 $1-p<1$ 或 $p>0$ 时，第一个积分收敛．当 $x\to 1$ 时，

$$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim(1-x)^{q-1},$$

故当 $1-q<1$ 或 $q>0$ 时，第二个积分收敛．因此原积分在 $p>0$，$q>0$ 时收敛． □

例 4 研究积分$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$的收敛性.

解 当 $p<1$ 时, $x=0$ 是瑕点, 但它又是无穷积分. 和刚才一样, 把它拆成两部分来考虑:

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx + \int_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx.$$

当 $x\to 0$ 时,

$$x^{p-1}e^{-x}\sim x^{p-1},$$

所以第一个积分当 $p>0$ 时收敛. 当 $x\to+\infty$时,

$$x^2\cdot x^{p-1}e^{-x}\to 0,$$

故对充分大的 x, 恒有

$$x^{p-1}e^{-x}<\frac{1}{x^2},$$

所以第二个积分不论 p 为何值时都收敛. 因而原积分当 $p>0$ 时收敛. □

例 5 研究积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^\beta}dx$ $(\beta\geqslant 0)$的收敛性.

解 拆成两部分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^\beta}dx=\int_0^1\frac{x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^\beta}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^\beta}dx,$$

当 $x\to 0$ 时,

$$\frac{x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^\beta}\sim\frac{1}{2}x^{\alpha+1},$$

故当$-\alpha-1<1$, 或 $\alpha>-2$ 时, 第一个积分收敛; 当 $x\to+\infty$时,

$$\frac{x^\alpha \operatorname{arc\,tg} x}{2+x^\beta}\sim\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{x^{\beta-\alpha}},$$

故当 $\beta-\alpha>1$ 时, 第二个积分收敛. 所以原积分当 $\alpha>-2$ 且 $\beta-\alpha>1$ 时收敛. □

最后, 提一下广义积分主值的概念.

按照前面的定义，无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$收敛，是指当$A, A'$独立地趋于$+\infty$时，$\int_{-A}^{A'}f(x)dx$的极限存在。但对某些函数$f$来说，这样的极限并不存在，而当$A=A'$时，$\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$都是存在的。例如积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx$$

就是这种情形。

如果极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$$

存在，称这极限为无穷积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$的 Cauchy **主值**，记为

$$\text{V. P.}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx.$$

例如

$$\text{V. P.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}\frac{x}{1+x^2}dx=0.$$

对于瑕积分同样可以定义 Cauchy 主值的概念。

设c是f在区间$[a, b]$中唯一的瑕点，定义

$$\text{V. P.}\int_{a}^{b}f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{a}^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx\right].$$

例如$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}$是发散的，但它的 Cauchy 主值存在：

$$\text{V. P.}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x}+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}\right]=0.$$

容易知道，如果一个无穷积分或瑕积分是收敛的，那么它的 Cauchy 主值一定存在，但反之不然。

习 题

1. 判断下列广义积分的收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$ $(n\geqslant 0)$.　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx$.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}$.　　(4) $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}dx$.

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$.　　(6) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q}$.

2. 判断下列广义积分的绝对收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)dx$ $(q\neq 0)$.　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{1+x^q}dx$ $(q\geqslant 0)$.

3. 设函数 f 在 $(0,1)$ 内单调, 且在点 $x=0$ 和 $x=1$ 的邻域内不必有界. 如果 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx.$$

4. 利用上题结果证明, 对任意 $\alpha>0$ 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^\alpha}=\frac{1}{\alpha}.$$

5. 习题 3 之逆是否成立? 即若 f 在 $(0,1)$ 内单调, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$ 存在, 是否能保证 $\int_0^1 f(x)dx$ 收敛? 请看例子

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}.$$

6. (1) 设 f 在 $[0,+\infty)$ 中连续, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)$ 存在, 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}\quad(a>0,\ b>0).$$

(2) 设 f 在 $[0,+\infty)$ 中连续, $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛, 证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(a>0,\ b>0).$$

(3) 设 f 在 $(0,+\infty)$ 中连续，$f(+\infty)$ 存在，$\int_0^1 \frac{f(x)}{x}dx$ 收敛，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(+\infty)\ln\frac{a}{b}\quad (a>0,b>0).$$

7. 利用上述结果计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx\quad (a>0,b>0)$.

(2) $\int_0^{+\infty}\ln\frac{1-2e^{-ax}}{1-2e^{-bx}}\frac{dx}{x}\quad (a>0,b>0)$.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos 3x}{x}dx$.

第三节 含参变量的广义积分

§3.1 一致收敛

设函数 $f(x,u)$ 在 $x\geqslant a$, $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 中连续. 如果对 $[\alpha,\beta]$ 中的任意 u，广义积分

$$\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$$

都收敛，它就确定了 $[\alpha,\beta]$ 上的一个函数

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx, \tag{1}$$

我们要研究 φ 的连续、可微等分析性质.

前面已经看到，在讨论由函数项级数所确定的函数的分析性质时，级数一致收敛的概念起了关键的作用. 对 (1) 型的积分来说，类似的概念也起着同样重要的作用.

所谓积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ **收敛**，是指对于每个固定的 u，这个广义积分收敛. 即对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 A_0，当 $A>A_0$ 时，不等式

$$\left|\int_a^A f(x,u)dx-\int_a^{+\infty}f(x,u)dx\right|=\left|\int_A^{+\infty}f(x,u)dx\right|<\varepsilon$$

成立. 这里的 A_0 既与 ε 有关，也与参变量 u 有关.

定义 1 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 总能找到仅与 ε 有关的 $A_0(>a)$, 当 $A>A_0$ 时, 不等式

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x, u)\, dx\right| < \varepsilon$$

对 $[\alpha, \beta]$ 上所有的 u 成立, 就说广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u)\, dx$ 关于 u 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上**一致收敛**. 这里的 $[\alpha, \beta]$ 可以换成开区间或无穷区间.

对于瑕积分, 也有类似的定义.

定义 2 设 a 是瑕点. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在仅与 ε 有关的 $\delta_0>0$, 当 $0<\delta<\delta_0$ 时, 不等式

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x, u)\, dx\right| < \varepsilon$$

对 $[\alpha, \beta]$ 上所有的 u 成立, 就称积分 $\int_a^b f(x, u)\, dx$ 关于 u 在 $[\alpha, \beta]$ 上**一致收敛**.

例 1 考虑广义积分

$$\int_0^{+\infty} u e^{-xu} dx,$$

显然它对每一个 $u\geqslant 0$ 都收敛, 而且在 $[\delta, +\infty)$ $(\delta>0)$ 中一致收敛. 事实上, 对任意 $\varepsilon>0$, 只要取 $A_0=\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\delta}$, 当 $A>A_0$ 时, 便有

$$\int_A^{+\infty} u e^{-xu} dx = e^{-uA} < \varepsilon \quad (\delta\leqslant u<+\infty).$$

但在 $[0, +\infty)$ 中, 积分非一致收敛, 因为不论 A 多么大, 总有

$$\int_A^{+\infty} u e^{-xu} dx = e^{-uA} \to 1 \quad (\text{当 } u\to 0 \text{ 时}). \qquad \square$$

和广义积分的收敛判别法一样, 这里也有一系列和无穷级数类似的一致收敛判别法. 下面我们只对无穷积分来讨论这些判别法, 对于瑕积分也有类似的结果, 就不再一一说明了.

定理 1 积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在区间$[\alpha,\beta]$上一致收敛的充分必要条件是，对任意 $\varepsilon>0$，总存在一个仅与 ε 有关的 A_0，使得当 $A', A''>A_0$ 时，不等式

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)dx\right|<\varepsilon$$

对$[\alpha,\beta]$中所有的 u 都成立。

证明和第九章 §2.1 的定理 2 相仿，留给读者作练习。从定理 1 可得

定理 2 (Weierstrass 判别法) 设 $f(x,u)$ 当 $x\geqslant a$ 时对 x 连续。如果存在这样一个连续函数 $F(x)$，使得对于一切充分大的 x 以及$[\alpha,\beta]$中的一切 u，都有

$$|f(x,u)|\leqslant F(x),$$

又如果$\int_a^{+\infty} F(x)dx$收敛，那么积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在区间$[\alpha,\beta]$上一致收敛。

证明 因为$\int_a^{+\infty} F(x)dx$ 收敛，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 A_0，只要 $A', A''>A_0$，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''} F(x)dx\right|<\varepsilon$$

由此便知

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)dx\right|\leqslant\int_{A'}^{A''}|f(x,u)|dx\leqslant\int_{A'}^{A''}F(x)dx<\varepsilon,$$

因而$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛。 □

例 2 因为

$$\left|\frac{\sin ux}{x^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2},$$

所以积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin ux}{x^2}dx$ 在$(-\infty,+\infty)$中一致收敛。 □

例 3 积分$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ux}{1+x^2}dx$ 在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛. 这由不等式

$$\left|\frac{\cos ux}{1+x^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2}\quad(-\infty<u<+\infty)$$

自明. □

更细致的判别法有

定理 3 (Dirichlet 判别法) 如果 $f(x,u)$, $g(x,u)$满足下面两个条件:

(i) 当 $A\to+\infty$时, 积分$\int_a^A f(x,u)\,dx$ 对 $u\in[\alpha,\beta]$一致有界;

(ii) $g(x,u)$ 是 x 的单调函数, 且当 $x\to+\infty$时关于 u 一致地趋于 0;

那么积分$\int_a^{+\infty}f(x,u)g(x,u)\,dx$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

定理 4 (Abel 判别法) 如果 $f(x,u)$, $g(x,u)$ 满足下面两个条件:

(i) 积分 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\,dx$ 关于 $u\in[\alpha,\beta]$一致收敛;

(ii) $g(x,u)$对 x 单调, 且关于 u 一致有界;

那么积分$\int_a^{-\infty}f(x,u)g(x,u)\,dx$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

我们只给出定理 3 的证明, 定理 4 的证明留给读者作练习.

由条件(i), 对任意 A', $A''>a$ 及一切 $u\in[\alpha,\beta]$均有

$$\left|\int_{A'}^{A''}f(x,u)\,dx\right|\leqslant\left|\int_a^{A'}f(x,u)\,dx\right|+\left|\int_a^{A''}f(x,u)\,dx\right|\leqslant 2M.$$

由条件(ii)知, 对任意 $\varepsilon>0$, 总存在 $A_0>a$, 只要 $x>A_0$, 便有

$$|g(x,u)|<\varepsilon$$

对一切 $u\in[\alpha,\beta]$ 成立. 于是根据第二积分平均值定理, 只要 A', $A''>A_0$, 便有

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)g(x,u)\,dx\right| \\
&\qquad \leqslant |g(A',u)|\left|\int_{A'}^{\xi} f(x,u)\,dx\right| + |g(A'',u)|\left|\int_{\xi}^{A''} f(x,u)\,dx\right| \\
&\qquad \leqslant 2M\varepsilon + 2M\varepsilon = 4M\varepsilon
\end{aligned}
$$

由定理 1 便知积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)\,dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. □

在实际情况中, 碰得较多的是 f, g 两个因子中只有一个包含参变数 u, 这时定理 3, 4 叙述起来就可简单一些. 例如 Abel 判别法就可写成:

如果积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛, 函数 $g(x,u)$ 对 x 单调, 且关于 $u\in[\alpha,\beta]$ 一致有界. 那么积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x,u)\,dx$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

例 4 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xu}\frac{\sin x}{x}\,dx$ 对 $u\geqslant 0$ 是一致收敛的. 事实上, 因为积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ 收敛, 而函数 e^{-ux} 对于 x 单调非增, 且 $e^{-ux}\leqslant 1$ $(0\leqslant x<+\infty,\ 0\leqslant u<+\infty)$, 故由 Abel 判别法知, 该积分关于 u 在 $[0,+\infty)$ 中一致收敛. □

例 5 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin bx}{a^2+x^2}\,dx$ $(a,b>0)$ 对 $b\geqslant b_0>0$ 一致收敛. 这是因为一方面对任意 A, 均有

$$\left|\int_0^A \sin bx\,dx\right| = \frac{1-\cos bA}{b} \leqslant \frac{2}{b_0}.$$

另一方面，当 $x\to+\infty$ 时，函数 $\frac{x}{a^2+x^2}$ 单调非增趋于 0. 故由 Dirichlet 判别法知该积分在所述的区间中一致收敛. □

作为一致收敛概念的一个应用，我们给出级数在无穷区间上可以逐项积分的条件.

定理 5 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上收敛于和 $S(x)$. 如果

(i) 对任意 $A>a$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,A]$ 中一致收敛；

(ii) 积分 $\int_a^{+\infty}S_n(x)dx$ 对 n 一致收敛，其中 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$；

那么积分 $\int_a^{+\infty}S(x)dx$ 收敛，而且

$$\int_a^{+\infty}S(x)dx=\int_a^{+\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right]dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^{+\infty}u_n(x)dx. \tag{2}$$

证明 由假定(ii)，对任意 $\varepsilon>0$，只要 A'，A'' 充分大，便有

$$\left|\int_{A'}^{A''}S_n(x)dx\right|<\varepsilon$$

对 $n=1,2,\cdots$ 成立. 于是由(i)知，只要取充分大的 n，即得

$$\left|\int_{A'}^{A''}S(x)dx\right|\leqslant\int_{A'}^{A''}\left|S(x)-S_n(x)\right|dx+\left|\int_{A'}^{A''}S_n(x)dx\right|<2\varepsilon,$$

因而积分 $\int_a^{+\infty}S(x)dx$ 收敛. 于是存在 A_0，使得

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty}S(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3},\quad\left|\int_{A_0}^{+\infty}S_n(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由(i)知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,A_0]$ 中一致收敛，故对 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，不等式

$$\left|S_n(x)-S(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3(A_0-a)}$$

对$[a, A_0]$中所有x成立. 因而当$n>N$时,

$$\left|\int_a^{+\infty} S_n(x)dx - \int_a^{+\infty} S(x)dx\right|$$

$$\leqslant \int_a^{A_0} |S_n(x)-S(x)|dx + \left|\int_{A_0}^{+\infty} S_n(x)dx\right| + \left|\int_{A_0}^{+\infty} S(x)dx\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

这就证明了

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^{+\infty} S_n(x)dx = \int_a^{+\infty} S(x)dx,$$

这就是要证明的(2). □

应用级数中的 Dini 定理, 对于非负项的函数项级数, 这定理可以叙述得更简洁些.

定理 6 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, +\infty)$上收敛于$S(x)$, 如果

(i) $u_n(x)$在$[a, +\infty)$上连续且非负;

(ii) $S(x)$在$[a, +\infty)$上连续;

(iii) $\int_a^{+\infty} S(x)dx$收敛;

那么(2)成立.

证明 只须验证定理5的条件都满足就行了. 由条件(i), (ii), 根据 Dini 定理(第八章 § 2.3 定理 2), 级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a, A]$上一致收敛. 这里$A$是大于$a$的任意实数. 因为$u_n(x)\geqslant 0$, 所以

$$0\leqslant S_n(x)\leqslant S(x) \quad (n=1, 2, \cdots),$$

而$\int_a^{+\infty} S(x)dx$收敛, 故从 Weierstrass 判别法知, 积分$\int_a^{+\infty} S_n(x)dx$对$n=1, 2, \cdots$一致收敛. 定理 5 的两个条件满足, 因而 (2) 成立. □

例 6 计算积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

解 根据极限

$$e^{-x^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n},$$

可将上面的积分写成

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

我们先证明极限号和积分号可交换. 事实上, 命

$$u_1(x) = (1+x^2)^{-1},$$

$$u_n(x) = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} - \left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-(n-1)} (n=2, 3, \cdots),$$

则有

$$e^{-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

显然 $u_n(x)(n=2, 3, \cdots)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且保持定号, e^{-x^2} 连续且可积, 故由定理 6 知积分号和极限号可以交换. 于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}.$$

对右端的积分作变量代换 $x=\sqrt{n}\,t$, 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \sqrt{n}\,\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

根据 Wallis 公式(第八章 § 1.8 例 3)

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

所以

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad \square$$

这个积分在概率论里要用到.

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 设含参变量积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$对$[\alpha,\beta]$上的$u$都收敛，如何用分析的语言叙述它在$[\alpha,\beta]$上不一致收敛?

(2) 若积分$\int_a^{+\infty}|f(x,u)|dx$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛，是否一定能找到$\varphi$，使得$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx<+\infty$，而且

$$|f(x,u)|\leqslant\varphi(x)$$

对所有$u\in[\alpha,\beta]$及$x\in[a,+\infty)$都成立?

2. 研究下列积分在指定区间上的一致收敛性:

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx \quad (0<\alpha_0\leqslant\alpha<+\infty)$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos ux}{1+x^4}dx \quad (-\infty<u<+\infty)$.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+(x+u)^2} \quad (0\leqslant u<+\infty)$.

(4) $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx \quad (0\leqslant\alpha<+\infty)$.

(5) $\int_0^{+\infty}\sqrt{\alpha}\, e^{-\alpha x^2}dx \quad (0\leqslant\alpha<+\infty)$.

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^p}dx \quad (p\geqslant 0)$.

3. 证明积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx$在任何不包含$\alpha=0$的闭区间$[a,b]$上一致收敛；在包含$\alpha=0$的闭区间$[a,b]$上非一致收敛.

4. 证明积分$\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$在任何区间$0<a\leqslant\alpha\leqslant b$中一致收敛；在$0\leqslant\alpha\leqslant b$内非一致收敛.

§ 3.2 含参变量广义积分的性质

设含参变量的广义积分$\int_a^{+\infty} f(x, u)\,dx$ 对 $[\alpha, \beta]$ 上每个 u 都收敛，我们要研究由它所确定的函数

$$\varphi(u) = \int_a^{+\infty} f(x, u)\,dx \tag{1}$$

的性质。

与连续函数的级数的一致收敛性保证了级数和的连续性一样，积分(1)的一致收敛性保证了 φ 的连续性。

定理 1 如果函数 $f(x, u)$ 在 $a \leqslant x < +\infty$，$\alpha \leqslant u \leqslant \beta$ 中连续，而且积分$\int_a^{+\infty} f(x, u)\,dx$ 在$[\alpha, \beta]$上一致收敛，那么由(1)所确定的函数 φ 在$[\alpha, \beta]$上连续。

证明 由于$\int_a^{+\infty} f(x, u)\,dx$ 在$[\alpha, \beta]$上一致收敛，故对任意$\varepsilon > 0$，存在 $A_0 > a$，当 $A > A_0$时，不等式

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x, u)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

对$[\alpha, \beta]$上所有的 u 成立。今在$[\alpha, \beta]$中任取一点 u_0，我们有

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(u_0)| &= \left|\int_a^{+\infty} f(x, u)\,dx - \int_a^{+\infty} f(x, u_0)\,dx\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^A f(x, u)\,dx - \int_a^A f(x, u_0)\,dx\right| \\ &\quad + \left|\int_A^{+\infty} f(x, u)\,dx\right| + \left|\int_A^{+\infty} f(x, u_0)\,dx\right|. \end{aligned} \tag{2}$$

由第一节的定理 1 知道，$\int_a^A f(x, u)\,dx$ 是$[\alpha, \beta]$上的连续函数，故对 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $|u - u_0| < \delta$ 时，有

$$\left|\int_a^A f(x, u)\,dx - \int_a^A f(x, u_0)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

(2)的第二、第三个积分都小于$\frac{\varepsilon}{3}$. 因而只要$|u-u_0|<\delta$，从(2)可得

$$|\varphi(u)-\varphi(u_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon. \qquad \square$$

这个定理也可写成

$$\lim_{u\to u_0}\int_a^{+\infty}f(x,u)\,dx=\int_a^{+\infty}f(x,u_0)\,dx=\int_a^{+\infty}\left(\lim_{u\to u_0}f(x,u)\right)dx,$$

即在定理1的条件下，极限号与积分号可以交换.

与级数的情形一样，积分$\int_a^{+\infty}f(x,u)\,du$的一致收敛只是保证$\varphi(u)$连续的一个充分条件，并不必要. 但在$f(x,u)$非负的条件下，积分的一致收敛性便是$\varphi(u)$连续的必要条件. 我们有下面的

定理2 如果$f(x,u)$在$a\leqslant x<+\infty$, $\alpha\leqslant u\leqslant\beta$上连续，且非负，那么从$\varphi(u)$在$[\alpha,\beta]$上的连续性可以推出积分$\int_a^{+\infty}f(x,u)\,dx$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

证明 $\varphi(u)$可以看成一个函数项级数的和:

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n}f(x,u)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(u),$$

其中

$$a_n(u)=\int_{a+n-1}^{a+n}f(x,u)\,dx\quad(n=1,2,\cdots).$$

根据$f(x,u)$连续和非负的假定，知道$a_n(u)$在$[\alpha,\beta]$上也是连续而且非负的. 又因$\varphi(u)$连续，所以由Dini定理知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(u)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛. 因而对任意$\varepsilon>0$, 存在$N$，使得不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{N}a_n(u)-\varphi(u)\right|=\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n(u)<\varepsilon$$

对$[\alpha,\beta]$中所有u成立。今取$A_0=a+N$，则当$A>A_0$时，由于$f(x,u)$非负，所以

$$\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx \leqslant \int_{A_0}^{+\infty} f(x,u)\,dx$$

$$=\sum_{n=N+1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\,dx=\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(u)<\varepsilon.$$

这就证明了定理2。 □

关于$\varphi(u)$的积分，我们有

定理3 在定理1的同样条件下，

$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)\,du=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx\right]du$$

$$=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)\,du\right]dx.$$

证明 和证明定理2的方法一样，把$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$表示成一级数：

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(u),$$

其中$a_n(u)=\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\,dx$。由于$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,dx$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛，故对$\varepsilon>0$，存在$A_0>a$，只要$A>A_0$，便有$\left|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|<\varepsilon$。今取$m>A_0-a$，即$a+m>A_0$，于是有

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n(u)\right|$$

$$=\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)\,dx\right|=\left|\int_{a+m}^{+\infty} f(x,u)\,dx\right|<\varepsilon,$$

即级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(u)$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛。根据第八章§2.3的定理3

和第一节定理 2 即得

$$\int_\alpha^\beta\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right]du=\int_\alpha^\beta\sum_{n=1}^{\infty}a_n(u)du$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta a_n(u)du=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\alpha^\beta\left[\int_{a+n-1}^{a+n} f(x,u)dx\right]du$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a+n-1}^{a+n}\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx=\lim_{N\to+\infty}\int_a^{a+N}\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx.$$

现在证明积分

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx$$

收敛. 事实上, 由于$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛, 故对任意 $\varepsilon>0$, 存在 A'_0, 当$A', A''>A'_0$ 时,

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)dx\right|<\frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$$

对$[\alpha,\beta]$中所有的 u 成立. 于是

$$\left|\int_{A'}^{A''}\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx\right|=\left|\int_\alpha^\beta\left[\int_{A'}^{A''} f(x,u)dx\right]du\right|$$

$$\leqslant\int_\alpha^\beta\left|\int_{A'}^{A''} f(x,u)dx\right|du<\varepsilon.$$

因而得

$$\int_\alpha^\beta\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right]du=\lim_{N\to+\infty}\int_a^{a+N}\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx$$

$$=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx. \qquad \square$$

定理 3 告诉我们, 在所设的条件下, 对 x 和 u 进行积分的次序可以交换, 但这里关于 u 的积分区间$[\alpha,\beta]$ 是有限的. 而在很多问题中, 往往需要知道两个无穷区间的积分次序是否可以交换. 也

就是说,在什么条件下,有等式

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)du\right]dx=\int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right]du.$$

定理 4 如果 $f(x,u)$ 满足下列条件:

(i) $f(x,u)$ 在 $a\leqslant x<+\infty,\alpha\leqslant u<+\infty$ 上连续;

(ii) 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx,\ \int_\alpha^{+\infty} f(x,u)du$$

分别关于 u 在任何 $[\alpha,\beta]$ 上,关于 x 在任何 $[a,b]$ 上一致收敛;

(iii) 积分

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|du\right]dx,\ \int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}|f(x,u)|dx\right]du$$

中至少有一个存在;

那么积分

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)du\right]dx,\ \int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right]du$$

都存在,而且相等. 即

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)du\right]dx=\int_\alpha^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right]du. \tag{3}$$

证明 为确定起见,不妨假定

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty}|f(x,u)|du\right]dx$$

存在. 要证明的便是

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^{\beta}\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right]du=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{+\infty} f(x,u)du\right]dx.$$

由于 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 关于 u 在 $[\alpha,\beta]$ 中一致收敛,因而

$$\int_\alpha^{\beta}\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right]du=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^{\beta} f(x,u)du\right]dx,$$

这样一来，要证明的变成

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{\beta}f(x,u)\,du\right]dx=\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}f(x,u)\,du\right]dx$$

也即

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\,du\right]dx=0. \tag{4}$$

由于积分

$$\int_a^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\,du\right]dx$$

收敛，故存在 $b>a$，使得

$$\int_b^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\,du\right]dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\left|\int_b^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\,du\right]dx\right|\\&\qquad\leqslant\int_b^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty}|f(x,u)|\,du\right]dx\leqslant\int_b^{+\infty}\left[\int_a^{+\infty}|f(x,u)|\,du\right]dx<\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned} \tag{5}$$

把(4)式左端的积分拆成两部分：

$$\begin{aligned}&\int_a^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\,du\right]dx\\&\qquad=\int_a^{b}\left[\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\,du\right]dx+\int_b^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\,du\right]dx.\end{aligned}$$

由于 $\int_a^{+\infty}f(x,u)\,du$ 关于 x 在 $[a,b]$ 中一致收敛，故必存在 β_0，当 $\beta>\beta_0$ 时，不等式

$$\left|\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\,du\right|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

对 $[a,b]$ 中所有 x 成立。由此得

$$\left|\int_a^{b}\left[\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\,du\right]dx\right|\leqslant\int_a^{b}\left|\int_\beta^{+\infty}f(x,u)\,du\right|dx<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

把(5),(6)两式加起来,就得

$$\left|\int_a^{+\infty}\left[\int_\beta^{+\infty}f(x,u)du\right]dx\right|<\varepsilon\quad(\beta>\beta_0).$$

这就证明了(4)成立. □

在 $f\geqslant 0$ 的情况下,利用关于广义积分的 Dini 定理,从定理 4 可得

定理 5 如果 f 满足下列条件:

(i) f 在 $a\leqslant x<+\infty, \alpha\leqslant u<+\infty$ 上连续且非负;

(ii) 函数

$$\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx,\quad \psi(x)=\int_\alpha^{+\infty}f(x,u)du$$

分别在 $\alpha\leqslant u<+\infty, a\leqslant x<+\infty$ 上连续;

(iii) 积分

$$\int_\alpha^{+\infty}\varphi(u)du,\qquad \int_a^{+\infty}\psi(x)dx$$

中有一个收敛;

那么(iii)中另一个积分也收敛,而且二者相等, 即等式(3)成立.

最后来研究函数 φ 的求导问题.

定理 6 如果函数 f 满足下列条件:

(i) f 和 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 在 $a\leqslant x<+\infty, \alpha\leqslant u\leqslant\beta$ 上连续;

(ii) $\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 对 $[\alpha,\beta]$ 中任何 u 收敛;

(iii) $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛;

那么 $\varphi(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可微,而且

$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx\quad(\alpha\leqslant u\leqslant\beta).$$

证明 利用级数中相应的定理来证明. 因为

$$\varphi(u)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(u),$$

这里 $a_n(u)=\int_{a+n-1}^{a+n}f(x,u)dx$. 由(i)可得

$$a_n'(u)=\int_{a+n-1}^{a+n}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx\quad(\alpha\leqslant u\leqslant\beta),\tag{7}$$

而且 $a_n'(u)$ 是$[\alpha,\beta]$上的连续函数. 由(7),

$$\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(u).$$

由(iii)知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n'(u)$ 在$[\alpha,\beta]$上一致收敛. 这样,关于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(u)$ 可以逐项微分的条件都已满足,因而有

$$\varphi'(u)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx.\qquad\square$$

上面这些结果都是对无穷积分来讨论的，对瑕积分这些结果也都成立，这里就不再叙述了.

习　题

1. 回答下列问题:

(1) 在定理 2 中,若把有界闭区间$[\alpha,\beta]$改成开区间或无穷区间, 结论是否成立? 举例说明.

(2) 在定理 1 和定理 6 中,能否把有界闭区间$[\alpha,\beta]$改成开区间或无穷区间?

2. 研究下列函数在指定区间上的连续性:

(1) $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{2+t^x}dt\quad(x>2)$

(2) $\varphi(\alpha)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^{\alpha}(\pi-x)^{\alpha}}dx\quad(0<\alpha<2)$.

(3) $\psi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-x\alpha^2}dx \quad (-\infty<\alpha<+\infty)$.

3. 利用公式$\int_0^1 x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha} \quad (\alpha>0)$计算积分

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(\ln x)^m dx \quad (m\text{ 为自然数}).$$

4. 利用公式$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a>0)$计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} \quad (n\text{ 为自然数}).$$

5. 利用对参数的微分，计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\right)^2 dx \quad (\alpha>0, \beta>0)$.

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx \quad (\alpha>0, \beta>0)$.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2-x^2}dx$.

§3.3 几个重要的广义积分

若干重要的广义积分的值都可应用参变量积分的理论计算出来。下面通过一些例子说明计算的方法。

例 1 计算积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

解 为了计算这个积分，我们引入收敛因子$e^{-\alpha x}$，考虑参变量积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx. \tag{1}$$

§3.1 的例 4 已经证明这个积分对$\alpha\geqslant 0$是一致收敛的，被积函数在$0\leqslant\alpha<+\infty, 0\leqslant x<+\infty$中是连续的，因而$I(\alpha)$在$[0, +\infty)$中连续，于是

$$\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$

这样一来，问题就化为计算极限$\lim\limits_{\alpha\to 0} I(\alpha)$. 为此先算出 $I(\alpha)$ 的表达式. 微分(1)的两端得

$$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx. \tag{2}$$

由于当 $\alpha\geqslant\delta>0$ 时,

$$|e^{-\alpha x}\sin x|\leqslant e^{-\delta x}.$$

所以(2)式右端的积分在 $\alpha\geqslant\delta$ (δ 是任一正数)中一致收敛, 故由§3.2定理 6 知(2)在 $\alpha>0$ 中成立. 利用(2)可得

$$I'(\alpha)=-\frac{1}{1+\alpha^2} \quad (\alpha>0),$$

由此得

$$I(\alpha)=-\operatorname{arc\,tg}\alpha+C.$$

由于

$$|I(\alpha)|=\left|\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha},$$

故当 $\alpha\to+\infty$ 时, $I(\alpha)\to 0$, 由此得 $C=\frac{\pi}{2}$. 所以

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\alpha \quad (\alpha>0),$$

从而得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

顺便指出, 如果对积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx$ 作变换 $x=\frac{t}{|a|}(a\neq 0)$, 则可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -\frac{\pi}{2}, & a<0.\end{cases}$$

例2 计算 Fresnel 积分

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx,\ \int_0^{+\infty}\cos x^2dx.$$

解 命 $x^2=t$, 有

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt. \tag{3}$$

利用$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$这一事实, 可得

$$\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}du. \tag{4}$$

把它代入(3), 并交换积分次序, 便有

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin x^2dx&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,du\right]dt\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,dt\right]du.\\&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

积分值虽然算出来了, 但要证明交换积分次序的合法性却并不容易. 我们采用例 1 的办法, 在(3)中引入收敛因子 $e^{-\alpha t}(\alpha>0)$, 考虑积分

$$\int_0^{+}e^{-\alpha t}\,\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

把(4)代入, 并交换积分次序, 得

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,du\right]dt\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,dt\right]du\\&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(\alpha-u^2)^2}\quad(\alpha>0).\end{aligned} \tag{5}$$

因为积分$\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,dt$ 关于 u 在$[0, +\infty)$中一致收敛; 积分

$\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,du$ 关于 t 在$[0, +\infty)$中一致收敛，而且积分

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha)}|\sin t|\,dt\right]du$$

存在，故由上节定理 4 知，交换积分次序是允许的．又因为积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt,\quad \int_0^{+\infty}\frac{du}{1+(\alpha+u^2)^2}$$

关于 α 都在$[0, +\infty)$中一致收敛，故能在积分号下取极限 $\alpha\to 0$．于是得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{1+u^4}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

同样可得

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2 dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\qquad \square$$

例 3 计算积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx$．

解 把 b 看作参数，记这积分为 $I(b)$，先证明

$$I'(b)=-\int_0^{+\infty} e^{-x^2}2x\sin 2bx\,dx. \tag{6}$$

事实上，由于

$$|e^{-x^2}2x\sin 2bx|\leqslant 2xe^{-x^2},$$

(6)右端的积分对参数 b 一致收敛，因而(6)成立．对(6)右端的积分用分部积分法可得

$$I'(b)=-2bI$$

由此得 $I(b)=Ce^{-b^2}$．因为当 0 时，$I(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以$C=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$．于是得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-b^2}. \qquad \square$$

例 4 计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx \quad (b>a>0)$.

解 被积函数可以表达成下列积分

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-xu}du,$$

所求积分变为

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_a^b e^{-xu}du\right]dx. \tag{7}$$

由于 e^{-xu} 在 $a\leqslant u\leqslant b$, $0\leqslant x<+\infty$ 上连续，而积分 $\int_0^{+\infty}e^{-xu}dx$ 在 $a\leqslant u\leqslant b$ 上也是一致收敛的。因而(7)可交换积分次序，于是得

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\int_a^b\left[\int_0^{+\infty}e^{-xu}dx\right]du=\int_a^b\frac{1}{u}du=\ln\frac{b}{a}. \qquad \square$$

习 题

利用积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha,$$

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)dx=\int_0^{+\infty}\cos(x^2)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

计算下列积分:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(2x^2+x+2)}dx$.
2. $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx \quad (\alpha>0,\beta>0)$.
3. $\int_0^{+\infty}e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}dx\,(a>0)$.
4. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^2dx$.
5. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3x}{x}dx$.
6. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4x}{x^2}dx$.
7. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}dx$.
8. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(ax^2+2bx+c)dx \quad (a\neq 0)$.
9. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^2)\cos 2ax\,dx$.
10. $\int_0^{+\infty}\sin t\cos tx\frac{dt}{t}$.

§3.4 Γ函数和B函数

含参变量的广义积分

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt \tag{1}$$

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \tag{2}$$

分别称为Γ函数和B函数，前者是一个参变量 s 的函数，后者是两个参变量 p, q 的函数。它们都是由含参变量的广义积分所确定的非初等函数。

下面介绍这两个函数的一些基本性质。

§2.2的例4和例3分别确定了积分(1)当 $s>0$ 时收敛，积分(2)当 $p>0, q>0$ 时收敛。这就是说，Γ函数的定义域是 $s>0$，B函数的定义域是 $p>0, q>0$。

定理1 $\Gamma(s)$ 是 $(0, +\infty)$ 中的连续函数。

证明 把 $\Gamma(s)$ 分成两部分

$$\Gamma(s)=\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt+\int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt,$$

对于任意的 $\beta>\alpha>0$，让 $s\in[\alpha, \beta]$，则当 $0<t<1$ 时，

$$t^{s-1}e^{-t}\leqslant t^{\alpha-1}e^{-t}.$$

因为 $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt$ 收敛，所以 $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛，因而 $\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}\,dt$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数。当 $t>1$ 时，

$$t^{s-1}e^{-t}\leqslant t^{\beta-1}e^{-t}.$$

因 $\int_1^{+\infty} t^{\beta-1}e^{-t}\,dt$ 收敛，故积分 $\int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$ 也在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛，因而 $\int_1^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数。由 $\beta>\alpha>0$ 的任意性，即知 $\Gamma(s)$ 在 $(0, +\infty)$ 中连续。 □

定理2 $\mathrm{B}(p, q)$ 在区间 $(0, +\infty)\times(0, -\infty)$ 中连续。

证明和定理 1 一样，留给读者作练习.

定理 3 Γ 函数具有下列三性质:

(i) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ 对任意 $s>0$ 成立. (3)

(ii) $\Gamma(n+1)=n!$ 对任意自然数 n 成立. (4)

(iii) $\ln\Gamma$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数. (5)

证明 (i) 由分部积分法得

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}t^s e^{-t}dt=-t^s e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+s\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt=s\Gamma(s).$$

(ii) 因为

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1,$$

所以

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n!\Gamma(1)=n!.$$

(iii) 只要证明对 $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $s_1, s_2\in(0,+\infty)$, 有

不等式

$$\ln\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)\leqslant\frac{1}{p}\ln\Gamma(s_1)+\frac{1}{q}\ln\Gamma(s_2)$$

或者

$$\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)\leqslant\Gamma(s_1)^{\frac{1}{p}}\Gamma(s_2)^{\frac{1}{q}}.$$

事实上，由 Hölder 不等式即得

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}\right)&=\int_0^{+\infty}t^{\frac{s_1}{p}+\frac{s_2}{q}-1}e^{-t}dt\\&=\int_0^{+\infty}\left(t^{\frac{s_1-1}{p}}e^{-\frac{t}{p}}\right)\left(t^{\frac{s_2-1}{q}}e^{-\frac{t}{q}}\right)dt\\&\leqslant\left(\int_0^{+\infty}t^{s_1-1}e^{-t}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}t^{s_2-1}e^{-t}dt\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\Gamma(s_1)^{\frac{1}{p}}\Gamma(s_2)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

这里我们使用了无穷积分的 Hölder 不等式，这从通常的 Hölder 不等式取极限就能得到。 □

性质(i)是 Γ 函数的递推公式，知道了 Γ 函数在 s 处的值，由它即可算出 Γ 在 $s+1$ 处的值。现设 $n<s\leqslant n+1$，反复运用性质(i)，就得

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)=s(s-1)\Gamma(s-1)$$
$$=\cdots=s(s-1)\cdots(s-n)\Gamma(s-n), \qquad (6)$$

这里 $0<s-n\leqslant 1$。由此可见，只要知道 Γ 在(0, 1)中的值，Γ 在其它正数 s 处的值都能由(6)给出。

出乎意料的是，定理 3 中 Γ 函数的三条性质完全确定了 Γ 函数。这就是下面的

定理 4 如果$(0,+\infty)$上的正函数 f 满足下列三条件：

(i) $f(x+1)=xf(x) \quad (x\in(0,+\infty))$；

(ii) $f(1)=1$；

(iii) $\ln f$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数；

那么 $f(x)=\Gamma(x)$ 对任何 $x>0$ 成立。

证明 我们只要证明 f 被(i), (ii), (iii) 三条件所唯一确定就行了。因为 Γ 也满足(i), (ii), (iii)三条件，故有 $f=\Gamma$。

由条件(i)，我们只须对 (0, 1) 中的 x 来讨论就够了。设 $x\in(0,1)$，因为 $\ln f$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数，根据第二章 § 2.4 的习题 7，对任意大于 1 的自然数 n，有

$$\frac{\ln f(n)-\ln f(n-1)}{n-(n-1)}\leqslant\frac{\ln f(n+x)-\ln f(n)}{(n+x)-n}$$
$$\leqslant\frac{\ln f(n+1)-\ln f(n)}{(n+1)-n}.$$

由(i), (ii)知 $f(n)=(n-1)!$，所以上面的不等式变为

$$\ln(n-1)!-\ln(n-2)!\leqslant\frac{\ln f(n+x)-\ln(n-1)!}{x}$$

$$\leqslant \ln n! - \ln(n-1)!$$

或者

$$x\ln(n-1) \leqslant \ln f(n+x) - \ln(n-1)! \leqslant x\ln n.$$

对上不等式都加上 $\ln(n-1)!$, 即得

$$\ln(n-1)^x(n-1)! \leqslant \ln f(n+x) \leqslant \ln n^x(n-1)!;$$

即

$$(n-1)^x(n-1)! \leqslant f(n+x) \leqslant n^x(n-1)!.$$

因为

$$f(n+x) = (n-1+x)\cdots(1+x)xf(x),$$

代入上式得

$$\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

右半不等式可改写为

$$f(x) \leqslant \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\left(\frac{x+n}{n}\right), \tag{7}$$

把左半不等式中的 $n-1$ 都换成 n, 不等式当然还成立.

$$f(x) \geqslant \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}. \tag{8}$$

当 $n \to +\infty$, 从不等式(7), (8)即得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = f(x). \tag{9}$$

这就证明了 $f(x)$ 被(9)右端的极限所唯一确定. □

从定理 4 顺便得到 Γ 函数的另一种表达式:

定理 5 对任意 $x>0$, 有

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

从定理 4 还可得到下列 Γ 函数与 B 函数的关系式.

定理 6 对任意 $p>0, q>0$ 有

$$B(p, q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{10}$$

证明 固定 $q>0$, 命

$$f(p)=\frac{\Gamma(p+q)B(p, q)}{\Gamma(q)}, \tag{11}$$

只要能证明 f 满足定理 4 中三个条件, 由定理 4 即知 $f(p)=\Gamma(p)$, 代入(11)即得(10). 为此先证

$$B(p+1, q)=\frac{p}{p+q}B(p, q). \tag{12}$$

事实上, 用一次分部积分法即得

$$\begin{aligned}B(p+1, q)&=\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^p(1-t)^{p+q-1}dt\\&=\frac{p}{p+q}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{p-1}(1-t)^{p+q}\frac{dt}{(1-t)^2}\\&=\frac{p}{p+q}B(p, q).\end{aligned}$$

利用(12)及 Γ 函数的递推关系即得

$$\begin{aligned}f(p+1)&=\frac{1}{\Gamma(q)}\Gamma(p+1+q)B(p+1, q)\\&=\frac{1}{\Gamma(q)}(p+q)\Gamma(p+q)\frac{p}{p+q}B(p, q)\\&=p\frac{\Gamma(p+q)B(p, q)}{\Gamma(q)}=pf(p).\end{aligned}$$

f 满足定理 4 的条件(i). 注意到

$$B(1, q)=\int_0^1(1-t)^{q-1}dt=\frac{1}{q},$$

就有

$$f(1)=\frac{\Gamma(q+1)B(1, q)}{\Gamma(q)}=\frac{\Gamma(q+1)}{q\Gamma(q)}=1.$$

定理 4 的条件(ii)也成立．利用定理 3 中证明 $\ln\Gamma$ 是$(0,+\infty)$上的凸函数的完全相同的方法，就可证明，$\ln \mathrm{B}(p,q)$ 是关于变量 p 的$(0,+\infty)$上的凸函数．因而对每个固定的 $q\in(0,+\infty)$，

$$\ln f(p)=\ln\Gamma(p+q)+\ln \mathrm{B}(p,q)-\ln\Gamma(q)$$

也是$(0,+\infty)$上的凸函数．这样，f 满足定理 4 的全部条件，由定理 4 即得 $f(p)=\Gamma(p)$，从而(10)成立。 □

根据定理 6，不难从 Γ 函数的性质直接推出 B 函数的一些性质．

定理 7 (i) $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)\quad(p>0,\ q>0)$；

(ii) $$\mathrm{B}(p+1,q+1)=\frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathrm{B}(p,q)\quad(p>0,\ q>0).$$

证明是显然的．

例 1 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx\quad(m>-1,\ n>-1)$．

解 命 $t=\sin^2 x$，即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m x\sin^n x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{n-1}{2}}(1-t)^{\frac{m-1}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{m+1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}. \quad □ \tag{13}$$

如果在上式中命 $m=0$，$n=0$，即得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}. \tag{14}$$

如果在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$ 中作变量代换 $t=u^2$，则有

$$\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty}u^{2s-1}e^{-u^2}du.$$

命 $s=\frac{1}{2}$，并利用(14)的结果，我们再一次得到

$$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

由于 m, n 为自然数时，$\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)$，$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$的值容易算出，这时利用公式(13)可以直接写出例 1 这种类型积分的值．例如

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6x\sin^4xdx=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)}.$$

而 $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$，$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$，所以

$$\int_0^{\frac{2}{\pi}}\cos^6x\sin^4xdx=\frac{3\pi}{512}.$$

Γ 函数还有两个重要的公式．

定理 8(加倍公式)　对于 $s>0$，有

$$\Gamma(2s)=\frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right). \tag{15}$$

证明　命 $p=2s$，上式可写成

$$\Gamma(p)=\frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right). \tag{16}$$

命

$$f(p)=\frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

要证明(16)成立，只要证明 f 满足定理 4 的三个条件就行．显然，

$$f(p+1)=\frac{2^p}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)$$

$$=\frac{p}{2}\frac{2^p}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$$

$$=pf(p),$$

$$f(1)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=1.$$

因为

$$\ln f(p)=\ln\frac{2^{p-1}}{\sqrt{\pi}}+\ln\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)+\ln\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right),$$

所以 $\ln f$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数. 由定理 4 即知(16)成立, 因而(15)成立. □

定理 9(余元公式) 对任意 $0<p<1$, 有

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}. \tag{17}$$

证明 在定理 6 中命 $q=1-p$, 即得

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=B(1-p,p)$$

$$=\int_0^1 t^{-p}(1-t)^{p-1}dt. \tag{18}$$

命 $t=\frac{1}{1+x}$, 则

$$\int_0^1 t^{-p}(1-t)^{p-1}dt=\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx.$$

利用复变函数论中围道积分的方法, 不难算出(参看华罗庚《高等数学引论》, 第二卷, 第一分册, 科学出版社, 1981. 第七章 § 5例1)

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad(0<p<1).$$

代入(18), 即得(17). □

根据余元公式和(6)式, 只要知道 Γ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 中的值, 便能算出 Γ 在 $(0,+\infty)$ 中的所有值.

例 2 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\alpha}dx$, $|\alpha|<1$.

解 在公式(13)中, 命 $m=-\alpha$, $n=\alpha$, 即得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\alpha}dx=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right).$$

利用余元公式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\alpha}dx=\frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{1+\alpha}{2}\pi}=\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}.\qquad \square$$

最后, 我们要给出 $\Gamma(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的一个渐近表达式, 即所谓的 Stirling 公式.

定理 10(Stirling 公式) 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\Gamma(x+1)\sim\left(\frac{x}{e}\right)^{x}\sqrt{2\pi x}. \tag{19}$$

证明 即要证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{x^{x}e^{-x}\sqrt{2\pi x}}=1. \tag{20}$$

在积分

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty}t^{x}e^{-t}dt$$

中作变量代换 $t=x(1+u)$, 得

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{+\infty}[(1+u)e^{-u}]^{x}du. \tag{21}$$

引进函数

$$h(u)=\frac{2}{u^2}[u-\ln(1+u)]\quad(u>-1,\ u\neq0),$$

$$h(0)=1,$$

则 h 是$(-1, +\infty)$中的连续函数, 且在区间$(-1, +\infty)$中严格减(第二章 § 2.2 习题 10). 由上式得

$$(1+u)e^{-u}=e^{-\frac{u^2}{2}h(u)}.$$

代入(21)得

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}h(u)x}du,$$

再作变量代换 $u=s\sqrt{\frac{2}{x}}$，上式变为

$$\Gamma(x+1)=x^{x}e^{-x}\sqrt{2x}\int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty}e^{-s^2h\left(s\sqrt{\frac{2}{x}}\right)}ds.$$

因此只须证明

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{+\infty}e^{-s^2h\left(s\sqrt{\frac{2}{x}}\right)}ds=\sqrt{\pi}. \tag{22}$$

命

$$\varphi_x(s)=\begin{cases}e^{-s^2h\left(s\sqrt{\frac{2}{x}}\right)}, & -\sqrt{\frac{x}{2}}<s<+\infty,\\ 0, & s\leqslant-\sqrt{\frac{x}{2}},\end{cases}$$

又因 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$，(22)就变成

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_x(s)ds=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds. \tag{23}$$

选取充分大的 $A_0>0$，当 $A>A_0$ 时，

$$\int_{A}^{+\infty}e^{-s^2}ds<\frac{\varepsilon}{5},\int_{-\infty}^{-A}e^{-s^2}ds<\frac{\varepsilon}{5}. \tag{24}$$

当 $s>0$，$x>1$ 时，$h\left(s\sqrt{\frac{2}{x}}\right)>h(s\sqrt{2})$，所以

$$0<\varphi_x(s)=e^{-s^2h\left(s\sqrt{\frac{2}{x}}\right)}<e^{-s^2h(s\sqrt{2})}=\varphi_1(s),$$

而 $\int_{0}^{+\infty}\varphi_1(s)ds$ 显然收敛，故可选取充分大的 $A_0'>0$，当 $A>A_0'$ 时，

$$\int_{A}^{+\infty}\varphi_x(s)ds<\int_{A}^{+\infty}\varphi_1(s)ds<\frac{\varepsilon}{5} \tag{25}$$

对所有 $x>1$ 成立. 当 $s<0$ 时, 显然有 $h\left(s\sqrt{\frac{2}{x}}\right)>1$, 因而

$$0<\varphi_x(s)=e^{-s^2h\left(s\sqrt{\frac{2}{x}}\right)}<e^{-s^2}.$$

所以当 $A>A_0$ 时, 不等式

$$\int_{-\infty}^{-A}\varphi_x(s)ds<\int_{-\infty}^{-A}e^{-s^2}ds<\frac{\varepsilon}{5}. \tag{26}$$

根据(24), (25), (26), 并选取 $A>\max(A_0, A_0')$, 可得

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_x(s)ds-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds\right| \\
&\leqslant\left|\int_{-\infty}^{-A}\varphi_x(s)dx\right|+\left|\int_{A}^{+\infty}\varphi_x(s)ds\right|+\left|\int_{-\infty}^{-A}e^{-s^2}ds\right| \\
&\quad+\left|\int_{A}^{+\infty}e^{-s^2}ds\right|+\int_{-A}^{A}\left|\varphi_x(s)-e^{-s^2}\right|ds \\
&<\frac{4}{5}\varepsilon+\int_{-A}^{A}\left|\varphi_x(s)-e^{-s^2}\right|ds.
\end{aligned} \tag{27}$$

现证当 $x\to+\infty$ 时, $\varphi_x(s)$ 关于 $s\in[-A, A]$ 一致地趋于 e^{-s^2}. 事实上, 当 $-A\leqslant s<0$ 时,

$$\begin{aligned}
0&<e^{-s^2}-e^{-s^2h\left(s\sqrt{\frac{2}{x}}\right)}=e^{-s^2}\left\{1-e^{-s^2\left[h\left(s\sqrt{\frac{2}{x}}\right)-1\right]}\right\} \\
&<1-e^{-A^2\left[h\left(-A\sqrt{\frac{2}{x}}\right)-1\right]}\to0 \quad (x\to+\infty);
\end{aligned}$$

当 $0<s<A$ 时, 有

$$\begin{aligned}
0&<e^{-s^2h\left(s\sqrt{\frac{2}{x}}\right)}-e^{-s^2}=e^{-s^2}\left\{e^{s^2\left[1-h\left(s\sqrt{\frac{2}{x}}\right)\right]}-1\right\} \\
&<e^{A^2\left(1-h\left(A\sqrt{\frac{2}{x}}\right)\right)}-1\to0 \quad (x\to+\infty).
\end{aligned}$$

因而可选取充分大的 $X>0$, 当 $x>X$ 时, 不等式

$$\left|\varphi_x(s)-e^{-s^2}\right|<\frac{\varepsilon}{10A}$$

对 $[-A, A]$ 中的 s 成立, 于是

$$\int_{-A}^{A}|\varphi_x(s)-e^{-s^2}|ds<\frac{\varepsilon}{5}.$$

代入(27)，当 $x>X$ 时，有

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_x(s)ds-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}ds\right|<\varepsilon.$$

这就是(23)，从而(19)成立。 ▯

在(19)中特别取 x 为自然数 n，并注意到 $\Gamma(n-1)=n!$，即得

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}\quad(n\to+\infty). \tag{28}$$

这是 $n!$ 的一个渐近表示式．在处理 n 很大和 $n!$ 有关的问题时，(28)是一个很有用的公式．例如利用(28)就很容易算出

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

习　　题

1. 回答下列问题：

(1) Γ 函数和 B 函数的定义域是什么？

(2) 为什么说只要知道 Γ 函数在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 中的值，便能算出 Γ 函数在 $(0,+\infty)$ 中的其它值？

(3) Γ 函数被哪三条性质所唯一确定？

(4) Γ 函数和 B 函数有什么关系？

(5) 当 $x\to+\infty$ 时，$\Gamma(x+1)$ 的渐近表达式是什么？

2. 利用 Γ 函数计算下列积分：

(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$.　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$.　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6x\cos^4x\,dx$.

3. 用 Γ 函数表示下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^m dx}{(a+bx^n)^p}\quad(a>0,\ b>0,\ n>0)$.

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-x^n} dx \quad (n>0)$. (3) $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx$.

4. 证明

$$\Gamma(p)=x^p\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-tx}dt \quad (x>0).$$

5. 证明

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}dt.$$

6. 证明

$$\int_0^1 \ln\Gamma(x)dx=\ln\sqrt{2\pi}.$$

7. 证明

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

提示：作变换 $\cos\theta=1-2\sqrt{x}$.

8. 证明 $\ln\mathrm{B}(p,q)$ 是关于变量 p 的 $(0,+\infty)$ 上的凸函数.

9. 利用 Stirling 公式计算

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n^2]{n!}$.

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{e^{1-\frac{1}{k}}}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$.

10. 求出使级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n!}{n^{\alpha}}$ 收敛的所有 α 的值.

11. 证明 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\dfrac{(-1)^k}{m+k+1}=\dfrac{n!\,m!}{(n+m+1)!}$.

12. 证明 $\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\dfrac{(-1)^k}{(m+k+1)^2}=\dfrac{n!\,m!}{(n+m+1)!}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{m+k+1}$.

13. 按照下列步骤，给出公式

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

的另一个证明：

(1) $\Gamma(p)=2\int_0^{+\infty}u^{2p-1}e^{-u^2}du$;

(2) $\Gamma(p)\Gamma(q)=\lim\limits_{A\to+\infty}4\iint\limits_{G(A)}f(u,v)\,dudv$,

其中 $f(u,v)=u^{2p-1}v^{2q-1}e^{-(u^2+v^2)}$, $G(A)=\{(u,v):\quad 0\leqslant u\leqslant A,\ 0\leqslant v\leqslant A\}$;

(3) 命 $D(R)=\left\{(r,\theta):0\leqslant r\leqslant R,\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$, 则

$$\lim_{A\to+\infty}\iint\limits_{D(A)}f(u,v)\,dudv=\frac{1}{4}\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q),$$

$$\lim_{A\to+\infty}\iint\limits_{D(\sqrt{2}A)}f(u,v)\,dudv=\frac{1}{4}\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q);$$

(4) $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

第十章　Fourier 分析

在第八章中，我们详细地讨论了一种特殊的函数项级数——幂级数，它的每一项都是幂函数。这一章我们要讨论另一种特殊的函数项级数——三角级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

它的每一项都是三角函数。讨论这种级数，不只是数学上的兴趣，而有它的物理背景。

我们知道，在很多科学技术问题中，经常要遇到周期现象，即经历一定的时间 T 后又恢复到原状的现象。T 称为这个周期现象的周期。一切周期现象都是由周期函数来描写的。最简单的周期函数就是通常所谓的简谐波：

$$x(t)=a\sin(\omega t+\varphi),$$

它的周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，ω 称为圆频率，φ 称为初相，a 称为振幅。

容易证明，两个频率相同的简谐波迭加的结果仍是一个简谐波，而两个频率不同的简谐波迭加的结果就不再是简谐波了。例如

$$x_1(t)=\sin t,\ x_2(t)=\frac{1}{3}\sin 3t,$$

前者的圆频率 $\omega=1$，后者的圆频率 $\omega=3$，它们迭加的结果

$$x_1(t)+x_2(t)=\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t$$

是一个较为复杂的周期波。

这个例子说明，把两个频率不同的简谐波迭加起来能产生较

为复杂的周期波。反过来看，一个较为复杂的周期波有可能分解成若干个简谐波的和．这个事实使人们产生一种想法：能否把一个周期函数分解为一系列频率不同的简谐波的和？即把周期函数 f 表为

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n). \tag{1}$$

如果能做到这一点，就可大大简化对周期波的研究．

设 $g(t)$ 是一个周期为 T 的函数，作变量代换

$$x=\frac{2\pi}{T}t \quad 或 \quad t=\frac{T}{2\pi}x,$$

就有

$$g(t)=g\left(\frac{T}{2\pi}x\right)=f(x),$$

则 $f(x)$ 是周期 2π 的函数．因此只须讨论以 2π 为周期的周期函数就行了．

设 f 是以 2π 为周期的周期函数，它的圆频率 $\omega=1$．于是表达式(1)可写为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n). \tag{2}$$

若记

$$a_0=2A_0\sin\varphi_0,$$

$$a_n=A_n\sin\varphi_n,\ b_n=A_n\cos\varphi_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

则(2)又可写为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{3}$$

这样一来，刚才提出的把周期函数分解成一系列简谐波迭加的问题就变成一个纯粹的数学问题：在什么条件下，周期 2π 的

函数能展开成形如(3)的三角级数?

这是本章要讨论的主题之一. 除此之外, 这一章还要讨论函数的 Fourier 级数以及 Fourier 积分的另外一些重要性质.

第一节 收敛定理

§1.1 周期函数的 Fourier 级数

在下面的讨论中, 要用到三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

的一个重要性质, 即它们的正交性:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0, \tag{1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \pi\delta_{mn}, \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi\delta_{mn}. \tag{3}$$

这里 $\delta_{mn}=1$(当 $m=n$), $\delta_{mn}=0$(当 $m\neq n$). 这些等式的证明是很简单的. 注意到

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\},$$

直接计算积分即得(2). (1), (3)两式可同法证明.

现在回到刚才提出的问题, 在什么条件下, 周期 2π 的函数 f 能表为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4}$$

暂且假定(4)已成立, 并且右端的级数在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 我们来确定级数中的系数 a_n, b_n. 将(4)的两端同乘以 $\cos nx$, 并计算它们在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos nx dx+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\cos nx dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx dx+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx dx\right];$$

根据三角函数系的正交性，右端第三项为 0；右端第一项当 $n=0$ 时等于 πa_0，当 n 为正整数时为 0；右端第二项当 $k=n$ 时等于 πa_n，当 $k\neq n$ 时为 0；因而有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx=\pi a_n \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

用同样的方法，在(4)的两端同乘以 $\sin nx$，并在$[-\pi, \pi]$上积分，即得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\pi b_n, \quad (n=1, 2, \cdots).$$

于是得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1, 2, \cdots).$$

从这里可以看出，(4)的常数项写成$\frac{a_0}{2}$，而不写成 a_0，就是为了使 a_n 能有一个统一的表达式.

上面公式把展开式(4)中的系数完全确定下来了，但这是在上面所作的假定下得到的.

现在从另外一个角度来看上述问题. 假定 f 是一个周期 2π 的可积与绝对可积的函数（如果 f 是有界函数，就假定它是可积

的；如果 f 是无界函数，就假定它是绝对可积的)，按照上面公式，可以造出一串系数 a_n, b_n，有了 a_n, b_n，就可以造出相应的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

至于这个级数是否收敛；如果收敛的话，它的和是否就等于$f(x)$，这些问题都有待进一步研究．但有一点是可以肯定的，此级数是由 f 所确定的．

定义 1 设 f 是周期 2π 的函数，在$[-\pi, \pi]$ 上可积与绝对可积．称

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots), \\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n=1, 2, \cdots) \end{aligned} \tag{5}$$

为 f 的 Fourier 系数；称

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{6}$$

为 f 的 Fourier 级数，记为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

下面将要看到，对于相当广泛的一类函数．它的 Fourier 级数是收敛于它自己的，这正是 Fourier 级数所以重要的原因．

为了讨论 Fourier 级数的收敛问题，我们先设法把它的部分和用积分表示出来．

固定 x_0，级数(6)的部分和为

$$S_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0).$$

把 a_k, b_k 的表达式(5)代入上式得

$$S_n(x_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos kx\cos kx_0+\sin kx\sin kx_0)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right]dx.$$

利用三角恒等式

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

即得

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-x_0)}{2\sin\frac{x-x_0}{2}}dx.$$

这积分的被积函数是以 2π 为周期，故可把积分区间改为$[x_0-\pi, x_0+\pi]$，再作变量代换 $x-x_0=t$，积分变为

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x_0)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

把上述积分分为两部分

$$\int_{-\pi}^{\pi}=\int_{-\pi}^{0}+\int_{0}^{\pi},$$

并对前一积分作变量代换 $t=-u$，最后得 $S_n(x_0)$的表达式：

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \qquad (7)$$

这个重要的积分称为 Dirichlet积分，是讨论 Fourier 级数收敛问题的出发点。函数

$$\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

称为 Dirichlet 核。

这样一来，Fourier 级数的收敛问题，就变为研究(7)含有参数 n 的积分当 $n\to+\infty$ 时是否有极限的问题。下面的 Riemann 引理将提供研究这种积分的一个工具。

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 研究三角级数的物理背景是什么?

(2) 周期 2π 的函数 f 的 Fourier 级数是否一定收敛? 如果收敛，是否一定收敛到 f 自己?

(3) 如何把研究 Fourier 级数的收敛问题，转化为研究一个含有参数 n 的积分当 $n\to+\infty$ 时是否有极限的问题?

2. 证明三角多项式

$$T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

的 Fourier 级数就是它自己.

3. 利用 Dirichlet 积分证明

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt=1.$$

4. 设 f 是周期 2π 的可积与绝对可积函数，证明

(1) 如果 f 在$[-\pi,\pi]$上满足 $f(x+\pi)=f(x)$，那么

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0.$$

(2) 如果 f 在$[-\pi,\pi]$上满足 $f(x+\pi)=-f(x)$，那么

$$a_{2n}=b_{2n}=0.$$

5. 设可积与绝对可积的周期 2π 的函数 f 的 Fourier 系数为 a_n, b_n, 试计算平移函数 $f(x+h)$ 的 Fourier 系数 $\bar{a}_n, \bar{b}_n$.

6. 设 f 是$[-\pi,\pi]$上的单调非减函数, 证明

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad b_n=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

7. 设 f 是$(0,2\pi)$中的单调非增函数, 证明

$$b_n\geqslant 0.$$

§1.2 收敛判别法

上面已经谈到, 研究 Fourier 级数收敛问题的主要工具是下面的 Riemann 引理, 同时利用它可以导出不少重要的结果.

定理 1(Riemann 引理) 设 f 在$[a,b]$上可积与绝对可积, 那么

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx=0,$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx=0.$$

证明 证明分三步:

(一) 先设 f 是阶梯函数:

$$f(x)=T(x)=\begin{cases}c_i, & x_{i-1}\leqslant x<x_i \quad (i=1,2,\cdots,n),\\ c_n, & x=x_n,\end{cases}$$

这里 $c_1,\cdots,c_n$ 是常数, 且

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

我们证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b T(x)\cos\lambda x dx=0. \tag{1}$$

事实上,

$$\int_a^b T(x)\cos\lambda x dx=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}T(x)\cos\lambda x dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\lambda} (\sin \lambda x_i - \sin \lambda x_{i-1}),$$

所以

$$\left| \int_a^b T(x) \cos \lambda x dx \right| \leqslant \frac{2}{|\lambda|} \sum_{i=1}^{n} |c_i|,$$

当 $\lambda \to +\infty$ 时，右端趋于 0，故(1)成立. 这就对阶梯函数证明了 Riemann 引理.

（二）设 f 是$[a, b]$上的有界可积函数. 我们先证明，对任意 $\varepsilon > 0$，必能找到阶梯函数 T，使得

$$\int_a^b |f(x) - T(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

事实上，因为 f 在$[a, b]$上可积，必有$[a, b]$的一个分割

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2},$$

其中 M_i、m_i 分别是 f 在$[x_{i-1}, x_i]$上的上、下确界. 现在作阶梯函数

$$T(x) = \begin{cases} f(x_{i-1}), & x_{i-1} \leqslant x < x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n), \\ f(x_{n-1}), & x = x_n, \end{cases}$$

于是

$$\int_a^b |f(x) - T(x)| dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - T(x)| dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(x_{i-1})| dx$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

现在来证明 Riemann 引理. 由(2)得

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx - \int_a^b T(x)\cos\lambda x dx\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |f(x) - T(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

另一方面, 由(一)知, 存在 $\lambda_0 > 0$, 当 $\lambda > \lambda_0$ 时,

$$\left|\int_a^b T(x)\cos\lambda x dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

由(3), (4), 当 $\lambda > \lambda_0$ 时有

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| \leqslant \left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx - \int_a^b T(x)\cos\lambda x dx\right|$$

$$+\left|\int_a^b T(x)\cos\lambda x dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = 0$.

(三) 设 f 在 $[a, b]$ 上无界可积, 不妨设 b 是瑕点, 这时我们假定 f 绝对可积. 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得

$$\int_{b-\eta}^b |f(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

把 $[a, b]$ 上的积分拆成两个:

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = \int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x dx + \int_{b-\eta}^b f(x)\cos\lambda x dx,$$

右端第一个积分是常义的, 故由刚才证明的结果得知

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x dx = 0,$$

因而当 λ 充分大时即有

$$\left|\int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x dx\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx\right| \leqslant \left|\int_a^{b-\eta} f(x)\cos\lambda x dx\right| + \int_{b-\eta}^b |f(x)|dx < \varepsilon.$$

这就是要证明的. 同法可证另一个等式. □

从 Riemann 引理立刻得到如下的

推论 设 a_n, b_n 是可积与绝对可积函数 f 的 Fourier 系数, 那么

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0. \tag{5}$$

由此可知, 并不是每个三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

都是某个可积与绝对可积函数的 Fourier 级数, 它可以成为 Fourier 级数的必要条件是(5)成立.

利用这个推论, 还可对 f 的 Fourier 系数趋于 0 的阶作出估计.

定理 2 设 f 在$[-\pi, \pi]$上连续, $f(-\pi)=f(\pi)$, 且有可积与绝对可积的导函数 f', 那么

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right),\ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n\to+\infty).$$

证明 用 a'_n, b'_n 记 f' 的 Fourier 系数, 则有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx dx = -\frac{1}{n}b'_n,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = \frac{1}{n}a'_n.$$

因为 $a'_n = o(1), b'_n = o(1)$, 所以

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right),\ b_n = o\left(\frac{1}{n}\right). \quad \square$$

一般地, 我们有

定理 3 设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上有直到 $k+1$ 阶导数，$f^{(k+1)}$ 可积与绝对可积，且

$$f(\pi)=f(-\pi), f'(\pi)=f'(-\pi), \cdots, f^{(k)}(\pi)=f^{(k)}(-\pi),$$

那么

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), b_n=o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \quad (n\to+\infty).$$

证明 用 $a_n^{(l)}$ 和 $b_n^{(l)}$ 记 $f^{(l)}$ 的 Fourier 系数，由定理 2 知道，

$$a_n=-\frac{1}{n}b'_n=-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}a_n^{(2)}\right)=-\frac{1}{n^2}\left(-\frac{1}{n}b_n^{(3)}\right)=\frac{1}{n^3}b_n^{(3)}$$

$$=\cdots=\pm\frac{1}{n^k}b_n^{(k)}\left(\text{或}\pm\frac{1}{n^k}a_n^{(k)}\right);$$

同理

$$b_n=\frac{1}{n}a'_n=-\frac{1}{n^2}b_n^{(2)}=\cdots=\pm\frac{1}{n^k}b_n^{(k)}\left(\text{或}\pm\frac{1}{n^k}a_n^{(k)}\right).$$

由于 $f^{(k+1)}$ 可积和绝对可积，所以

$$a_n^{(k)}=o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n^{(k)}=o\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是即得

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), b_n=o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right). \qquad \square$$

从这个定理可以看出，f 的 Fourier 系数趋于 0 的阶，随着 f 可微性程度的提高而相应地提高.

从 Riemann 引理还可得

定理 4（局部化定理） 函数 f 的 Fourier 级数在点 x_0 是否收敛，以及收敛于什么数值，仅与 f 在 x_0 点附近的值有关.

证明 把表达 Fourier 级数部分和的 Dirichlet 积分分为两部分

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^\delta+\int_\delta^\pi\right\}, \tag{6}$$

这里 δ 是任意小的一个正数. 由于函数

$$\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$$

在区间 $[\delta,\pi]$ 中可积与绝对可积, 由 Riemann 引理, (6)右端第二个积分当 $n\to+\infty$ 时趋于 0. 因此, 当 $n\to+\infty$ 时, $S_n(x_0)$ 的极限存在与否, 以及收敛于什么数值, 完全取决于(6)式右端的第一个积分:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\delta[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt,$$

而这个积分的值仅与 f 在 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 中的值有关. 这就是我们要证明的. □

由此可见, 如果两个函数 f 和 g 在 x_0 点的充分小邻域中有相同的值, 则不论它们在这邻域之外的值如何, 它们的 Fourier 级数在 x_0 处同时敛散, 而且当收敛时有相同的和. 考虑到 f 的 Fourier 系数 a_n, b_n 是由 f 在整个区间 $[-\pi,\pi]$ 上的数值确定的, 上述这个结论是出乎意料的.

现在利用 Riemann 引理给出函数 f 的 Fourier 级数收敛的充分条件.

前面我们已经把 f 的 Fourier 级数在 x_0 点的部分和写成了 Dirichlet 积分

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

如果取 $f\equiv1$, 当然 $S_n(x_0)=1$, 从上式(或利用 § 1.1 习题 3)可得

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=1.$$

于是对于任意的 S 有

$$S_n(x_0)-S=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{7}$$

如果记

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S,$$

那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 点是否收敛，就归结为是否存在这样的 S，使得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=0. \tag{8}$$

如果(8)成立，那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 S.

定理 5 (Dini 判别法)　如果存在这样的 S，使得函数 $\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S$ 满足条件：对某个正数 δ，函数 $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\ \delta]$ 上可积与绝对可积，那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 S.

证明　只要证明在所设的条件下(8) 成立. 把(8) 式的积分写为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt. \tag{9}$$

因为

$$\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}=\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}=\frac{t-2\left[\frac{t}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^3+o(t^3)\right]}{2t\left[\frac{t}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{t}{2}\right)^3+o(t^3)\right]}$$

$$=\frac{\frac{1}{24}t^3+o(t^3)}{t^2-\frac{1}{24}t^4+o(t^4)}\to 0 \quad (t\to 0),$$

所以它是$[0, \pi]$上的有界连续函数. 而φ是可积和绝对可积的, 因而

$$\varphi(t)\left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right]$$

在$[0, \pi]$上也是可积与绝对可积的. 于是由 Riemann 引理知(9)右端第一个积分当$n\to+\infty$时趋于 0. 根据定理的假设, $\frac{\varphi(t)}{t}$ 在$[0, \delta]$上可积与绝对可积, 因而在$[0, \pi]$上也如此, 再用一次 Riemann 引理即知(9) 右端第二个积分当$n\to+\infty$时也趋于 0. 所以(8)成立. □

从 Dini 判别法, 可以得到

推论 1 如果对于充分小的正数t, 成立着

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|\leqslant Lt^\alpha,\ |f(x_0-t)-f(x_0-0)|\leqslant Lt^\alpha \quad (0<t\leqslant\delta),$$

这里L, α皆是正数, 且$0<\alpha\leqslant 1$, 那么f的 Fourier 级数在x_0处收敛于

$$\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2},$$

如果 f 在 x_0 处连续，且对充分小的正数 t，成立着不等式

$$|f(x_0+t)-f(x_0)|\leqslant Lt^{\alpha},\ |f(x_0-t)-f(x_0)|\leqslant Lt^{\alpha} \quad (0<t\leqslant\delta),$$

那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $f(x_0)$.

证明 在 Dini 判别法中取

$$S=\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)],$$

于是

$$\frac{\varphi(t)}{t}=\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}+\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}.$$

由所设条件得

$$\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|\leqslant\frac{2L}{t^{1-\alpha}} \quad (0<t\leqslant\delta).$$

当 $\alpha=1$ 时，$\frac{\varphi(t)}{t}$ 是有界函数；当 $0<\alpha<1$ 时，$\frac{\varphi(t)}{t}$ 在 $[0,\delta]$ 上绝对可积，Dini 判别法的条件成立. □

推论 2 如果 f 在 x_0 处有有限的导数 $f'(x_0)$，或是有两个有限的单侧导数

$$f'_+(x_0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t},$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{-t},$$

那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $f(x_0)$；如果 f 在 x_0 处仅有两个有限的广义单侧导数

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},\ \lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t},$$

那么 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$.

这实际上是推论 1 中 $\alpha=1$ 的特殊情形.

由此可见，只要 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上有一阶导数，就能把它展开成 Fourier 级数。从这一点来看，Fourier 级数比幂级数要优越得多。

习　　题

1. 回答下列问题:

(1) 是不是每个三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

都是某一个周期函数 f 的 Fourier 级数？它成为Fourier级数的必要条件是什么？

(2) f 的 Fourier 系数 a_n, b_n 趋于 0 的速度和 f 的性质有何关系？

(3) 设 f 和 g 是两个周期 2π 的可积与绝对可积函数，如果它们只在某点 x_0 的一个充分小的邻域中相等，它们的 Fourier 级数是否相同？它们的 Fourier 级数在 x_0 点的收敛情况是否相同？

(4) f 的 Fourier 级数收敛的充分条件是什么？

(5) 就收敛点集、收敛条件等问题对幂级数和 Fourier 级数作一比较。

2. 设 f 在 $[0, +\infty)$ 上绝对可积，试证

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\cos\lambda x dx=0,\quad \lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\sin\lambda x dx=0.$$

3. 设 g 是区间 $[0, h]$ $(h>0)$ 上的单调非减函数，证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^h g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt=\frac{\pi}{2}g(+0).$$

提示：把左端积分写成

$$\int_0^h g(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt$$
$$=g(+0)\int_0^h\frac{\sin\lambda t}{t}dt+\int_0^h[g(t)-g(+0)]\frac{\sin\lambda t}{t}dt.$$

4. 利用等式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\int_0^x\sum_{k=1}^{n}\cos kt dt=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

求级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$之和.

5. 设周期 2π 的函数 f 有连续的二阶导函数 f'', 证明 f 的 Fourier 级数一致收敛于 f.

6. (1) 设 f 在$[a, b]$上 Riemann 可积, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx.$$

(2) 设 f 在$(-\infty, +\infty)$上绝对可积, 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

§1.3 把周期函数展开成 Fourier 级数

例 1 求函数 $f(x)=x$ 在$(-\pi, \pi)$上的 Fourier 展开式.

解 定义 f 在 $x=\pm\pi$ 上的值为 $f(\pi)=f(-\pi)=0$. 把 $f(x)=x$ 以 2π 为周期开拓到整个数轴上, 这样 f 便成为定义在整个数轴上的以 2π 为周期的函数(图 4).

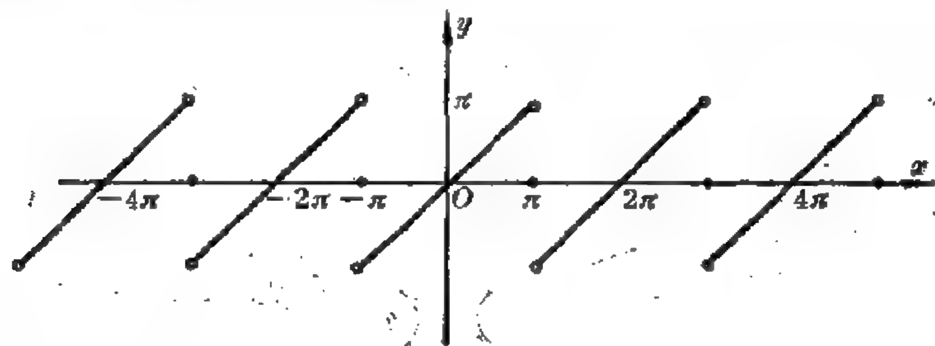


图 4

因为 $x\cos nx$ 是奇函数, 所以

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx=0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

而

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx=(-1)^{n-1}\frac{2}{n}$$

$$(n=1, 2, \cdots).$$

故由 Dini 判别法，得

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx \quad (-\pi<x<\pi),$$

或者

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi<x<\pi). \tag{1}$$

但在 $x=\pi$ 处，f 不连续，其 Fourier 级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(\pi+0)]=\frac{1}{2}[\pi+(-\pi)]=0,$$

在 $x=-\pi$ 处也是这样.

特别，在(1)中取 $x=\frac{\pi}{2}$，就得到

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

在讨论 $\operatorname{arc\,tg} x$ 的幂级数展开式时，已经得到过这一结果. □

例 2 在区间 $(0, 2\pi)$ 上，把 $f(x)=x$ 展为 Fourier 级数.

解 把 $f(x)=x$ 以 2π 为周期延拓到整个数轴上，使之成为定义在整个数轴上的以 2π 为周期的函数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx=0 \quad (n=1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{2}{n} \quad (n=1, 2, \cdots),$$

所以

$$x=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx \quad (0<x<2\pi),$$

或者

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\quad(0<x<2\pi).$$ □

其 Fourier 级数的图形如下所示.

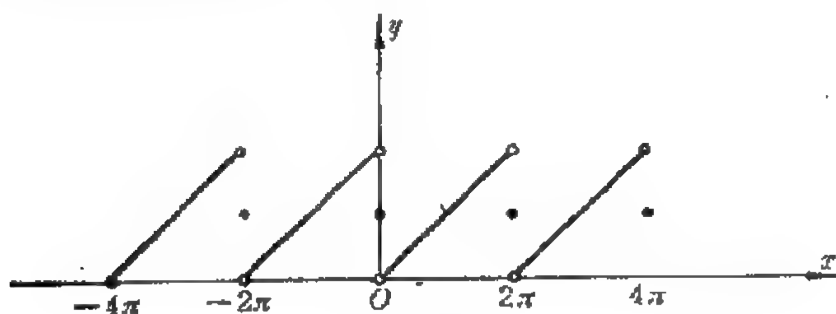


图 5

例 3 求 $f(x)=x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的 Fourier 展开式.

解 把 f 延拓成为整个数轴上的以 2π 为周期的函数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx=(-1)^n\frac{4}{n^2}$$

$$(n=1,2,\cdots),$$

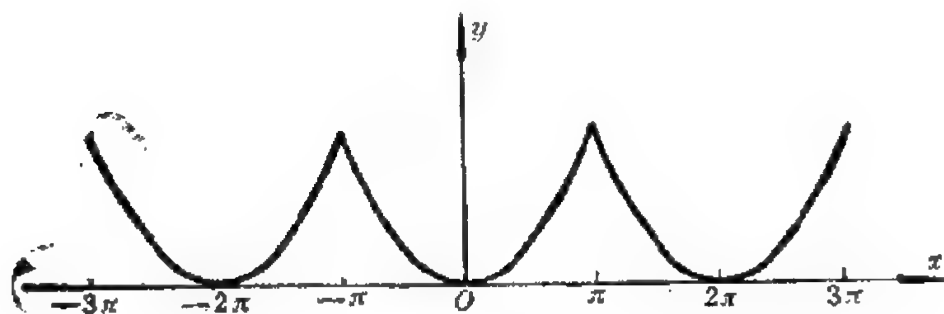


图 6

由于 $x^2\sin nx$ 是奇函数, 所以

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin nxdx=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

于是由 Dini 定理得

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos nx \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi),$$

或者

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{x^2}{4}-\frac{\pi^2}{12} \quad (-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

由于 f 在整个数轴上连续，故在 $x=\pm\pi$ 处等式也成立。

在上式中命 $x=\pi$，就得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6};$$

命 $x=0$，就得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}. \qquad \square$$

上面三个例子，都是把给定在 $(-\pi,\pi)$ 或 $(0,2\pi)$ 上的函数，在相应的区间上展开为 Fourier 级数. 对于只在 $(0,\pi)$ 上给出定义的函数，如何展开成 Fourier 级数？这时可考虑在 $(-\pi,0)$ 中任意补充 $f(x)$ 的定义，使 f 在 $(-\pi,\pi)$ 中有定义，然后再把它以 2π 为周期开拓到整个数轴上去. 对于各种不同的补充，得到的 Fourier 级数自然也是不同的，但在 $(0,\pi)$ 中，它们都收敛到同一个函数.

有两种补充方法是最常用的.

一种方法是用公式

$$f(x)=f(-x) \quad (-\pi<x<0)$$

来补充 f 在 $(-\pi,0)$ 中的定义，使 f 在 $(-\pi,\pi)$ 中成为偶函数. 这种补充方法简称为偶性延拓. 这样便有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

因此 f 的 Fourier 级数中只含余弦项：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

称它为余弦级数.

另一种补充方法是所谓的奇性延拓，即用公式

$$f(x)=-f(-x)\quad(-\pi<x<0)$$

来补充 f 在 $(-\pi,0)$ 中的定义，这时 f 是 $(-\pi,\pi)$ 中的奇函数，于是

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0\quad(n=0,1,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx dx\quad(n=1,2,\cdots).$$

因而 f 的 Fourier 级数是一正弦级数

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

由此可见，对于只定义在区间 $(0,\pi)$ 上的函数，只要满足收敛定理的条件，我们既可把它展开成正弦级数，也可把它展开成余弦级数.

例 4　把 $f(x)=x$ 在 $(0,\pi)$ 上分别展开成余弦级数和正弦级数.

解　为要展开成余弦级数，把 $f(x)=x$ 偶性延拓到 $(-\pi,0)$ 中去(图 7)．于是

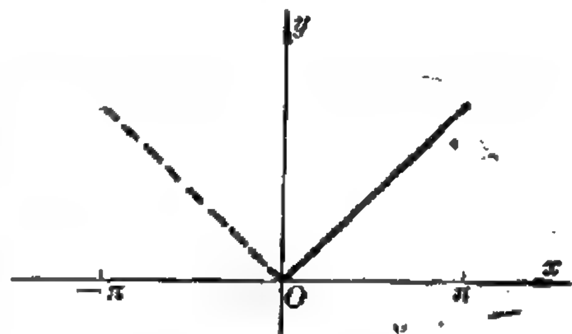


图 7

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x dx=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0, & n=2m,\\ -\dfrac{4}{(2m+1)^2\pi}, & n=2m+1,\end{cases}$$

所以

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

在上式中，命 $x=0$ 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

为了将 $f(x)=x$ 在 $(0,\ \pi)$ 上展为正弦级数，将它作奇性延拓(图 8)，这就是例 1 讨论过的情形:

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$$

$$(0\leqslant x<\pi).\qquad \square$$

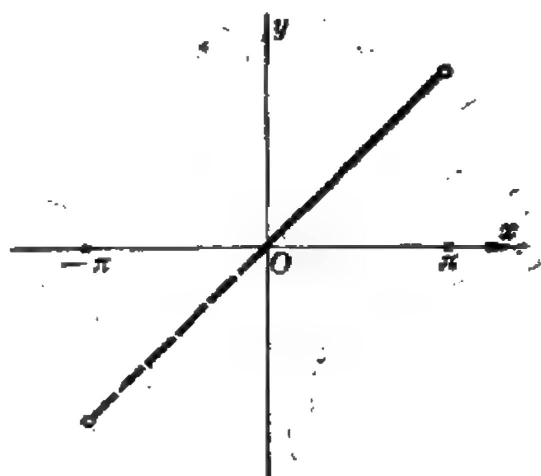


图 8

现在讨论 f 的周期为 $2l$ 的情形. 作变换 $x=\frac{l}{\pi}t$, 并记

$$f(x)=f\left(\frac{l}{\pi}t\right)=g(t),$$

则 g 为周期 2π 的函数。如果 g 满足 Dini 定理的条件，便有

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

这儿

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,dt\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,dt \quad (n=1, 2, \cdots).$$

回到原来的变数 x，就有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=0, 1, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=1, 2, \cdots),$$

这就是周期为 $2l$ 的函数的 Fourier 展开式。

如果 f 只定义在 $(0, l)$ 中，那么既可把它展开成余弦级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

也可把 f 展开成正弦级数：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$b_n=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=1, 2, \cdots).$$

例 5 把

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{l}{2},\\ l-x, & \frac{l}{2}\leqslant x\leqslant l\end{cases}$$

在(0, l)中展为正弦级数.

解 把 f 作奇性延拓(图 9).

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$+\frac{2}{l}\int_{\frac{l}{2}}^l (l-x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{\pi n}{2},$$

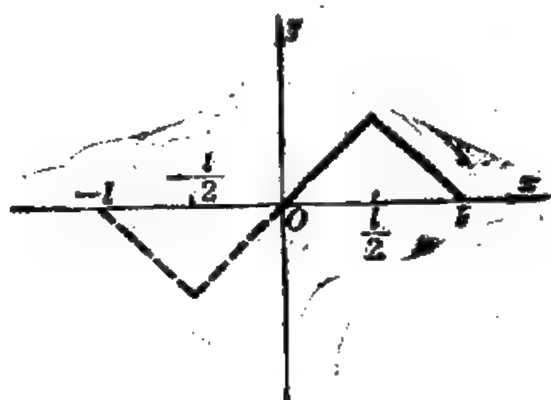


图 9

于是

$$b_{2m}=0,\qquad b_{2m+1}=\frac{4l}{\pi^2}\frac{(-1)^m}{(2m+1)^2}.$$

故得正弦展开式

$$f(x)=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\quad(0\leqslant x\leqslant l).$$ ▯

最后顺便提一下 Fourier 级数的复数形式.

设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).\tag{2}$$

把表达式

$$\cos nx=\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx}),\ \sin nx=\frac{1}{2i}(e^{inx}-e^{-inx})$$

代入(2)的右端得

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inx}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inx}\right)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx},$$

其中 $$c_0=\frac{a_0}{2},$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx-i\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx,$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+ib_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx.$$

于是得 f 的 Fourier 级数的复数形式如下:

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx},$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \quad (n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots).$$

如果 f 是以 $2l$ 为周期的函数,则其 Fourier 级数的复数形式为

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x},$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi}{l}x}dx \quad (n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots).$$

现设 f 是周期 2π 的函数,它的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$$

今用 c_n $(n=0,1,\cdots)$造一复变数 z 的幂级数

$$c_0+2\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n. \tag{3}$$

当 $z=e^{ix}$ 时,因为 $2c_n=a_n-ib_n$,

$$2c_n z^n = (a_n - ib_n)(\cos nx + i\sin nx)$$
$$= (a_n\cos nx + b_n\sin nx) + i(-b_n\cos nx + a_n\sin nx),$$

所以(3)的实部就是 f 的 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

(3)的虚部

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-b_n\cos nx + a_n\sin nx)$$

称为(2)的**共轭级数**. 关于共轭级数的收敛问题, 也有一套理论, 这里就不作介绍了.

习 题

1. 回答下列问题:

(1) 如何把定义在区间 $(0, \pi)$ 上的满足收敛定理条件的函数 f 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 中, 使得 f 能展开为余弦级数或正弦级数?

(2) 如何把定义在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的满足收敛定理条件的函数 f 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 中, 使得 f 能展开为

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

或

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi).$$

(3) 写出周期为 $2l$ 的函数 f 的 Fourier 级数.

2. 把函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi)$$

展为 Fourier 级数. 利用这级数求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ 的和.

3. 在区间$(-\pi,\pi)$中把下列函数展为 Fourier 级数:

(1) $|x|$.　　(2) $\cos ax$.

(3) $\sin ax$.　　(4) $x\sin x$.

4. 把$f(x)=x-[x]$在$[0,1]$上展为 Fourier 级数.

5. 在区间$(-l,l)$上把下列函数展为 Fourier 级数:

(1) x.　　(2) $x+|x|$.

6. 把函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x<2,\\ 3-x, & 2\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

展开成 Fourier 级数.

第二节　Fourier 级数的 Cesàro 求和与 Abel 求和

§2.1　级数的 Cesàro 求和与 Abel 求和

Dini 的收敛判别法告诉我们,要使f的 Fourier 级数在x_0处收敛于$f(x_0)$本身,除了要求f在x_0处连续外,还要求f在x_0处有有限导数,或有广义的左右导数.自然产生这样的问题:光有f的连续性,是否能保证它的 Fourier 级数收敛于f自己?1876 年,du Bois-Reymond 举出了一个连续函数,它的 Fourier 级数在若干点是发散的,从而否定地回答了刚才的问题.

另一方面,人们并不在连续函数上加条件,而去改进级数收敛的定义,使得在新的收敛意义下,连续函数的 Fourier 级数能收敛于自己.

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是一无穷级数,$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$是它的部分和.我们曾经定义:如果$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$,就说级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$是收敛的,$S$是它的和.这个定义很自然,和人们的直观认识是一致的.它的不足之处是一些很简单的级数,在上述意义下却没有和.例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots$$

就是这样。

新给出的收敛的定义，必须使得在原来意义下收敛的级数，在新的意义下仍然收敛，而且有相同的和；而一些在原来的意义下发散的级数，在新的意义下却是收敛的。换句话说，新的定义必须比原来的定义能使更多的级数有和。下面介绍这种新定义中最重要的两种——Cesàro 求和和 Abel 求和。

定义 1 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是一无穷级数，S_n 是它的部分和数列，如果 S_n 的算术平均

$$\sigma_n=\frac{S_1+\cdots+S_n}{n}$$

是一收敛数列，即 $\lim_{n\to+\infty}\sigma_n=\sigma$，就称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 在 Cesàro 意义下收敛（或均值意义下收敛），σ 就称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的 Cesàro 和，记为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sigma$ (C)。这时称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 可以 Cesàro 求和。

容易看出，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 在原来意义下收敛于 S，即 $\lim_{n\to+\infty}S_n=S$，那么 S_n 的算术平均序列

$$\sigma_n=\frac{S_1+\cdots+S_n}{n}$$

也以 S 为极限，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 在 Cesàro 意义下也收敛，而且有相同的和 S。另一方面，的确有这样的级数，它在 Cesàro 意义下收敛，而在原来的意义下是发散的。例如级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=1-1+1-1+\cdots$$

的部分和数列 S_n 是

$$S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ \cdots,$$

它在原来的意义下是发散的；但是

$$\sigma_{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2},\ \sigma_{2n+1}=\frac{n+1}{2n+1}\to\frac{1}{2}\quad(n\to+\infty),$$

因而有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}=\frac{1}{2}\ (\mathrm{C})$$

定义 2 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 是一无穷级数，如果由它所产生的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1，而且

$$\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S,$$

就称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 在 **Abel 意义下收敛**，S 称为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 的 **Abel 和**，记为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=S$ (A)，这时称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **可以 Abel 求和**.

容易知道，如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 在原来的意义下收敛于 S，那么由第八章§3.2 的 Abel 定理知，

$$\lim_{x\to1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S.$$

因此，在原来意义下收敛的级数，在 Abel 意义下也收敛，而且有相同的和．但确实有这样的级数，它在原来的意义下发散，而在

Abel 意义下却是收敛的. 还以刚才的级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=1-1+1-1+\cdots$$

为例. 由它所产生的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

的收敛半径为 1, 而且显然有

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2},$$

因而

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n=\frac{1}{2}\ (A).$$

那么这两种求和法何者更强些?

定理 1 若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S\quad(C)$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S\ (A)$

在证明这定理之前先证如下的

引理 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 可以 Cesàro 求和的必要条件是

$$a_n=o(n).$$

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S\ (C)$, 用 S_n 记它的部分和, 那么

$$\frac{a_n}{n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{n}=\frac{S_n}{n}-\frac{n-1}{n}\frac{S_{n-1}}{n-1},\tag{1}$$

而

$$\frac{S_n}{n}=\frac{n\sigma_n-(n-1)\sigma_{n-1}}{n}=\sigma_n-\frac{n-1}{n}\sigma_{n-1}\to 0.$$

代入(1)，即得$\frac{a_n}{n}\to 0\ (n\to+\infty)$． □

定理 1 的证明．设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S$ (C)，我们要证明$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 1，而且

$$\lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S.$$

由引理知，$\frac{a_n}{n}\to 0$，故当n充分大时有$|a_n|<n$，于是

$$|a_nx^n|\leqslant n|x|^n\quad (n>N).$$

因而级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$(-1,1)$中绝对收敛．记

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\quad (|x|<1),\qquad S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k.$$

由 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ (|x|<1)$得知

$$\frac{f(x)}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}S_nx^n,$$

$$\frac{f(x)}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n$$

或者

$$f(x)=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sigma_{n+1}x^n\quad (|x|<1);\tag{2}$$

另一方面，$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$，或者

$$S=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)Sx^n\quad (|x|<1).\tag{3}$$

从(2), (3)可得

$$f(x)-S=(1-x)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-S)x^n. \tag{4}$$

因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sigma_n=S$, 故对 $\varepsilon>0$, 存在 n_0, 当 $n>n_0$ 时

$$|\sigma_n-S|<\varepsilon/2.$$

现在把(4)写成

$$f(x)-S=(1-x)^2\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)(\sigma_{n+1}-S)x^n$$

$$+(1-x)^2\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)(\sigma_{n+1}-S)x^n$$

$$=I_1+I_2.$$

当 $0<x<1$ 时, 我们有

$$|I_2|\leqslant(1-x)^2\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N}^{\infty}(n+1)x^n<(1-x)^2\frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$=\frac{\varepsilon}{2},$$

I_1 中的和是有界的, 设其不超过M, 则有

$$|I_1|<M(1-x)^2.$$

故当 $|x-1|<\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2M}}$时, 使得

$$|f(x)-S|\leqslant|I_1|+|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就是要证明的. □

这个定理说明, 凡是能用 Cesàro 法求和的, 也必能用 Abel 方法求和. 但反之却不然.

考虑级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)=1-2+3-4+\cdots,$$

它所对应的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n=\frac{1}{(1+x)^2},$$

所以 $$\lim_{x\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n=\frac{1}{4},$$

即 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)=\frac{1}{4}$ (A). 但这个级数不能用 Cesàro 法求和，因为它不满足 Cesàro 求和的必要条件

$$\frac{a_n}{n}\to 0.$$

由此可见 Abel 求和法比 Cesàro 求和法更强些。

习　题

1. 回答下列问题

(1) 引进级数收敛的新定义的原则是什么？

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 可以 Cesàro 求和的必要条件是什么？举例说明这个必要条件不是充分的.

(3) Cesàro 求和法和 Abel 求和法哪个更强些？

2. 下面两个级数是否可以 Cesàro 求和？

(1) $1-2+3-4+5-6+\cdots$,

(2) $1-0-1+1+0-1+\cdots$.

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 可以 Cesàro 求和. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$$

4. 求级数

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sin nx\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$$

的 Cesàro 和。

5. 证明$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\ln n=\frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{2}$ (C)

6. 设$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$是两个收敛级数, 它们的和分别为A和B, 证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)=AB \text{ (A)}$$

§2.2 Fejàr 定理

现在把 Cesàro 求和法用到 Fourier 级数上去. 我们证明, 连续函数的 Fourier 级数在 Cesàro 意义下收敛于$f(x)$.

现设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

它的部分和

$$S_n(x_0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt;$$

它的算术平均

$$\sigma_n(x_0)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x_0)$$

$$=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt, \quad (1)$$

这里我们用了三角恒等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x=\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

(1) 对任何可积与绝对可积的 f 都成立. 特别, 取 $f\equiv 1$, 这时 $s_n(x_0)=1$, 所以 $\sigma_n(x_0)=1$, 代入(1)得

$$\frac{1}{n\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt=1. \quad (2)$$

现在证明

定理1(Fejér) 设周期 2π 的可积与绝对可积函数 f 在 x_0 处有左右极限 $f(x_0-0), f(x_0+0)$, 则其 Fourier 级数在 x_0 处的Cesàro 和为

$$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)];$$

特别, 如果 x_0 是 f 的连续点, 则其 Cesàro 和就是 $f(x_0)$.

证明 若记 $S=\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$, 我们要证明

$$\lim_{n\to+\infty}\sigma_n(x_0)=S.$$

根据(1), (2), 可得

$\sigma_n(x_0)-S$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi[f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S]\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt. \quad (3)$$

由于存在左右极限 $f(x_0-0), f(x_0+0)$，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,\pi)$，当 $0<t<\delta$ 时，

$$|f(x_0+t)-f(x_0+0)|<\varepsilon/2,$$
$$|f(x_0-t)-f(x_0-0)|<\varepsilon/2.$$

若记

$$\varphi(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S,$$

则 $|\varphi(t)|<\varepsilon\ (0<t<\delta)$. 把(3)拆成两个积分：

$$\sigma_n(x_0)-S$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\delta \varphi(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt+\frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi \varphi(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

$$=I_1+I_2.$$

$$|I_1|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_0^\delta |\varphi(t)|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\delta\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

$$<\frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt=\frac{\varepsilon}{2},$$

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi |\varphi(t)|\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt$$

$$\leqslant \frac{1}{2n\pi \sin^2\frac{\delta}{2}}\int_\delta^\pi |\varphi(t)|dt$$

$$<\frac{1}{2n\pi \sin^2\frac{\delta}{2}}\int_0^\pi |\varphi(t)|dt = \frac{A}{n},$$

其中 $A=\left(2\pi\sin^2\frac{\delta}{2}\right)^{-1}\int_0^\pi|\varphi(t)|dt$ 是一个常数. 故当$n>\frac{2A}{\varepsilon}$时,

$$|\sigma_n(x_0)-S|\leqslant|I_1|+|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这就是要证明的. □

从这定理立刻可得

推论 设周期 2π 的可积与绝对可积函数 f 在 x_0处有左右极限 $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$, 如果 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛, 则必收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$.

证明 设 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于 S, 则其 Cesàro 和也必为S. 由定理 1 知其 Cesàro和为$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$, 故得

$$S=\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)].\qquad □$$

如果 f 是周期 2π的连续函数, 则有下述更强的结果.

定理 2 (Fejér) 如果 f 是周期 2π 的连续函数, 则其Fourier 级数在 Cesàro 意义下一致收敛于 f.

证明 根据定理 1 中的推导, 有

$$\sigma_n(x)-f(x)=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi\varphi_x(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt,\qquad(4)$$

其中 $\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$.

由于 f 是整个数轴上的连续函数，故在任意闭区间$[a,b]$中一致连续。对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta\in(0,\pi)$，当 $0<t<\delta$ 时，不等式，

$$|f(x+t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x-t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

对$[-\pi,\pi]$中所有 x 成立，因而$|\varphi_x(t)|<\varepsilon$ 对$[-\pi,\pi]$中所有x成立。和定理 1 的证明一样，把(4)拆成两个积分：

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(x)-f(x)\\
&=\frac{1}{2n\pi}\int_0^\delta\varphi_x(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt+\frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi\varphi_x(t)\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt\\
&=I_1+I_2.
\end{aligned}$$

易知

$$|I_1|\leqslant\frac{\varepsilon}{2n\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2dt=\frac{\varepsilon}{2}.$$

估计 I_2时，注意到 f 是$[-2\pi,2\pi]$中的连续函数，它在$[-2\pi,2\pi]$中绝对值的上界设为M。于是当 $x\in[-\pi,\pi]$，$t\in[0,\pi]$时，

$$|\varphi_x(t)|\leqslant|f(x+t)|+|f(x-t)|+2|f(x)|\leqslant 4M,$$

因而

$$|I_2|\leqslant\frac{1}{2n\pi}\int_\delta^\pi|\varphi_x(t)|\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}}\leqslant\frac{2M}{n\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

所以当$n>\dfrac{4M}{\varepsilon\sin^2\frac{\delta}{2}}$时，

$$|\sigma_n(x)-f(x)|\leqslant|I_1|+|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

对$[-\pi,\pi]$中所有的x成立. 由周期性,上式对$(-\infty,+\infty)$中所有x成立. □

根据§2.1定理1以及Fejér定理,下面的定理就不需要单独证明了.

定理3 设f是周期2π的可积与绝对可积函数,若$f(x_0+0)$,$f(x_0-0)$存在,则其Fourier级数在x_0处的Abel和为$\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$,即

$$\lim_{r\to 1-0}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0+b_n\sin nx_0)r^n\right\}$$

$$=\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$$

作为Fejér定理的另一个重要的应用,我们来研究用三角多项式逼近周期2π的连续函数的问题.

定义1 称

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

为n次三角多项式.

Fourier级数的部分和就是一个三角多项式.

第八章§3.4讲过,闭区间$[a,b]$上的连续函数不一定能展开成幂级数,但能用多项式序列一致逼近. 同样,闭区间$[-\pi,\pi]$上的连续函数不一定能展开成Fourier级数,那么能不能用三角多项式来一致逼近呢?答案是肯定的.

定理4 (Weierstrass) 如果f在$[-\pi,\pi]$上连续,且$f(-\pi)=f(\pi)$,则f必能用三角多项式序列一致逼近.

证明 根据假定,我们能把f连续地以2π为周期开拓到整个数轴上,使它成为$(-\infty,+\infty)$中以2π为周期的连续函数. 由

Fejér 定理知，f 能在$(-\infty, +\infty)$中用序列 $\sigma_n(x)$一致逼近. 因为 f 的 Fourier 级数的 k 次部分和 $S_k(x)$是一个 k 次三角多项式，因而

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n}(S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x))$$

是一个 $n-1$ 次三角多项式，它就是一个一致逼近 f 的三角多项式序列. □

习　题

1. 回答下列问题

(1) 周期 2π 的可积与绝对可积函数 f，如果在 x_0 处存在左右极限$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$，它的 Fourier 级数在 x_0 处是否一定可以 Cesàro 求和？Cesàro 和是什么？

(2) 设周期 2π 的可积与绝对可积函数 f 的 Fourier 级数在 x_0处收敛，如果 f 在 x_0 处连续，那么它的 Fourier 级数在 x_0 处是否一定收敛于$f(x_0)$？

2. 试按下列步骤，给出定理 3 的一个直接的证明

(1) $F(r, x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0 + b_n\sin nx_0)r^n$ 在 $0<r<1$ 中收敛；

(2) $F(r, x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[f(x_0+t) + f(x_0-t)]\frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}dt$；

(3) $\lim\limits_{r\to 1-0} F(r, x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$.

3. 试由 Weierstrass 的关于三角多项式的逼近定理导出关于代数多项式的逼近定理.

4. 证明$[0, \pi]$上的连续函数可用余弦多项式一致逼近.

第三节　平方平均逼近

§3.1 从另一个角度看 Fourier 系数

前面已经证明，周期 2π 的连续函数能用三角多项式一致逼

近．对一般的可积函数，这个结论不再成立。

现在从另一个角度来提问题．设

$$T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)$$

是一 n 次三角多项式．固定n，考虑 f 和T_n 的平方平均值：

$$\rho(f,T_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2dx,$$

我们要找出使 $\rho(f,T_n)$取最小值的那个三角多项式．容易知道

$\rho(f,T_n)$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)dx\right].\quad(1)$$

用 a_n,b_n记 f 的 Fourier 系数，则有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)T_n(x)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]dx$$

$$=\pi\left[\frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k)\right],\quad(2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}T_n^2(x)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx)\right]^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\alpha_0^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2\cos^2kx+\beta_k^2\sin^2kx)\right]dx$$

$$=\pi\left[\frac{\alpha_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2)\right],\quad(3)$$

这儿我们利用了三角函数系的正交性．

把(2), (3)代入(1), 得

$$\rho(f, T_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right]$$

$$-\left[\frac{a_0\alpha_0}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k\alpha_k + b_k\beta_k)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{1}{2}\left\{\frac{\alpha_0^2 - 2\alpha_0 a_0}{2}\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k^2 - 2\alpha_k a_k) + (\beta_k^2 - 2\beta_k b_k)]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2}\right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2]\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right\}$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{1}{2}\left\{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right\}.$$

在这个表达式中, a_k, b_k 是由 f 确定的, α_k, β_k 可以任意变动. 显然, 取 $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$, $\rho(f, T_n)$就达到它的最小值. 这就是说, 如果取 $T_n(x)$为f 的 Fourier 级数的部分和 $S_n(x)$, 则$\rho(f, S_n)$具有最小值:

$$\rho(f, S_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{1}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right]. \qquad (4)$$

这回答了刚才提出的问题.

由于对任何可积与平方可积的 f，都有

$$\rho(f, S_n) \geqslant 0.$$

故从(4)可得不等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx,$$

这称为 **Bessel 不等式**.

Bessel 不等式告诉我们，由可积与平方可积函数 f 的Fourier 系数 a_k, b_k 构成的级数

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

是收敛的，它的和不超过 $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$. 于是我们再一次得到

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = 0.$$

习　　题

1. 问答下列问题:

(1) 设 f 是周期 2π 的可积与平方可积函数，用 H_n 记所有 n 阶三角多项式的全体，什么样的三角多项式可以取得下面的最小值:

$$\min_{T \in H_n} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T(x)]^2 dx \right\}.$$

(2) 下面两个三角级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos nx, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$$

是否可能分别是某个可积与平方可积函数的 Fourier 级数?

2. 设

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$$

是定义在区间$[a, b]$上的一个可积与平方可积的函数系. 如果

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \ (n \neq m), \quad \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = \lambda_n \neq 0,$$

就称$\{\varphi_n(x)\}$是$[a, b]$上的一个正交系.

设f是$[a, b]$上的可积与平方可积函数，命

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n}\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

作级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots$$

称它为f关于正交系$\{\varphi_n(x)\}$的 Fourier 级数，c_n称为 Fourier 系数.

按照与三角函数系 Fourier 级数相同的讨论方法，证明

(1) $\rho(f, S_n) = \min\limits_{\tau_n \in Q_n}\rho(f, \tau_n)$

这里$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)$是$f$的 Fourier 级数的部分和，

$$Q_n = \{\gamma_0\varphi_0(x) + \cdots + \gamma_n\varphi_n(x): \quad \gamma_0, \cdots, \gamma_n \text{是任意实数}\},$$

$$\rho(f, \tau_n) = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x) - \tau_n(x)]^2 dx.$$

(2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx$,

这是一般正交系的 Bessel 不等式.

§3.2 Parseval 等式

上节已经证明，对任何可积与平方可积的f，都有

$$\rho(f, S_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \frac{1}{2}\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\right], \quad (1)$$

这里S_n是f的 Fourier 级数的部分和.

从(1)容易看出，随着n的增大，$\rho(f, S_n)$单调非增. 我们问，是否有

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(f, S_n) = 0. \quad (2)$$

如果(2)成立，即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0,$$

就说 S_n 平方平均收敛于 f.

从(1)可以看出,(2)等价于

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx, \tag{3}$$

这称为 Parseval 等式. 下面我们来证明(3)成立.

定理1 对$[-\pi, \pi]$上的任何可积与平方可积函数 f, Parseval 等式成立.

证明 分三步证明:

(一) 设 f 是$[-\pi, \pi]$上的连续函数, 且 $f(-\pi)=f(\pi)$.

由 Weierstrass 关于三角多项式的逼近定理, 对任意 $\varepsilon>0$, 总能找到 n_0 次的三角多项式 $T_{n_0}(x)$, 使得

$$|f(x)-T_{n_0}(x)|<\sqrt{\varepsilon}$$

对$[-\pi, \pi]$中的 x 都成立. 于是

$$\rho(f, T_{n_0})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_{n_0}(x)]^2dx<\varepsilon.$$

根据 Fourier 级数部分和 S_n 的极值性质:

$$\rho(f, S_{n_0})\leqslant\rho(f, T_{n_0})<\varepsilon,$$

又因 $\rho(f, S_n)$随着 n 增大而单调非增, 所以当 $n>n_0$时, 有

$$\rho(f, S_n)\leqslant\rho(f, S_{n_0})<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(f, S_n)=0$, 因而 Parseval 等式成立.

(二) 设 f 在$[-\pi, \pi]$上 Riemann 可积.

因为 f 在$[-\pi, \pi]$上 Riemann 可积, 故对 $\varepsilon>0$, 存在$[-\pi, \pi]$的一个分法:

$$-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_{m-1}<x_m=\pi,$$

使得

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i\Delta x_i<\frac{\pi}{2\Omega}\varepsilon,$$

其中 $\omega_i = M_i - m_i$ 是 f 在小区间$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅, $\Omega = M - m$ 是 f 在$[-\pi, \pi]$上的振幅.

改变 f 在区间端点 $-\pi, \pi$ 上的值, 使得

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

这种改变当然不会影响 f 的 Fourier 系数.

用直线将$(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $(x_i, f(x_i))$联结起来, 得到$[-\pi, \pi]$上的一条折线, 设这折线的方程为 $y = \varphi(x)$, 显然 φ 是$[-\pi, \pi]$上的连续函数, 而且 $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi)$. 根据(一)中证明的结论, 存在三角多项式 $T(x)$, 使得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\varphi(x) - T(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4}$$

当 $x \in [x_{i-1}, x_i]$时, 显然有

$$m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i, \quad m_i \leqslant \varphi(x) \leqslant M_i,$$

因而

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant M_i - m_i = \omega_i \quad (x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i).$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - \varphi(x)]^2 dx \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x) - \varphi(x)]^2 dx \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\omega_i^2 \Delta x_i \leqslant \frac{\Omega}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}\omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned} \tag{5}$$

利用初等不等式$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$以及(4), (5)即得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T(x)]^2 dx \\
&\leqslant \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{[f(x) - \varphi(x)]^2 + [\varphi(x) - T(x)]^2\} dx \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

这样，我们找到了三角多项式 $T(x)$，使得

$$\rho(f,T)<\varepsilon,$$

再用和(一)同样的推理方法

即得

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(f,S_n)=0,$$

因而 Parseval 等式成立。

(三) 设 f 在$[-\pi,\pi]$上广义可积。

这时我们假定 f^2 也可积。不妨设 π 是 f 的瑕点，于是对$\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，使得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\eta}^{\pi}f^2(x)dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

作函数

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[-\pi,\pi-\eta],\\ 0, & x\in(\pi-\eta,\pi],\end{cases}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,\pi-\eta],\\ f(x), & x\in(\pi-\eta,\pi],\end{cases}$$

显然有 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$。由于 f_1 在$[-\pi,\pi]$上 Riemann可积，故由(二)知，存在三角多项式 $T(x)$，使得

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f_1(x)-T(x)]^2dx<\frac{\varepsilon}{4}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2dx\\ &\leqslant\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f_1(x)-T(x)]^2dx+\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2^2(x)dx\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2}{2\pi}\int_{\pi-\eta}^{\pi}f^2(x)dx<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

重复上面的讨论，即得

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(f,S_n)=0.$$

故 Parseval 等式在这种情形也成立. □

例1 我们在§1.3 例 3 得到函数 x^2 在$[-\pi, \pi]$中的 Fourier 展开式

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx,$$

其中$a_0=\frac{2}{3}\pi^2$, $a_n=(-1)^n\frac{4}{n^2}$, $b_n=0$. 由 Parseval 等式得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx=\frac{2}{9}\pi^4+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4},$$

由此即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

若对展开式

$$\frac{x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}\quad(-\pi<x<\pi)$$

用 Parseval 等式, 我们重新得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$ □

从 Parseval 等式可以得到下面两个重要推论.

推论1 如果$[-\pi, \pi]$上的连续函数 f 和三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

正交, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0\quad(n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=0\quad(n=1, 2, \cdots),$$

那么 $f\equiv0$.

证明 由假设知道，f 的 Fourier 系数 a_n，b_n 都等于 0，由 Parseval 等式即得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = 0.$$

再由 f 的连续性，即得 $f\equiv 0$. □

推论 2 (唯一性定理) 如果两个连续函数的 Fourier 级数相同，这两个连续函数必恒等.

证明 设连续函数 f_1，f_2 有相同的 Fourier 级数，则 $f=f_1-f_2$ 的 Fourier 系数全为 0，由 Parseval 等式即知 $f\equiv 0$，即 $f_1\equiv f_2$. □

Parseval 等式还可推广到两个不同的函数.

定理 2 设 f, g 是两个可积与平方可积的函数，a_n, b_n 和 α_n，β_n 分别是 f 和 g 的 Fourier 系数，我们有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n). \tag{6}$$

证明 写出 $f+g$ 和 $f-g$ 的 Parseval 等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)+g(x)]^2 dx$$

$$= \frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n+\alpha_n)^2 + (b_n+\beta_n)^2],$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-g(x)]^2 dx$$

$$= \frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n-\alpha_n)^2 + (b_n-\beta_n)^2],$$

两式相减，即得(6). □

作为定理 2 的应用，我们证明 Fourier 级数的逐项积分定理.

定理 3 设

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

那么对包含在$[-\pi,\pi]$中的任意区间$[a,b]$，都有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx.$$

证明 设 g 是任一可积与平方可积函数，其 Fourier 级数为

$$g(x)\sim\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx).$$

把

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

代入推广的 Parseval 等式(6)，得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}g(x)dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx, \tag{7}$$

上式对任何可积与平方可积函数 g 成立. 今取

$$g(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b],\\ 0, & x\in[-\pi,a)\text{和}(b,\pi],\end{cases}$$

(7)就变为

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)dx.$$

这就是要证明的. □

这个定理说明，不论 f 的 Fourier 级数是否收敛，但永远可以逐项积分. 这是 Fourier 级数特有的性质.

习 题

1. 利用 $f(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的展开式和 Parseval 等式，求级数

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$的和.

2. 写出函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\alpha,\\ 0, & \alpha<|x|<\pi.\end{cases}$$

的 Parseval 等式, 并求下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n\alpha}{n^2}$$

的和.

3. 对展开式

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi<x<\pi)$$

逐项积分, 求函数 x^2, x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的 Fourier 展开式.

4. 设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 中连续, 且在这区间上有可积与平方可积的导函数 f'. 如果 f 满足

$$f(-\pi)=f(\pi), \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0,$$

那么有不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f'(x))^2 dx \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,$$

等式只有当 $f(x)=A\cos x+B\sin x$ 才成立.

5. 证明

(1) 设

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi-1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \frac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant\pi,\end{cases}$$

则

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx, \quad |x|\leqslant\pi.$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2=\frac{\pi-1}{2}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}=\frac{(\pi-1)^2}{6}$.

第四节 Fourier 积分

前面讲过，如果函数 f 在区间$[-l, l]$中满足一定的条件(例如可微)，f 就能在$[-l, l]$中展为 Fourier 级数：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right), \tag{1}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \quad (n=1, 2, \cdots).$$

如果 f 定义在整个数轴上，且在$(-\infty, +\infty)$中绝对可积，则对任何固定的 x 值，总能选取充分大的 l，使得 $l>|x|$，因此 $f(x)$ 仍能用(1)来表示．但是对于不同的 x，表达式可能不一样．为了让 f 在$(-\infty, +\infty)$中能得到一个统一的表达式，我们考察(1)当 $l\to+\infty$时的极限情形．

把 a_n, b_n的表达式代入(1)，得

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)\,dt.$$

由于$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt$ 收敛，故当 $l\to+\infty$时，上式第一项趋于 0．命

$$u_n=\frac{n\pi}{l}, \quad \Delta u_n=u_n-u_{n-1}=\frac{\pi}{l},$$

上式第二项可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos u_n(x-t)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta u_n\int_{-l}^{l}f(t)\cos u_n(x-t)dt.$$

当 $l\to+\infty$ 时，这个和式可以看成是函数

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)dt$$

在区间$(0,+\infty)$上的"Riemann 和"，因而可把 f 形式地写为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)dt\right]du, \tag{2}$$

这称为 Fourier 积分公式. 右端的积分叫做 Fourier 积分. (2)也可写为

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}[a(u)\cos ux+b(u)\sin ux]du, \tag{3}$$

其中

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ut\,dt,\quad b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ut\,dt.$$

(3)和 Fourier 级数十分相似，$a(u)$, $b(u)$ 相当于 Fourier 系数.

上面推导 Fourier 积分公式 (2) 的过程是不严格的，目的是使读者了解建立这个公式的背景. 下面将给出公式 (2) 成立的条件. 为此先证

引理 1 设 f 在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，则对固定的x，函数

$$F(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)dt$$

在区间$[0,\lambda]$上连续，这里 λ 是任意的正数.

证明 对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $A>0$，使得

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|dt+\int_{A}^{+\infty}|f(t)|dt<\frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 $\cos u(x-t)$ 在 $0\leqslant u\leqslant\lambda$, $-A\leqslant t\leqslant A$ 上一致连续，故对 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，当$|\Delta u|<\eta$时，对一切$[-A,A]$上的 t 有不等式

$$|\cos(u+\Delta u)(x-t)-\cos u(x-t)|<\frac{\varepsilon}{2\int_{-A}^{A}|f(t)|dt}.$$

于是，当$|\Delta u|<\eta$时，有

$$\begin{aligned}
&|F(u+\Delta u)-F(u)|\\
&\quad=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)[\cos(u+\Delta u)(x-t)-\cos u(x-t)]dt\right|\\
&\quad\leqslant 2\left[\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|dt+\int_{A}^{+\infty}|f(t)|dt\right]\\
&\quad+\int_{-A}^{A}|f(t)||\cos(u+\Delta u)(x-t)-\cos u(x-t)|dt\\
&\quad<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}$$

这就证明了 $F(v)$ 的连续性. □

由此可见，对于在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积的 f，积分

$$S(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\lambda}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)dt\,(\lambda>0) \tag{4}$$

是存在的，当 $\lambda\to+\infty$时得到的积分就是 f 的 Fourier 积分，记为

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)dt. \tag{5}$$

和 Fourier 级数的情形一样，对于一般的在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积的函数 f，它的 Fourier 积分不一定收敛，即使收敛，也不一定收敛到 $f(x)$. 为了研究积分(5)收敛的条件，注意(4)相当于 Fourier 级数中的部分和，仿照 Fourier 级数中的做法，先把(4)写成 Dirichlet 积分的形式. 我们有

引理 2 设 f 在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积，那么

$$S(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\lambda t}{t}dt. \tag{6}$$

证明 先证对任意正数 λ 和 B 有等式

$$\int_0^\lambda du\int_{-B}^B f(t)\cos u(x-t)dt=\int_{-B}^B f(t)dt\int_0^\lambda \cos u(x-t)du. \quad (7)$$

因为

$$\int_{-B}^B f(t)\cos u(x-t)dt$$

是 u 的连续函数，所以(7)左边关于 λ 的导数等于

$$\int_{-B}^B f(t)\cos\lambda(x-t)dt; \quad (8)$$

我们证明(7)右边关于 λ 的导数可以在积分号下进行，因而也等于(8)。事实上，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\eta>0$，当 $|x'-x''|<\eta$ 时，有

$$|\cos x'-\cos x''|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\dfrac{\eta}{|x|+B}$，则当 $|\Delta\lambda|<\delta$，$t\in[-B, B]$ 且 u 在 λ 和 $\lambda+\Delta\lambda$ 之间时，有

$$|u(x-t)-\lambda(x-t)|\leqslant|\Delta\lambda|\,|x-t|<\delta(|x|+B)=\eta,$$

因而

$$|\cos u(x-t)-\cos\lambda(x-t)|<\varepsilon.$$

于是，当 $|\Delta\lambda|<\delta$ 时，便有

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{\Delta\lambda}\left[\int_{-B}^B f(t)dt\int_0^{\lambda+\Delta\lambda}\cos u(x-t)du\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.-\int_{-B}^B f(t)dt\int_0^\lambda \cos u(x-t)du\right]-\int_{-B}^B f(t)\cos\lambda(x-t)dt\right|\\
&\qquad\leqslant\int_{-B}^B |f(t)|\left(\frac{1}{\Delta\lambda}\int_\lambda^{\lambda+\Delta\lambda}|\cos u(x-t)-\cos\lambda(x-t)|du\right)dt\\
&\qquad<\varepsilon\int_{-B}^B |f(t)|dt.
\end{aligned}$$

这里假定 $\Delta\lambda>0$，显然 $\Delta\lambda<0$ 时，不等式也是成立的。既然(7)两边的导数相等，而且 $\lambda=0$ 时，双方都取零值，所以等式(7)成立。

在(7)两边命 $B\to+\infty$, 得

$$\lim_{B\to+\infty}\int_0^{\lambda}du\int_{-B}^{B}f(t)\cos u(x-t)\,dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt\int_0^{\lambda}\cos u\,(x-t)\,du. \tag{9}$$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt<+\infty$, 存在 B_0, 当 $B>B_0$ 时, 有

$$\int_{-\infty}^{-B}|f(t)|\,dt+\int_{B}^{+\infty}|f(t)|\,dt<\frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

于是, 当 $B>B_0$ 时,

$$\left|\int_0^{\lambda}du\int_{-B}^{B}f(t)\cos u(x-t)\,dt-\int_0^{\lambda}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,dt\right|$$

$$\leqslant\int_0^{\lambda}du\left[\int_{-\infty}^{-B}|f(t)|\,dt+\int_{B}^{+\infty}|f(t)|\,dt\right]<\varepsilon.$$

这样一来, (9)可以写成

$$\int_0^{\lambda}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt\int_0^{\lambda}\cos u(x-t)\,du,$$

即

$$S(\lambda,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt,$$

它容易改写为(6). □

从(6)可以得到 Fourier 积分的局部化定理.

定理 1 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中绝对可积, 那么 f 的 Fourier 积分在某点 x 是否收敛以及收敛于什么值, 仅与 f 在 x 附近的函数值有关.

证明 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $A_0>1$, 使得

$$\int_{A_0}^{+\infty}|f(x+t)+f(x-t)|\,dt<\varepsilon.$$

而当 $t>A_0$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin\lambda t}{t}\right|\leqslant\frac{1}{t}<\frac{1}{A_0}<1,$$

故对一切λ有不等式

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right|<\varepsilon.$$

根据 Riemann 引理, 对任意正数 $h<A_0$, 有

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_h^{A_0}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\lambda t}{t}dt=0,$$

因而

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_h^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\lambda t}{t}dt=0.$$

这样, 当 $\lambda\to+\infty$ 时, 积分(6)是否收敛以及收敛于什么值, 完全取决于积分

$$\frac{1}{\pi}\int_0^h[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin\lambda t}{t}dt \tag{10}$$

当 $\lambda\to+\infty$ 时的极限情况, 因而仅与 f 在 x 附近的值有关. □

关于积分(10)的收敛情况, 在讨论 Fourier 级数的收敛问题时已作过讨论, 因而可以得到和 Fourier 级数中完全相同的 Dini 判别法及其推论. 这里只叙述 Dini 判别法的一个推论.

定理 2 设 f 在$(-\infty,+\infty)$中绝对可积, 且在 x 处有广义的左右导数, 那么 f 的 Fourier 积分收敛于$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, 即

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)dt=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)];$$

如果 f 在 x 处连续, 则有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)dt. \tag{11}$$

特别, 若 f 在$(-\infty,+\infty)$中绝对可积, 且在 x 处有有限的导数, 则(11)成立.

在 Fourier 积分公式

$$f(x)=\int_0^{+\infty}[a(u)\cos ux+b(u)\sin ux]du,$$

$$a(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ut dt,$$

$$b(u)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin ut dt$$

中，如果 f 是偶函数，那么

$$a(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut dt,\quad b(u)=0,$$

这时积分公式可写为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos ux du\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut dt, \tag{12}$$

这称为 **Fourier 余弦公式**.

如果 f 是奇函数，则

$$a(u)=0,\ b(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\sin ut dt,$$

积分公式又可写为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin ux du\int_0^{+\infty}f(t)\sin ut dt \tag{13}$$

这称为 **Fourier 正弦公式**.

如果 f 只是定义在$[0,+\infty)$上的绝对可积函数，对它作偶性延拓和奇性延拓就可分别得到公式(12)和(13).

命

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ut dt, \tag{14}$$

则(12)可表为

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}g(u)\cos xu du. \tag{15}$$

在这两个公式中，f 和 g 以完全相同的形式互相表示. 我们称 g 为 f 的 **Fourier 余弦变换**，(15)是余弦变换的**反变换公式**.

完全一样，称

$$h(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}f(t)\sin ut\,dt \tag{16}$$

为 f 的 Fourier 正弦变换. 由(13)即得它的反变换公式

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}h(u)\sin ux\,du. \tag{17}$$

例 1 求函数 $f(x)=e^{-\beta x}(\beta>0,\ x>0)$ 的 Fourier 正弦变换和余弦变换.

解 由公式(14)、(16)分别得余弦变换和正弦变换:

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta t}\cos ut\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^{2}+u^{2}},$$

$$h(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta t}\sin ut\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{\beta^{2}+u^{2}}.$$

分别用反变换公式可得

$$e^{-\beta x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\beta}{\beta^{2}+u^{2}}\cos xu\,du,$$

$$e^{-\beta x}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u}{\beta^{2}+u^{2}}\sin xu\,du.$$

这样，我们就得到两个并不容易计算的积分的数值:

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos xu}{\beta^{2}+u^{2}}du=\frac{\pi}{2\beta}e^{-\beta x}\quad(x>0,\ \beta>0),$$

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{u\sin xu}{\beta^{2}+u^{2}}du=\frac{\pi}{2}e^{-\beta x}\quad(x>0,\ \beta>0).$$ □

例 2 解积分方程

$$\int_{0}^{+\infty}g(u)\sin xu\,du=f(x),$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ 0, & \pi<x<+\infty.\end{cases}$$

解 把方程写为

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} g(u)\sin xu du=\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x),$$

因此$\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)$是$g(u)$的Fourier正弦变换，利用反变换公式，即得

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(x)\sin xu dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin x\sin xu dx=\frac{\sin\pi u}{1-u^2}. \qquad \square$$

用得比较多的是Fourier变换的复数形式.

定义 1

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-itx}dt \tag{18}$$

称为$f(t)$**的 Fourier 变换**. 这里x是实数，$F(x)$是一个实变数的复函数.

下面从Fourier积分公式给出它的反变换公式.

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)dt$$

是u的偶函数，故Fourier积分公式可以写成更对称的形式：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos u(x-t)dt. \tag{19}$$

又因$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin u(x-t)dt$是$u$的奇函数，所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin u(x-t)dt=0, \tag{20}$$

由(19)，(20)两式即得

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{iu(x-t)}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iux}du\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iut}dt.$$

把(18)代入，即得反变换公式

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)e^{iux}du.$$

Fourier 变换是数学物理中一种重要的积分变换，如同对数能把乘法运算变为加法运算那样，Fourier 变换能把分析运算变为代数运算，从而使问题得以简化。举例来说，设 g, k 是已知的函数，求解下面关于未知函数 f 的积分方程：

$$f(x)=g(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)f(t)dt, \quad (-\infty<x<+\infty).$$

因为 g, k 是已知函数，故其 Fourier 变换

$$G(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-iut}dt,$$

$$K(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}k(t)e^{-iut}dt$$

也是已知函数。对积分方程两端的函数作 Fourier 变换，设 f 的 Fourier 变换为 F，则有

$$\begin{aligned}F(u)&=G(u)+\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)f(t)dt\right\}e^{-iux}dx\\&=G(u)+\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-t)e^{-iux}dx\\&=G(u)+\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty}k(x)e^{-iu(t+x)}dx\\&=G(u)+\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-iut}dt\int_{-\infty}^{+\infty}k(x)e^{-iux}dx\\&=G(u)+F(u)K(u).\end{aligned}$$

这就是说，未知函数 f 的 Fourier 变换 F 满足一个简单的代数方程，解之得

$$F(u)=\frac{G(u)}{1-K(u)},$$

再从 F 通过反变换公式即能算出 f.

习 题

1. 用 Fourier 积分表示下列函数:

(1) $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}x, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant \pi,\\ 0, & |x|>\pi.\end{cases}$

(4) $f(x)=e^{-a|x|}\quad a>0.$

2. 求下列积分方程的解:

(1) $\int_0^{+\infty} f(t)\sin xt\,dt=e^{-x}\quad (x>0).$

(2) $\int_0^{+\infty} f(t)\cos xt\,dt=\dfrac{1}{1+x^2}.$

3. 证明

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\cos 2xt\,dt=\begin{cases}1-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

4. 求下列函数的 Fourier 反变换:

(1) $F(u)=ue^{-\beta|u|}\quad (\beta>0).$

(2) $F(u)=e^{-\frac{u^2}{2}}.$